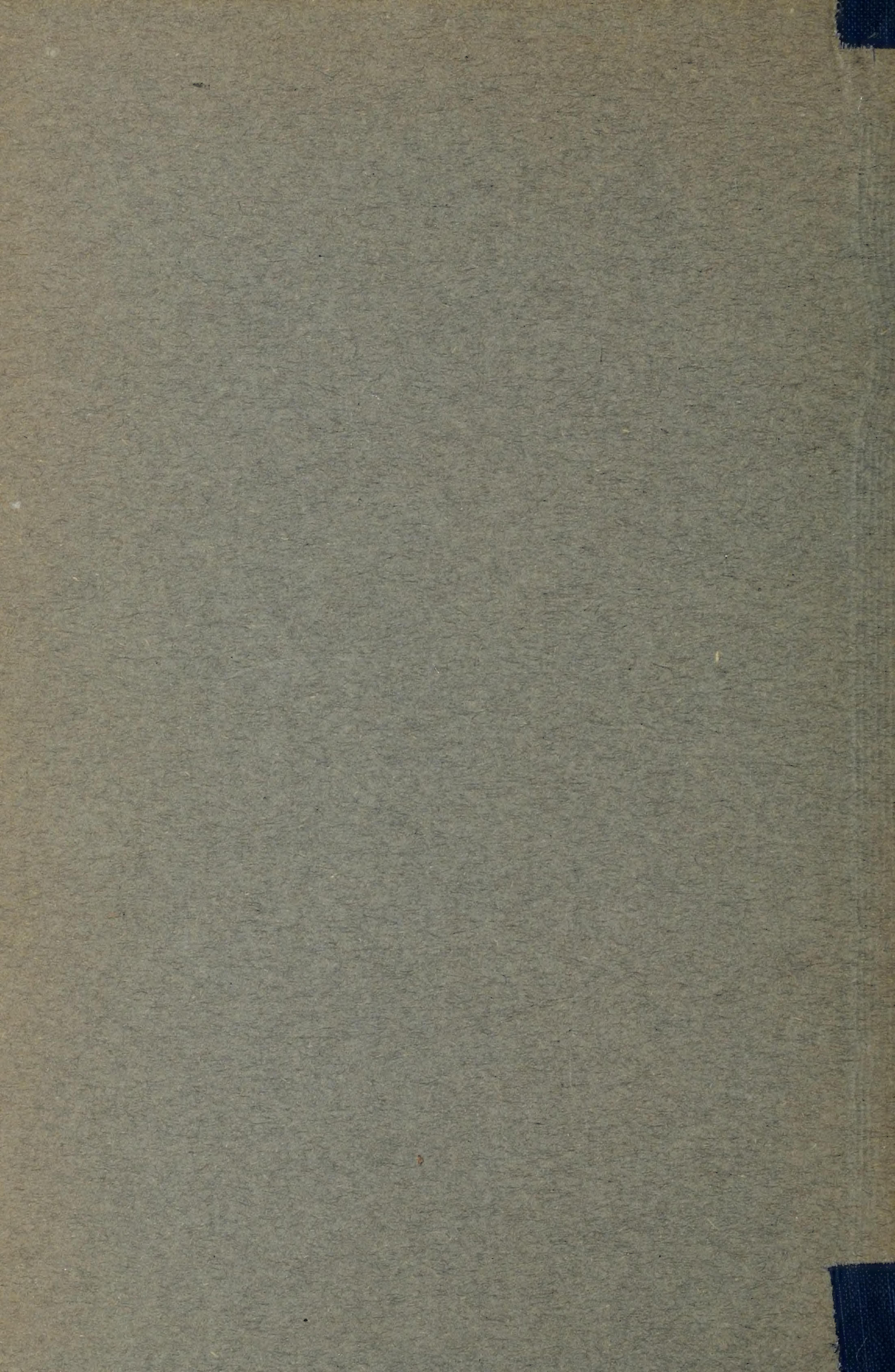
KIRCHHOFF

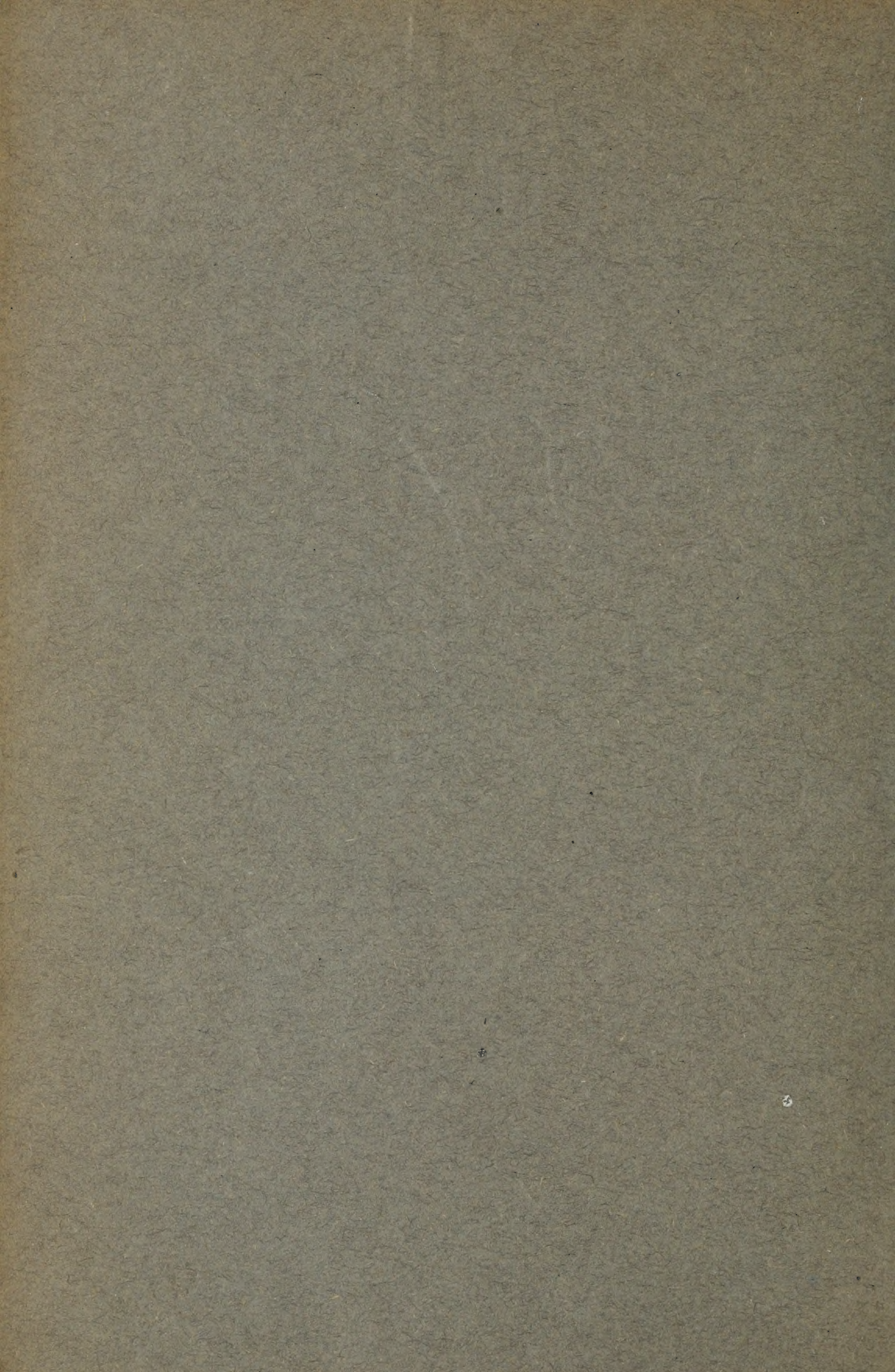
STATIK DER BAUWERKE

I

Berlin
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn







Die

Statik der Bauwerke

In zwei Bänden

von

Dr. Ing. **Rudolf Kirchhoff**
Regierungsbaumeister.

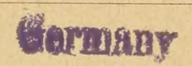
Erster Band:

Einführung in die graphische Statik. — Trägheits- und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte. Normal- und Schubspannungen in geraden Stäben. — Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger. Kinematische Theorie des ebenen Fachwerks. — Die Theorie des Raumfachwerks.

Mit 379 zum Teil farbigen Abbildungen.



BERLIN 1921
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.



Vorwort zum ersten Band.

Der vorliegende erste Band meiner Statik der Bauwerke enthält in der Hauptsache die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger und der Raumfachwerke. Zur Einführung in das schwierigere Gebiet der eigentlichen Statik der Bauwerke sind zunächst die Grundbegriffe der graphischen Statik, die Berechnung der Trägheits- und Zentrifugalmomente und die Berechnung der Normal- und Schubspannungen in geraden Stäben behandelt. Die gründliche Beherrschung dieser wichtigen Abschnitte aus der Festigkeitslehre ist für das Verständnis der folgenden Abhandlungen unbedingt erforderlich.

Die Theorie der statisch bestimmten ebenen Träger und der Raumfachwerke wird in Anlehnung an die vorzüglichen Methoden von Müller-Breslau, meines hochverehrten Lehrers, vorgetragen. Es kam mir namentlich darauf an, den Stoff in möglichst einfacher und, wo es möglich war, elementarer Weise zu behandeln, ohne dabei den Boden der Wissenschaftlichkeit zu verlassen. Ich habe mich daher bemüht, mich möglichst dem Auffassungsvermögen des Anfängers, an den sich dieser erste Band wendet, anzupassen, wobei mir meine langjährigen Erfahrungen, die ich als Lehrer der Statik im unmittelbaren Gedankenaustausch mit meinen Hörern gesammelt habe, sehr zustatten kamen.

Ein breiter Raum wurde auch der kinematischen Theorie des Fachwerks zugewiesen, die wegen ihrer einfachen Bildungsgesetze eine besonders einfache und übersichtliche Herleitung der Einflußlinien statisch bestimmter, ebener Träger ermöglicht und sich daher auch bei dem Anfänger einer besonderen Beliebtheit erfreut. Ihre Beherrschung ist namentlich auch für das Verständnis eines Teils des im zweiten Band dieses Werkes behandelten Stoffes von Bedeutung.

Zum Schluß fühle ich mich noch veranlaßt, der Verlagsbuchhandlung von Wilhelm Ernst & Sohn für ihr Interesse und das Entgegenkommen, das sie dem Buche gewidmet hat, meinen besten Dank auszusprechen.

Charlottenburg, Anfang April 1921.

Kirchhoff.

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

I. Abschnitt.

Einführung in die graphische Statik.

Seite

§ 1. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene, statische Momente und Kräftepläne 1

II. Abschnitt.

Die Spannungstheorie.

§ 2. Die Querschnittsmomente 2. Ordnung 12

§ 3. Berechnung der Normalspannungen 33

§ 4. Berechnung der Spannungen mittels des Kerns 44

§ 5. Berechnung der Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Querschnitt 54

III. Abschnitt.

Die statisch bestimmten Bauwerke.

§ 6. Der vollwandige Balken auf zwei Stützen 61

1. Der Einfluß ständiger Belastung 61

2. Der Einfluß beweglicher Belastung 70

A. Berechnung der Größtwerte statischer Größen infolge bestimmter Lastenzüge 70

1. Bewegliche Einzellasten 70

a) Berechnung der Auflagerdrücke für eine bestimmte Stellung des Lastenzuges 71

α) Rechnerische Bestimmung des Auflagerdrucks mit Hilfe von Tabellen 71

β) Zeichnerische Bestimmung des Auflagerdrucks mit Hilfe des *A*-Polygons 71

b) Berechnung des Maximalmoments infolge eines Lastenzuges . . 74

c) Berechnung des größten Biegungsmoments für einen bestimmten Querschnitt 76

α) Bestimmung der gefährlichsten Zugstellung auf rechnerischem Wege 76

β) Zeichnerisches Verfahren 78

γ) Näherungsverfahren mittels der Umhüllungskurve der größten Momente bezw. mit Hilfe von Tabellen 79

2. Bewegliche gleichmäßig verteilte Belastung (p/lfd. m) 80

B. Berechnung der Größtwerte statischer Größen für beliebige Lastenzüge mit Hilfe von Einflußlinien 81

1. Allgemeine Bestimmung von Einflußlinien 81

2. Anwendung auf den Balken auf zwei Stützen 85

a) Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A 85

b) Die Einflußlinie für das Moment M_m 86

c) Die Einflußlinie für die Querkraft Q_m 87

d) Einflußlinien für Momente und Querkräfte für im Kragarm liegende Querschnitte 87

e) Einflußlinien für den Balken auf zwei Stützen mit Schleppträger 88

f) Der als Balken auf zwei Stützen gelagerte vollwandige Bogen mit schräg beweglichem Auflager 88

Seite

§ 7. Der Fachwerkbalken auf zwei Stützen 90
1. Der Parallelträger 91
A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte 91
B. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte mit Hilfe von Einflußlinien 94
C. Die zweckmäßigsten Methoden zur Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge eines Lastenzuges 96
D. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge gleichmäßig verteilter Verkehrsbelastung p je Längeneinheit (Menschengedränge) . . 103
2. Der Parallelträger mit K-förmigen angeordneten Füllungsstäben 105
A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte 106
B. Bestimmung der Einflußlinien für die Stabspannkräfte 108
3. Der Fachwerkbalken mit gebrochener Gurtung 109
A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte 109
B. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte mit Hilfe von Einflußlinien 112
C. Die zweckmäßigsten Methoden zur Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge eines Lastenzuges 118
D. Einfluß gleichmäßig verteilter Verkehrsbelastung p je Längeneinheit . 138
E. Einfluß beliebig schräg gerichteter Kräfte 139
4. Einige Fachwerkbalken besonderer Art 141
1. Der Parabelträger 141
2. Der Pauliträger 142
3. Der Schwedlerträger 143
4. Der Fachwerkbalken mit Zwischenteilung 148
5. Der Fachwerkbalken mit schräg beweglichem Auflager 153
§ 8. Der Gerberbalken 155
1. Der vollwandige Gerberbalken 155
A. Einfluß ständiger Belastung 156
B. Einfluß beweglicher Belastung (Einflußlinien) 160
2. Der fachwerkartige Gerberbalken (Einflußlinien) 164
§ 9. Der Dreigelenkbogen 171
1. Der vollwandige Dreigelenkbogen 171
A. Einfluß beliebig schräg gerichteter Lasten 171
B. Einfluß senkrechter Lasten 174
1. Ermittlung der Stützlinie 174
2. Ableitung allgemeiner Formeln für die am Dreigelenkbogen wirkenden statischen Größen 175
3. Ermittlung der Einflußlinien für die am Dreigelenkbogen wirkenden statischen Größen 177
2. Der fachwerkartige Dreigelenkbogen (Einflußlinien) 181
3. Der Dreigelenkbogen mit überkragenden Enden und Schleppträgern (Einflußlinien) 187
4. Der vollwandige Dreigelenkbogen mit aufgehobenem Horizontalschub . . . 188
A. Der Bogen mit wagerechtem Zugband 188
B. Der Bogen mit gesprengtem Zugband 189
1. Ableitung allgemeiner Formeln für die statischen Größen . . . 189
2. Berechnung der Einflußlinien für die statischen Größen 189
3. Einfluß beliebig schräg gerichteter Lasten 192
5. Der fachwerkartige Dreigelenkbogen mit aufgehobenem Horizontalschub . 195
A. Der Bogen mit wagerechtem Zugband 195
B. Der Bogen mit gesprengtem Zugband 195
1. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte 195
2. Berechnung der Einflußlinien für die Stabspannkräfte 197

Seite

6. Einige Systeme, die auf den Dreigelenkbogen zurückgeführt werden können . . . 200
   A. Der Stabbogen mit darunter liegendem Versteifungsbalken (Langerscher Balken) . . . 200
   B. Der Stabbogen mit darüber liegendem Versteifungsbalken . . . 204
   C. Die durch einen Balken versteifte Kettenbrücke . . . 210

§ 10. Kinematische Theorie des ebenen Fachwerks . . . 214
1. Allgemeines über die Bewegung einer starren Scheibe . . . 214
2. Kennzeichen der Starrheit oder Beweglichkeit einer Figur . . . 216
   A. Geometrisches Kennzeichen . . . 216
   B. Analytisches Kennzeichen . . . 218
3. Ableitung des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ . . . 220
4. Berechnung von Stabspannkräften und Einflußlinien mittels des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ . . . 221
   A. Die zwangläufige kinematische Kette . . . 221
   B. Das mehrteilige Netzwerk . . . 224
5. Berechnung von Einflußlinien mit Hilfe der Momentanpole (Polkonfiguration) . . . 237
   A. Allgemeines . . . 237
   B. Beispiele . . . 241

§ 11. Die Theorie der Raumfachwerke . . . 256
1. Allgemeines . . . 256
2. Berechnung von Stabspannkräften räumlicher Fachwerksysteme . . . 257
   A. Rechnerisches Verfahren . . . 258
   B. Zeichnerisches Verfahren . . . 263
3. Das Ersatzstabverfahren von Müller-Breslau . . . 269
   A. Die Schwedlersche Halbkuppel . . . 269
   B. Die Sternkuppel . . . 273
   C. Die mit Hilfe eines Y-Stabes entstandene Halbkuppel . . . 279
   D. Die Zimmermannsche Kuppel (Reichstagskuppel) . . . 282
4. Berechnung der Spannkräfte und Stützwiderstände einer Schwedlerschen Vollkuppel . . . 289
5. Die auf Linienlagern ruhende Kuppel mit Fußring . . . 297
6. Zerlegung einer Kraft im Raume nach sechs der Lage nach bekannten Richtungen . . . 298

Literatur . . . 302

I. Abschnitt.

Einführung in die graphische Statik.

§ 1. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften in der Ebene, statische Momente und Kräftepläne.

1. Zusammensetzung von zwei Kräften.

Eine auf einen Punkt m wirkende Kraft P pflegt man durch eine von dem Punkte aus in Richtung der Kraft gezogene Gerade ma darzustellen, deren Länge man in Zentimetern gleich oder proportional der Anzahl der wirkenden Kilogramm bemißt. Die Richtung der Kraft wird durch eine Pfeilspitze bezeichnet (Abb. 1). Wirken auf den Punkt zwei gleich große, der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte ma und mb, so bleibt der Punkt in Ruhe, d. h. er befindet sich im Gleichgewicht. Zwei in gleicher Richtung wirkende Kräfte können durch eine Mittelkraft (Resultierende oder Resultante) ersetzt werden, welche ihrer Summe gleich ist. Die Mittelkraft zweier ungleicher, in entgegengesetzter Richtung wirkender Kräfte ist gleich ihrer Differenz und nach der Seite der größeren von beiden gerichtet.

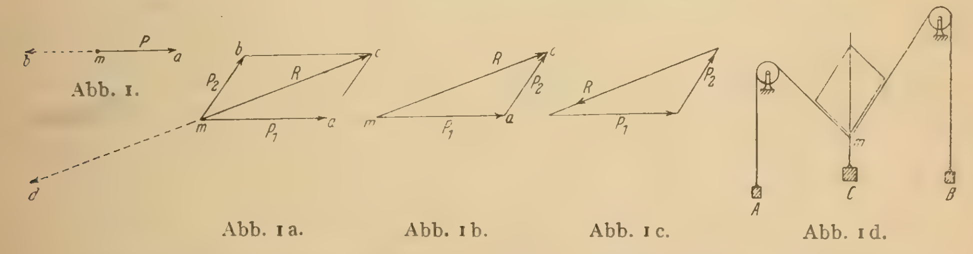


Abb. 1. Abb. 1a. Abb. 1b. Abb. 1c. Abb. 1d.

Schließen endlich die Richtungen der beiden Kräfte einen beliebigen Winkel ein, so kann man sie ihrer Größe und Richtung nach durch die geraden Linien ma und mb darstellen (Abb. 1a). Die Diagonale mc des durch die Seiten ma und mb bestimmten Parallelogramms gibt der Größe und Richtung nach die Mittelkraft R an. Die Kräfte $P_1 = ma$ und $P_2 = mb$ heißen die Seitenkräfte (Komponenten) der Mittelkraft. Die Mittelkraft mc übt auf den Punkt m dieselbe Wirkung aus wie die beiden Seitenkräfte. Diese können also durch die Mittelkraft ersetzt werden und umgekehrt.

Reiht man P_1 und P_2 nach Größe, Richtung und Sinn aneinander und bestimmt die Schlußlinie mc des Kräftezuges, so erhält man dasselbe Ergebnis (Abb. 1b), wobei es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge P_1 und P_2 aneinander gesetzt werden.

Ist umgekehrt die Aufgabe gestellt, eine Kraft R in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2, deren Richtungen gegeben sind, zu zerlegen, so ziehe man durch den Anfangspunkt von R eine Parallele zu P_1 (bezw. P_2) und durch den Endpunkt eine Parallele zu P_2 (bezw. P_1), wodurch die Strecken P_1 und P_2 bestimmt sind.

Man beachte, daß die Pfeile der Seitenkräfte auf den Pfeil der Mittelkraft zulaufen müssen (Abb. 1b).

Fügt man zu den Kräften P_1 und P_2 noch eine dritte Kraft md hinzu (Abb. 1a), welche der Mittelkraft mc an Größe gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt ist, so wird dadurch die gemeinschaftliche Wirkung der beiden Seitenkräfte aufgehoben, und die drei Kräfte P_1, P_2 und md sind am Punkt m im Gleichgewicht. Da $md = mc = R$, aber entgegengesetzt gerichtet ist, so stimmt der für P_1, P_2 und md zu zeichnende Kräftezug mit dem in Abb. 1b dargestellten überein; es ist jedoch darauf zu achten, daß nunmehr die drei im Gleichgewicht befindlichen Kräfte ein Dreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden (Abb. 1c). Ihre Mittelkraft ist gleich Null.

Man nennt das in Abb. 1a dargestellte Parallelogramm das Kräfteparallelogramm, während die Dreiecke nach Abb. 1b und 1c Kräftedreiecke heißen. Der Beweis für die Richtigkeit der Bestimmung der Mittelkraft als Diagonale des Kräfteparallelogramms kann leicht auf experimentellem Wege erbracht werden. Man hänge drei Gewichtsstücke A, B und C an Fäden derart auf, daß A und B mit Hilfe von Rollen schief nach oben auf den Punkt m wirken (Abb. 1d). Legt man ein Blatt Papier an die Ebene der Fäden und zeichnet die Winkel ab, trägt dann von m aus zwei Parallelogrammseiten so ab, daß ihre Längen den Gewichten A bezw. B proportional sind, so wird die Diagonale ihrer Größe nach dem Gewicht C entsprechen und der Richtung von mc genau entgegengesetzt sein.

2. Zusammensetzung mehrerer an demselben Punkte angreifender Kräfte (Abb. 2).

Man vereinige zunächst P_1 und P_2 nach dem unter 1 angegebenen Verfahren zu der Mittelkraft R_1, darauf R_1 und P_3 zu R_2 und schließlich R_2 und P_4 zu R (Abb. 2a). Die Strecken R_1 und R_2 kann man auch bei Zeichnung des Kräftezuges fortlassen. Es genügt, die Kräfte P_1 bis P_4 nach Größe, Richtung und Sinn aneinander zu reihen. Die Mittelkraft von P_1, P_2, P_3 und P_4 ist sodann die Schlußlinie $\overline{ab}$ des Kräftezuges, deren Pfeilsinn dem Sinn der Kräfte P_1 bis P_4 entgegen gerichtet sein muß. Die Reihenfolge der Kräfte P ist dabei gleichgültig.

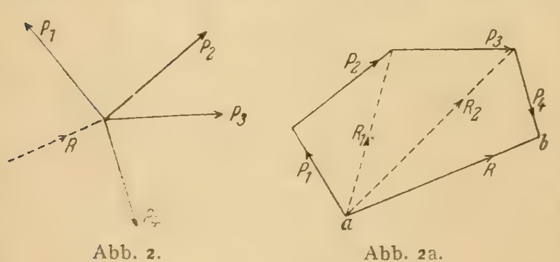


Abb. 2. Abb. 2a.

Würde in demselben Punkte m noch eine Kraft P_5 angreifen, die parallel und gleich R ist (Abb. 3), so hat der Kräftezug (Abb. 3a) keine Schlußlinie.

Die Mittelkraft der Kräfte P_1 bis P_5 ist daher gleich Null. Die Kräfte P halten sich dann das Gleichgewicht, denn die Summe ihrer Seitenkräfte nach einer beliebigen Richtung ist gleich Null — eine für ebene Kräftesysteme geltende Gleichgewichtsbedingung (Abb. 3a). In diesem Falle haben die Kräfte P einen stetigen Umfahrungssinn.

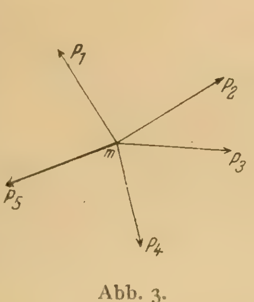


Abb. 3.

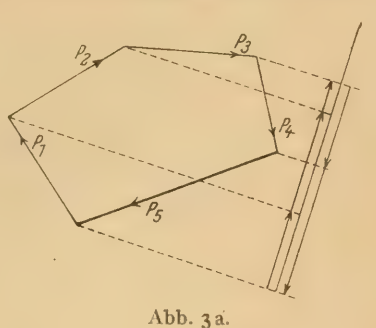


Abb. 3a.

3. Zusammensetzung von Kräften mit beliebigem Angriffspunkt (Abb. 4).

Zerlegt man P_1 in zwei beliebig gerichtete Seitenkräfte P_1' und P_1'', desgl. P_2 in die Seitenkräfte P_2' und P_2'' (Abb. 4a), so heben sich P_1'' und P_2'' auf, und die Mittelkraft R von P_1 und P_2 fällt zusammen mit der Mittelkraft von P_1' und P_2', die anderseits durch den Schnittpunkt der Seitenkräfte P_1' und P_2' gehen muß (Abb. 4). Da die Richtungen von P_1' und P_2' ganz beliebig gewählt wurden, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion zur Bestimmung der Größe, Richtung und Lage der Mittelkraft R von P_1 und P_2:

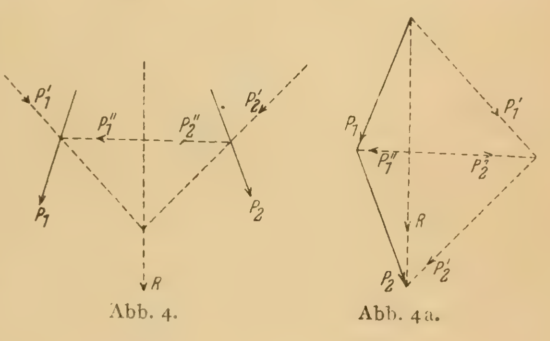


Abb. 4. Abb. 4a.

Man reihe die Kräfte P_1 und P_2 in einem beliebigen Kräftemaßstab nach Größe und Richtung aneinander und bestimme wie unter 2 ihre Mittelkraft R. Alsdann wähle man einen beliebigen Pol O und zeichne die Polstrahlen 1, 2 und 3 (Abb. 5a). Zu diesen Polstrahlen zeichne man dann die parallelen Seilstrahlen I, II und III (Abb 5) und bringe den ersten und letzten Seilstrahl (I und III) zum Schnitt. Die Mittelkraft R muß sodann durch diesen Schnittpunkt gehen, und zwar parallel zu der in Abb. 5a ermittelten Richtung von R.

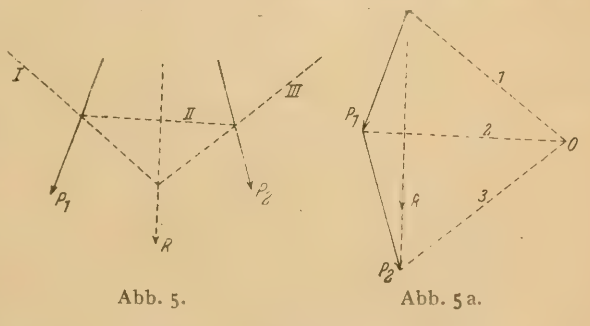


Abb. 5. Abb. 5a.

Der in Abb. 5a gezeichnete Kräftezug heißt das Kräftepolygon, während die Seilstrahlen I, II und III das Seilpolygon bilden.

In den Abb. 6 u. 6a ist die Konstruktion für eine beliebige Anzahl von schrägen Kräften P durchgeführt, in den Abb. 7 u. 7a für parallele Kräfte.

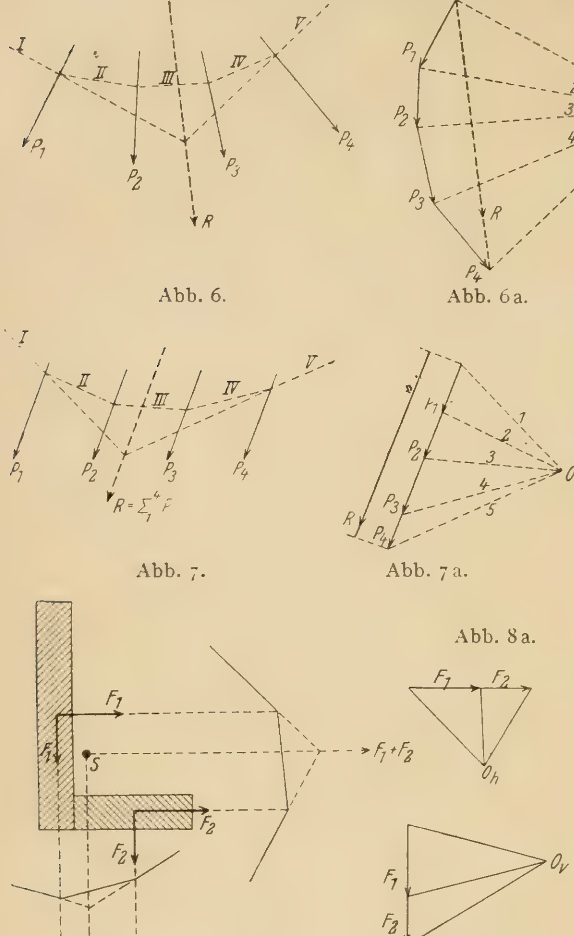


Abb. 6. Abb. 6a. Abb. 7. Abb. 7a. Abb. 8. Abb. 8a. Abb. 8b.

Der letztere Fall ist besonders wichtig für die Schwerpunktsbestimmung von Flächen. Gesucht sei z. B. die Schwerpunktslage des in Abb. 8 dargestellten Winkeleisenquerschnitts. Wir zerlegen den Querschnitt in zwei Rechtecke und fassen deren Flächeninhalte als parallele Kräfte auf, die einmal in wagerechter, dann in senkrechter Richtung wirken (an Stelle der wagerechten und senkrechten Richtung können auch zwei beliebige andere Richtungen gewählt werden). Alsdann bestimmen wir mit Hilfe des in Abb. 7 angegebenen Verfahrens für beide Fälle die Lage der Mittelkraft $F_1 + F_2$, womit die senkrechte und wagerechte Schwerlinie des Winkeleisenquerschnitts gefunden ist. Beide schneiden sich in dessen Schwerpunkt S.

4. Bestimmung dreier, nicht durch denselben Punkt gehender, der Lage nach bekannter Kräfte T_1, T_2 und T_3, welche einer gegebenen Kraft R das Gleichgewicht halten (Abb. 9).

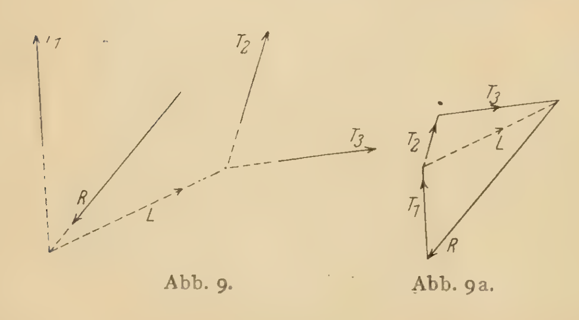


Abb. 9. Abb. 9a.

Wir denken uns zwei von den unbekannten Kräften T, z. B. T_2 und T_3, zu einer Mittelkraft L vereinigt, die durch den Schnittpunkt von T_2 und T_3 gehen muß. Dann müssen sich R, T_1 und L das Gleichgewicht halten. Drei Kräfte können aber nur dann im Gleichgewicht

sein, wenn sie sich in einem Punkt schneiden. Dadurch ist die Richtung der Mittelkraft L bestimmt, die einerseits durch den Schnittpunkt von T_2 und T_3 gehen und sich anderseits mit R und T_1 in demselben Punkt schneiden muß. Nunmehr wird R nach den Richtungen von L und T_1 und L nach den Richtungen seiner Seitenkräfte T_2 und T_3 zerlegt (Abb. 9a). Da die Kräfte R, T_1, T_2 und T_3 sich das Gleichgewicht halten sollen, müssen sie in dem Kräftepolygon stetigen Umfahrungssinn haben.

Die eindeutige Zerlegung einer Kraft nach mehr als drei Richtungen, die mit ihr in derselben Ebene liegen, ist nicht möglich. Für diese Aufgabe lassen sich unendlich viele Lösungen angeben.

5. Bestimmung des statischen Momentes durch das Seilpolygon.

Unter dem statischen Moment einer Kraft P in bezug auf einen Drehpunkt (Momentenpol) m versteht man das Produkt aus P und seinem winkelrechten Abstand c von m (Abb. 10), d. h. $M = P \cdot c$. Man pflegt das Moment positiv anzunehmen, wenn es oben um den Momentenpol, und negativ, wenn es unten um den Momentenpol herumdreht. So ist z. B. nach Abb. 10 $M = + P \cdot c$ und nach Abb. 10a $M = -P' \cdot c'$.

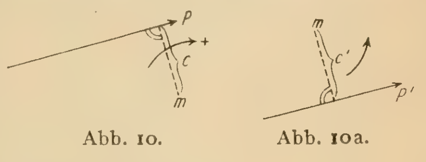


Abb. 10. Abb. 10a.

Mit Hilfe des Seilpolygons läßt sich nun das Moment einer Kraft P in bezug auf einen Momentenpol m folgendermaßen angeben: Man trage die Kraft P in irgend einem Maßstabe nach Größe und Richtung auf, wähle einen beliebigen Pol O, zeichne die Polstrahlen 1 und 2 und die dazu parallelen Seilstrahlen I und II (Abbild. 11 u. 11a). Zieht man dann durch den Momentenpol m eine Parallele zu P (Abb. 11a) und bestimmt die Strecke b, die von den Seilstrahlen I und II auf dieser Parallelen abgeschnitten wird, dann ist $\triangle\, OAB \sim \triangle\, O'A'B'$, und in den beiden ähnlichen Dreiecken muß sich verhalten $\frac{P}{b} = \frac{H}{c}$, mithin $P \cdot c = H \cdot b = M$. Man kann daher folgenden Satz aussprechen:

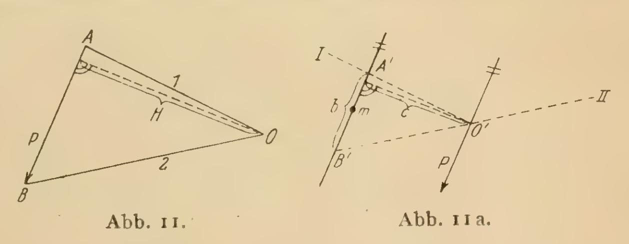
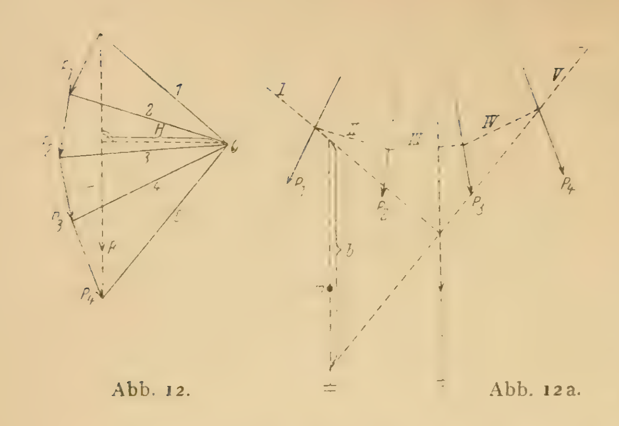


Abb. 11. Abb. 11a.

Das statische Moment einer Kraft P in bezug auf einen Momentenpol m ist gleich dem Produkt aus dem Abstand des Poles O von der Kraft P im Kräftepolygon (Polweite) und derjenigen Strecke, welche durch die beiden sich auf P schneidenden Strahlen des Seilpolygons von der durch den Momentenpol m zu P gezogenen parallelen Linie abgeschnitten wird.

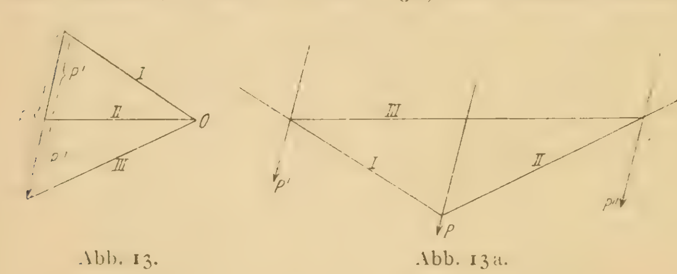
In derselben Weise hat man zu verfahren, wenn es sich um die Bestimmung des statischen Momentes von mehreren in derselben Ebene liegenden


Abb. 12. Abb. 12a.

Kräften P in bezug auf einen Momentenpol m handelt (Abb. 12 u. 12a). Man bestimmt zunächst, wie unter 3 angegeben, die Mittelkraft R der Kräfte P und findet dann durch sinngemäße Anwendung des für eine Kraft P hergeleiteten Verfahrens für das Moment der Mittelkraft R in bezug auf den Punkt m $M = H \cdot b$.

6. Zerlegung einer Kraft P in zwei parallele Seitenkräfte.

Man verbinde die drei Kräfte durch ein beliebiges Seilpolygon mit den Seiten I, II und III (Abb. 13a) und zeichne durch die Endpunkte von P Parallele zu I und II, deren Schnittpunkt den Pol O bilden (Abb. 13). Die durch O zum Seilstrahl III gezogene Parallele schneidet dann von P die Seitenkräfte P' und P'' ab.


Abb. 13. Abb. 13a.

Zum Beweise vereinige man P' und P'' zu einer Mittelkraft. Nach dem unter 5 abgeleiteten Verfahren ist diese $P' + P'' = P$ und geht durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I und II.

7. Bestimmung zweier der Lage nach gegebener Kräfte A und B, welche den ihnen parallelen Kräften P_1, P_2 und P_3 das Gleichgewicht halten (Abb. 14).

Ist z. B. ein Balken auf zwei Stützen mit den senkrechten Kräften P_1, P_2 und P_3 belastet, so rufen diese Lasten die senkrechten Auflagerdrücke A und B hervor, die den Kräften P_1, P_2 und P_3 das Gleichgewicht halten müssen. Man bestimmt nun zunächst nach dem unter 5 angegebenen Verfahren die Größe und Lage der Mittelkraft R,

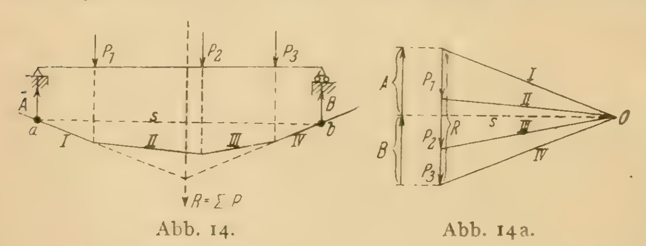


Abb. 14. Abb. 14a.

indem man die Kräfte P_1, P_2 und P_3 aneinander reiht, einen beliebigen Pol O wählt und ein Seilpolygon zeichnet. Durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen I und IV muß dann die Mittelkraft R gehen. Nunmehr wird R

wie unter 6 in die Seitenkräfte A und B zerlegt, indem man die äußersten Seilstrahlen I und IV mit A und B in a und b zum Schnitt bringt, die Schlußlinie $s = ab$ zeichnet und durch den Pol O des Kräftepolygons eine Parallele zu s zeichnet, die dann von der Mittelkraft R die Seitenkräfte A und B abschneidet.

8. Bestimmung des Biegungsmoments für den Punkt m eines mit senkrechten Kräften P belasteten Balkens auf zwei Stützen (Abb. 15).

Man versteht unter dem Biegungsmoment für den Punkt m eines Balkens die Summe der statischen Momente aller links oder rechts von m wirkenden äußeren Kräfte. Als positive Momente gelten die oben um den Punkt m herumdrehenden Momente. Daher ist entweder

$$M_m = + A \cdot x_m - P_1 \cdot a_m$$

oder

$$M_m = + B \cdot x'_m - P_2 \cdot b_m - P_3 \cdot c_m.$$

Man berechnet zweckmäßig das Moment von der Seite aus, an der die wenigsten Kräfte wirken, also nach Abb. 15 von der linken Seite aus, als Summe der statischen Momente der Kräfte A und P_1.

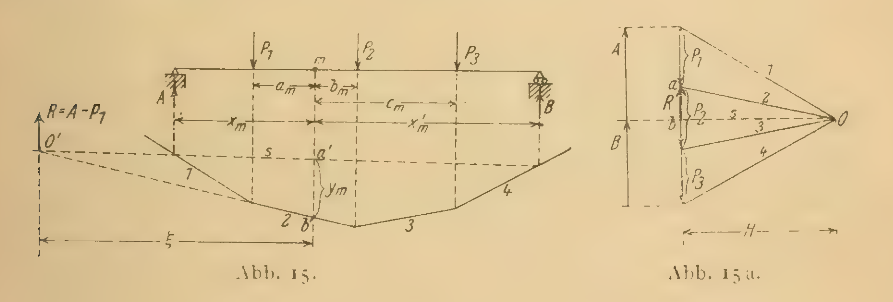


Abb. 15. Abb. 15a.

Die Mittelkraft von A und P_1 ist $R = A - P_1$. Den Auflagerdruck A findet man zunächst nach 7 mit Hilfe eines mit beliebiger Polweite gezeichneten Seilpolygons. Die durch den Pol O zur Schlußlinie s gezogene Parallele schneidet von der Mittelkraft der Kräfte P_1, P_2 und P_3 die Auflagerdrücke A und B ab. Ferner muß die Mittelkraft R von A und P_1 nach 3 durch den Schnittpunkt der äußersten Seilstrahlen des zu den Kräften A und P_1 gezeichneten Seilpolygons gehen. Zu den Kräften A und P_1 gehören die Polstrahlen s, 1 und 2 (Abb. 15a) und die dazu parallelen Seilstrahlen s, 1 und 2 (Abb. 15). Mithin muß R durch den Schnittpunkt der Seilstrahlen s und 2 gehen. Da nun das statische Moment der Seitenkräfte A und P_1 gleich dem statischen Moment ihrer Mittelkraft R sein muß, so ist

$$\boldsymbol{R} \cdot \xi = A \cdot x_m - P_1 \cdot a_m = \boldsymbol{M_m}.$$

In den ähnlichen Dreiecken Oab und $O'a'b'$ muß sich verhalten

$$\frac{R}{H} = \frac{y_m}{\xi}, \text{ so daß } \boldsymbol{H \cdot y_m} = R \cdot \xi = \boldsymbol{M_m}.$$

Das Biegungsmoment für den Punkt m eines einfachen Balkens ist daher das Produkt aus der Polweite des Kräftepolygons und der auf die Schlußlinie s bezogenen Ordinate y_m des Seilpolygons.

9. Die Kräftepläne Cremonas.

Führt man einen Schnitt um einen Knotenpunkt eines unter der Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewicht befindlichen Fachwerks und ersetzt die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte, so müssen die an dem abgetrennten Knoten wirkenden Kräfte nach wie vor miteinander im Gleichgewicht sein, sich also zu einem geschlossenen Polygon mit stetigem Umfahrungssinn zusammensetzen lassen. Sind dann nur zwei von den an dem Knotenpunkt wirkenden Kräften unbekannt, so kann man die übrigen bekannten Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigen und nach den Richtungen der beiden unbekannten Kräfte zerlegen, womit diese bestimmt sind. Die Reihenfolge der aneinander zu setzenden Kräfte ist dabei gleichgültig. Jedoch empfiehlt es sich zwecks Erzielung eines möglichst einfachen Kräfteplans, die an einem Knotenpunkt angreifenden Kräfte stets in der Reihenfolge aneinander zu reihen, in der man ihnen bei Umkreisung des Knotenpunkts im Uhrzeigersinn begegnet. Hierbei sind die äußeren Kräfte immer außerhalb der Gurtungen wirkend zu denken (wie in Abb. 17).

Sind z. B. (vergl. Abb. 16) an einem Knotenpunkt die Kräfte S_1, S_2 und P bekannt, so reihen wir zunächst die Kräfte S_1, S_2 und P nach Größe und Richtung aneinander, wodurch ihre Mittelkraft R als Schlußlinie des Kräftezuges bekannt ist und zerlegen dann R nach den Richtungen von S_3 und S_4. Die Reihenfolge der Kräfte in dem Kräftepolygon ist dabei so zu wählen, wie sie durch den von der ersten gegebenen Kraft S_1 aus um den Knotenpunkt geführten Schnitt vorgezeichnet ist. Die Kräfte sind also in der Reihenfolge S_1, S_2, P, S_3 und S_4 aneinander zu setzen, wobei die Pfeile so anzuordnen sind, daß ein stetiger Umfahrungssinn entsteht. In Abb. 16 ist angenommen, daß S_1 eine Zugkraft, S_2 eine Druckkraft ist. Die Pfeile der Zugkräfte müssen dann vom Knotenpunkt fort, die Pfeile der Druckkräfte auf den Knotenpunkt zu gerichtet sein. Überträgt man die in Abb. 16a gefundenen Pfeile auf den abgetrennten Knoten, so ergeben sich S_3 und S_4 als Druckkräfte, weil beide auf den Knotenpunkt zu wirken. Es empfiehlt sich, um einen möglichst übersichtlichen Kräfteplan zu erhalten, die Mittelkraft R aus dem Kräftepolygon fortzulassen, da sie überflüssig ist.

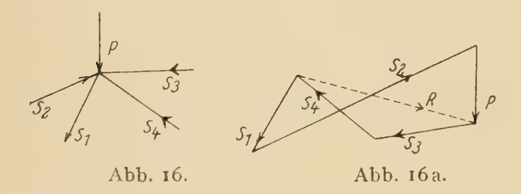


Abb. 16. Abb. 16a.

Nach diesen Regeln ist der in Abb. 17a dargestellte Kräfteplan für den Dachbinder in Abb. 17 entstanden, der nachstehend kurz erläutert werden möge.

Wir führen zunächst einen Schnitt um den Knotenpunkt a, an dem die gegebenen Kräfte $A = 3P$ und $\frac{P}{2}$ den Stabkräften 1 und 2 das Gleichgewicht halten müssen. Wir legen daher durch den Anfangspunkt der nach oben wirkenden Kraft $A - \frac{P}{2}$ eine Parallele zu 2, durch den Endpunkt eine Parallele

zu 1. Dann bilden die Kräfte $A - \frac{P}{2}$, 1 und 2 einen Kräftezug, dessen Umfahrungssinn ein stetiger sein muß, weil die Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Überträgt man dann die Pfeilrichtungen der Kräfte 1 und 2 auf den abgetrennten Knoten *a*, so findet man, daß 1 auf den Knoten zu, 2 vom Knoten fort wirkt. 1 ist daher eine Druckkraft, 2 eine Zugkraft. Nunmehr denken wir uns den Knoten *b* herausgeschnitten. An diesem müssen sich die gegebenen Kräfte 1 und *P* mit den Kräften 3 und 4 das Gleichgewicht halten. An dem Knoten *a* hatten wir festgestellt, daß 1 eine Druckkraft ist, weil ihre Pfeilrichtung auf den Knoten *a* zuweist. An dem Knoten *b* muß daher der Pfeil von 1 ebenfalls auf den Knoten *b* hinweisen. Dann kann man 1 und *P* zu einer Mittelkraft vereinigen, die gleich der Schlußlinie des Kräftezuges von 1 und *P* ist und in dem Kräfteplan, weil überflüssig, nicht gezeichnet wurde. Durch den Anfangspunkt des Kräftezuges legen wir dann eine Parallele zu 4, durch den Endpunkt eine Parallele zu 3 und bestimmen die Pfeilrichtungen der vier Kräfte derart, daß der Umfahrungssinn ein stetiger ist. Überträgt man die Pfeilrichtungen der Kräfte 3 und 4 auf den abgetrennten Knoten *b*, so erkennt man, daß beide Kräfte auf den Knoten zu wirken, also Druckkräfte sind. In derselben Weise verfahre man dann noch an den Knotenpunkten *c*, *d* und *e*. Wegen der Symmetrie braucht die andere Hälfte des Kräfteplans nicht gezeichnet zu werden.

Abb. 17.

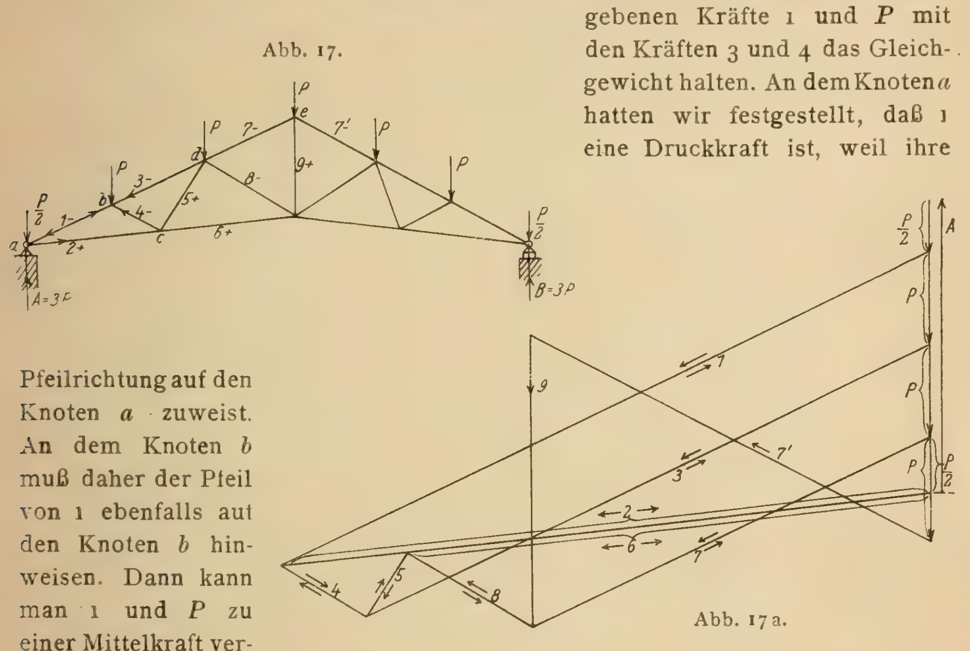


Abb. 17a.

Kräfteplan für den in Abb. 18 dargestellten Hallenbinder.

Der untere Teil des Binders sei vollwandig, der obere fachwerkartig. Hier liegen die Verhältnisse insofern anders wie bei dem Dachbinder nach Abb. 17, als an dem Auflagerknotenpunkt keine Stäbe vorhanden sind, die sich mit der Auflagerkraft in einem Punkt schneiden, so daß der Kräfteplan nicht mehr mit der Zerlegung einer gegebenen Kraft nach zwei Richtungen begonnen werden kann. Wir verfahren daher folgendermaßen:

Durch den Schnitt $t - t$, der die Stäbe 1, 2 und 3 trifft, zerlegen wir das System in zwei Teile. Denken wir uns die vom Schnitt getroffenen Stäbe

durch ihre Spannkräfte ersetzt, so muß jeder Teil für sich im Gleichgewicht sein. Wir untersuchen nun den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils, an dem sich die gegebene Auflagerkraft $A = \frac{7}{2} P$, ferner die unbekannten Stabkräfte 1, 2 und 3 das Gleichgewicht halten müssen. Wir haben daher die Aufgabe zu lösen, eine gegebene Kraft nach drei gegebenen Richtungen zu verlegen, eine Aufgabe, die bereits unter 4 auf Seite 4 behandelt wurde. Denken wir uns die Kräfte 1 und 2 zu einer Mittelkraft L vereinigt, die durch den Schnittpunkt von 1 und 2 gehen muß, so sind nur noch drei Kräfte vorhanden, nämlich A, L und 3. Da diese Kräfte miteinander im Gleichgewicht sind, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden. Die Mittelkraft L muß also sowohl durch den Schnittpunkt ihrer Seitenkräfte 1 und 2 als auch durch den Schnittpunkt von A und 3 gehen, wodurch die Richtung von L bestimmt

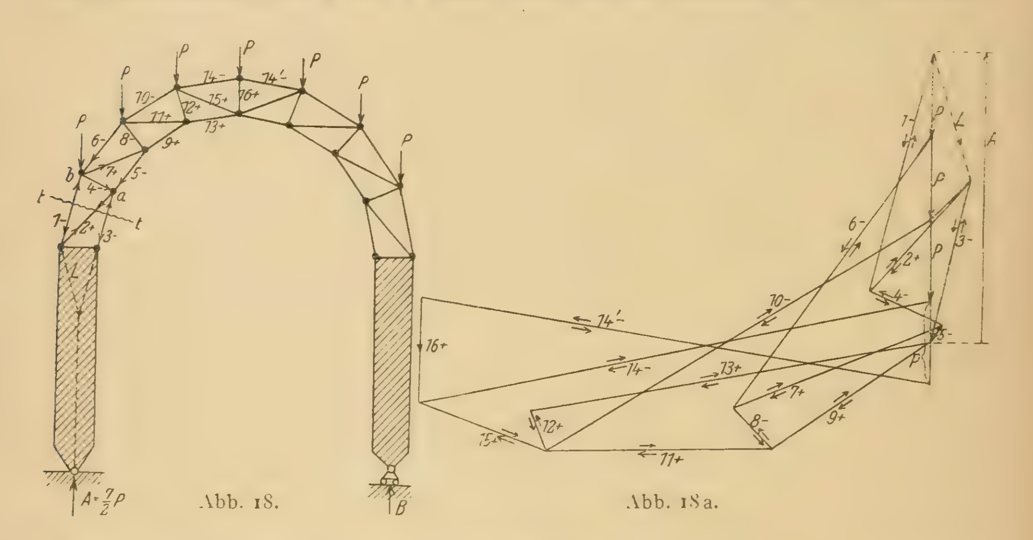


Abb. 18. Abb. 18a.

ist. Nunmehr zerlegen wir A nach den Richtungen von L und 3 und darauf L nach den Richtungen der Seitenkräfte 1 und 2. Der Umfahrungssinn der vier Kräfte A, 1, 2 und 3 muß ein stetiger sein, weil diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Überträgt man die Pfeilrichtungen der Kräfte 1, 2 und 3 auf den links abgetrennten Teil, dessen Gleichgewichtszustand der Berechnung der Kräfte zugrunde gelegt wurde, so erkennt man, daß 1 und 3 auf den abgetrennten Teil zu, 2 von ihm fort wirken, daß also 1 und 3 Druckkräfte sind, während 2 eine Zugkraft ist.

Nunmehr wird der Knoten a herausgeschnitten. Die an ihm wirkenden Kräfte 3, 2, 4 und 5 werden dann zu einem Kräftezuge mit stetigem Umfahrungssinn zusammengesetzt, wobei darauf zu achten ist, daß die Pfeile der Kräfte 3 und 2 als Druck- bezw. Zugpfeile in bezug auf den Knoten a anzubringen sind. Der Pfeilsinn von 3 muß also auf den Knoten zu, derjenige von 2 von dem Knoten fort wirken. Überträgt man die für 4 und 5 gefundenen Pfeile auf den abgetrennten Knoten a, so findet man, daß beide Kräfte Druckkräfte sind, weil beide Pfeile auf den Knoten zu wirken.

Trennt man dann den Knoten *b* heraus, so erkennt man, daß sich an diesem Knoten die Kräfte 4, 1, *P*, 6 und 7 das Gleichgewicht halten, also einen Kräftezug mit stetigem Umfahrungssinn bilden müssen. Die Pfeile von 4 und 1 müssen dabei als Druckpfeile auf den Knoten *b* zu wirkend angenommen werden. Aus dem Kräftezug ergibt sich dann, daß der Pfeil von 6 auf den Knoten zu, derjenige von 7 vom Knoten fort wirkt, daß also 6 eine Druckkraft, 7 eine Zugkraft ist.

In dieser Weise fährt man dann der Reihe nach an den Knoten *c*, *d*, *e*, *f* und *g* weiter fort. Wegen der Symmetrie braucht der Plan nur für die eine Systemhälfte durchgeführt zu werden.

II. Abschnitt.

Die Spannungstheorie.

§ 2. Die Querschnittsmomente 2. Ordnung.

Gegeben sei ein Querschnitt vom Flächeninhalt F und dessen Schwerpunkt S (Abb. 19). Irgend ein Flächenelement df sei bezogen auf das Achsensystem $X - Y$. Man nennt dann $\int y^2 \cdot df$ das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die X-Achse. $\int x^2 \cdot df$ heißt das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die Y-Achse. Endlich ist $\int x \cdot y \cdot df$ das Zentrifugalmoment des Querschnitts in bezug auf das Achsensystem $X - Y$.

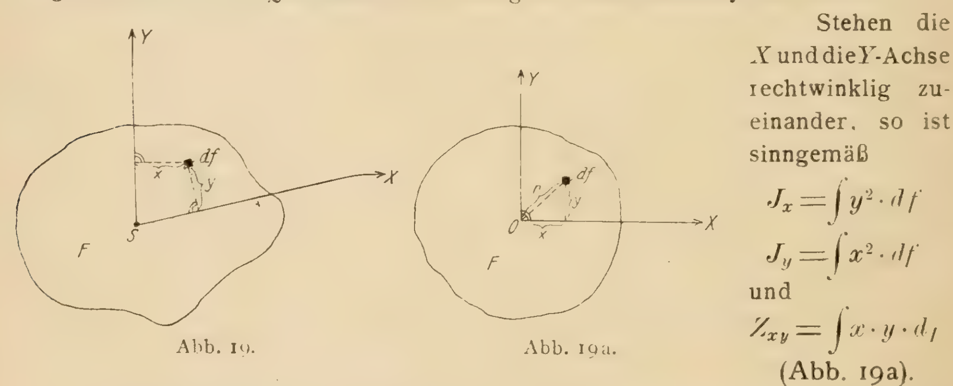


Abb. 19.

Abb. 19a.

Stehen die X und die Y-Achse rechtwinklig zueinander, so ist sinngemäß

$$J_x = \int y^2 \cdot df$$

$$J_y = \int x^2 \cdot df$$

und

$$Z_{xy} = \int x \cdot y \cdot df$$

(Abb. 19a).

J_x und J_y heißen die äquatorialen Trägheitsmomente im Gegensatz zu dem polaren Trägheitsmoment, das durch den Ausdruck $J_p = \int r^2 \cdot df$ definiert und auf die durch O gehende, auf dem Querschnitt senkrecht stehende Achse bezogen ist. Da $r^2 = x^2 + y^2$,
so ist

$$J_p = \int (x^2 + y^2)\, df = \int x^2 \cdot df + \int y^2 \cdot df = J_y + J_x.$$

Das polare Trägheitsmoment ist daher gleich der Summe der beiden äquatorialen, wenn diese auf zwei zueinander senkrecht gerichtete Achsen bezogen sind.

Da diese Ausdrücke die statischen Momente 2. Ordnung von Flächen darstellen, so nennt man sie auch Querschnittsmomente 2. Ordnung. Ihre Dimension ist $m^2 \cdot m^2$ bezw. $m \cdot m \cdot m^2$, d. h. m^4.

Derartige Ausdrücke werden bei statischen Untersuchungen von Baukonstruktionen oft wiederkehren und sollen deshalb für die am häufigsten vorkommenden Querschnitte berechnet werden.

Nachstehende Hilfssätze werden die Berechnung in vielen Fällen erleichtern:

1. Trennt man vom Gesamtquerschnitt F den Teil F_1 ab und verschiebt ihn parallel zu der Achse, für welche das Trägheitsmoment des Querschnitts berechnet werden soll (Abb. 20), so ist nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts F gleich der Summe der Trägheitsmomente der Teilquerschnitte F_1 und F_2. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht einzusehen; denn das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf die X-Achse ist gleich $\int \eta^2 \cdot df$, und die Abstände η der einzelnen Flächenelemente des verschobenen Querschnittteils von der X-Achse haben durch die Parallelverschiebung keinerlei Änderung erfahren. Man kann daher setzen

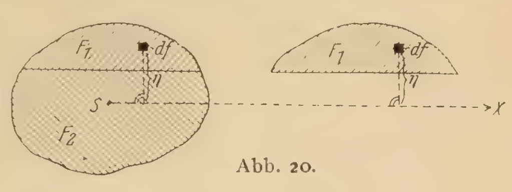


Abb. 20.

$$J_x^F = J_x^{F_1} + J_x^{F_2}.$$

Ebenso gilt natürlich mit bezug auf Abb. 21 die Gleichung

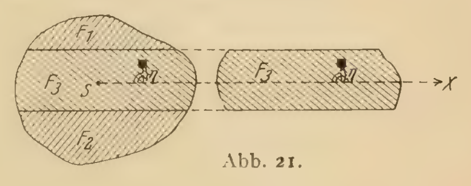


Abb. 21.

$$J_x^{F_1+F_2} = J_x^F - J_x^{F_3},$$

wenn $F = F_1 + F_2 + F_3$ ist.

2. Gegeben sei das Trägheitsmoment J_x in bezug auf die durch den Schwerpunkt S gehende X-Achse, gesucht sei J_{x_1} in bezug auf die im Abstand a parallel zur X-Achse verlaufende X_1-Achse (Abb. 22).

Gemäß der Definition des Trägheitsmoments ist

$$J_{x_1} = \int y_1^2 \cdot df = \int (y + a)^2 \, df$$
$$= \int (y^2 + 2\, a \cdot y + a^2) \, df$$
$$= \int y^2 \cdot df + 2\, a \int y \cdot df + a^2 \int df.$$

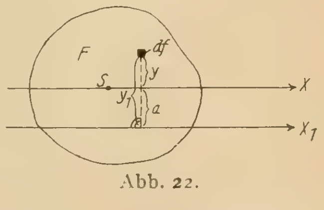


Abb. 22.

Hierin ist $\int y \cdot df$ das statische Moment des Querschnitts in bezug auf die X-Achse; denn da $df \cdot y$ das statische Moment eines Flächenelements df in bezug auf diese Achse ist, so ist $\int df \cdot y$ das statische Moment aller der unendlich vielen Flächenmomente df, d. h. das statische Moment des ganzen Querschnitts in bezug auf die X-Achse. Da diese aber nach Voraussetzung Schwerachse und das statische Moment eines Querschnitts in bezug auf seine eigene Schwerachse gleich Null ist, so folgt $\int y \cdot df = 0$.

Ferner ist $\int df = F$ und $\int y^2 \cdot df = J_x$. Somit ergibt sich

$$\boldsymbol{J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot F.}$$

Eine ähnliche Beziehung läßt sich auch für das Zentrifugalmoment herleiten (Abb. 23).

Für das dem Schwerachsensystem $X - Y$ parallele Achsensystem $X_1 - Y_1$ ist

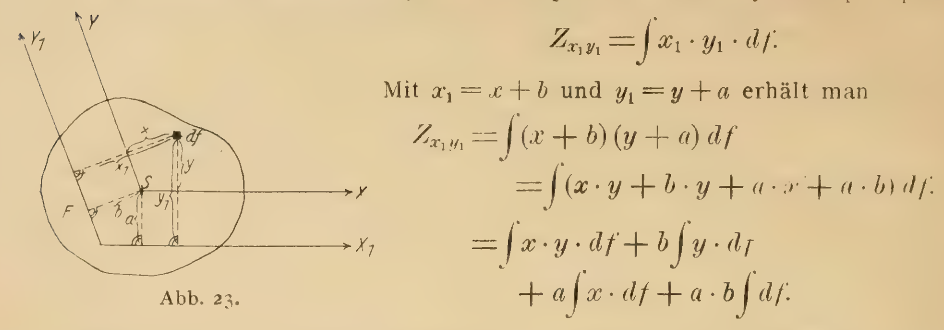


Abb. 23.

$$Z_{x_1 y_1} = \int x_1 \cdot y_1 \cdot df.$$

Mit $x_1 = x + b$ und $y_1 = y + a$ erhält man

$$Z_{x_1 y_1} = \int (x + b)(y + a)\, df$$
$$= \int (x \cdot y + b \cdot y + a \cdot x + a \cdot b)\, df.$$
$$= \int x \cdot y \cdot df + b \int y \cdot df$$
$$+ a \int x \cdot df + a \cdot b \int df.$$

Hierin ist $\int x \cdot y \cdot df = Z_{xy}$ und $\int df = F$. $\int y \cdot df$ und $\int x \cdot df$ sind die statischen Momente des Querschnitts in bezug auf die X- bezw. Y-Achse. Da diese Achsen nach Voraussetzung Schwerachsen sind und das statische Moment einer Fläche in bezug auf eine Schwerachse gleich Null ist, so werden $\int y \cdot df$ und $\int x \cdot df$ gleich Null. Demgemäß erhält man die Gleichung

$$\mathbf{Z_{x_1 y_1} = Z_{xy} + a \cdot b \cdot F.}$$

3. Das Zentrifugalmoment eines Querschnitts in bezug auf ein Symmetrieachsensystem ist gleich Null.

Ein Symmetrieachsensystem besteht aus zwei Achsen, von denen mindestens eine derart gerichtet sein muß, daß jede Parallele zu ihr durch die andere Achse (Symmetrieachse) und die Umhüllungslinie des Querschnitts in zwei gleiche Teile zerlegt wird.

Man unterscheidet gerade (Abb. 24) und schiefe Symmetrie (Abb. 25), je

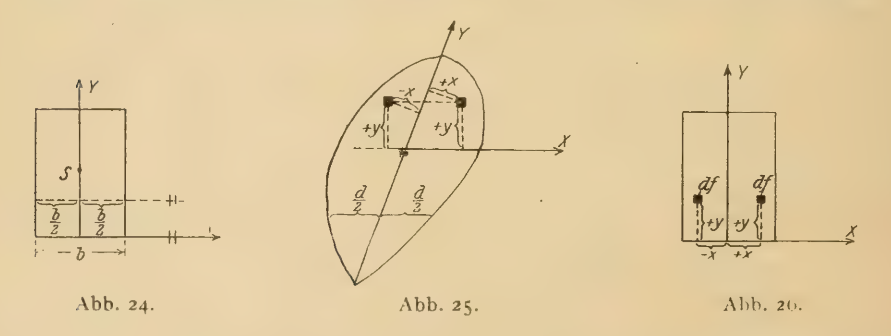


Abb. 24. Abb. 25. Abb. 26.

nachdem die beiden Achsen einen rechten oder einen spitzen Winkel miteinander einschließen.

Der Beweis für die unter 3 aufgestellte Behauptung möge am rechteckigen Querschnitt gezeigt werden (Abb. 26):

Zwei symmetrisch gelegene Flächenelemente df haben die Koordinaten $+x$, $+y$ bezw. $-x$, $+y$; der Beitrag dieser Flächenelemente zum Zentrifugalmoment ist daher

$$dZ_{xy} = (+x) \cdot (+y)\, df + (-x) \cdot (+y)\, df = 0.$$

Mithin ist $$Z_{xy} = \int dZ_{xy} = 0.$$

Das gleiche gilt, wie leicht einzusehen ist, auch für den schief symmetrischen Querschnitt (Abb. 25).

Bemerkenswert ist, daß es zum Verschwinden des Zentrifugalmoments genügt, wenn nur eine Achse des Symmetrieachsensystems eine Symmetrieachse ist.

Zwei derartige Achsen, für welche das Zentrifugalmoment gleich Null ist, heißen **konjugierte**, d. h. **einander zugeordnete Achsen.**

Bezüglich des Vorzeichens der Querschnittsmomente 2. Ordnung ist noch zu bemerken, daß die Trägheitsmomente als quadratische Ausdrücke nur positiv, die Zentrifugalmomente jedoch auch negativ werden können.

Beispiele.

a) Der rechteckige Querschnitt (Abb. 27).

Wir schneiden ein unendlich kleines Flächenelement vom Flächeninhalt $df = b \cdot dy$ im lotrechten Abstand y von der X-Achse aus dem Querschnitt heraus und erhalten

$$J_x = \int y^2 \cdot df = \int y^2 \cdot b \cdot dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy$$

$$= 2b \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{2}{3} \cdot b \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Y, X, X₁, S, dy, y, h, b, h/2, h/2

Abb. 27.

Sinngemäß wird $$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

$Z_{xy} = 0$, weil das Achsensystem $X - Y$ ein Symmetrieachsensystem ist.

Ferner ist nach dem unter 2 angegebenen Satz

$$J_{x_1} = J_x + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h^2}{4} \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3}.$$

Entsprechend wird $$J_{y_1} = \frac{h\, b^3}{3}.$$

b) Der Kreisquerschnitt (Abb. 28).

$$J_x = \int y^2\, df = \int y^2 \cdot 2x \cdot dy.$$

Setzt man $y = r \sin \varphi$, also $dy = r \cdot \cos \varphi\, d\varphi$ und $x = r \cos \varphi$, so wird

$$J_x = 2 \cdot r^4 \int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi.$$

Da $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ und $\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\varphi$, so ist

$$J_x = 2r^4 \int \left(\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi\right) d\varphi = \frac{r^4}{2} \int \sin^2 2\varphi \cdot d \cdot \varphi.$$

Setzt man $2\varphi = n$, also $d \cdot \varphi = \frac{dn}{2}$, so wird

$$J_x = \frac{r^4}{4} \int \sin^2 n \cdot dn.$$

Zur Berechnung von $\int \sin^2 n \cdot dn$ setze man

$$\cos^2 n + \sin^2 n = 1$$
$$\cos^2 n - \sin^2 n = \cos 2n$$
$$- \quad + \quad -$$
$$2 \sin^2 n = 1 - \cos 2n$$
$$\sin^2 n = \frac{1}{2}(1 - \cos 2n).$$

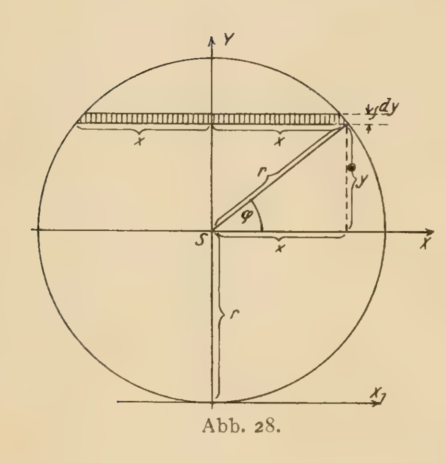


Abb. 28.

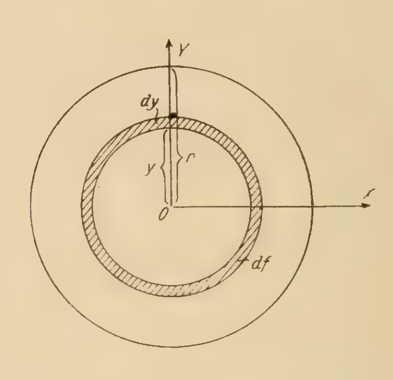


Abb. 28a.

Mithin ist

$$J_x = \frac{r^4}{4} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2n)\, dn = \frac{r}{8} \int (1 - \cos 2n) \cdot dn$$
$$= \frac{r^4}{8} \left(\int dn - \int \cos 2n \cdot dn \right) = \frac{r^4}{8} \left(n - \int \cos 2n \cdot dn \right).$$

Setzt man $2n = v$, $n = \frac{v}{2}$, $dn = \frac{1}{2} \cdot dv$, so wird

$$\int \cos 2n \cdot dn = \frac{1}{2} \int \cos v \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \sin v = \frac{1}{2} \cdot \sin 2n.$$

Mit $n = 2\varphi$ erhält man daher

$$J_x = \frac{r^4}{8} \left[2\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin 4\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{r^4}{8} \left[2\varphi - \frac{1}{2} \cdot \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{r^4}{4} \left[2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{r^4}{4} \left[\pi - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\pi \right].$$

Da $\sin 2\pi = 0$ ist, so wird

$$\boldsymbol{J_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = J_y.}$$

Z_{xy} ist wieder gleich Null, weil die Achsen X und Y Symmetrieachsen sind.

Für die der X-Achse parallele Achse X_1 erhält man nach dem unter 2 angegebenen Satz

$$J_{x_1} = J_x + r^2 \cdot F = \frac{\pi \cdot r^4}{4} + r^2 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{5}{4}\pi \cdot r^4.$$

Einfacher lassen sich J_x und J_y mit Hilfe der zwischen dem polaren und den beiden äquatorialen Trägheitsmomenten bestehenden Beziehung errechnen. Nach Seite 12 ist $J_p = J_x + J_y$.

J_p ist das polare Trägheitsmoment des Kreises in bezug auf die durch S gehende, senkrecht auf der Kreisfläche stehende Achse.

Schneidet man aus dem Kreise ein Flächenelement df von Kreisringform heraus (Abb. 28a), so ist

$$J_p = \int y^2 \cdot df = \int y^2 \cdot 2\pi \cdot y \cdot dy = 2\pi \int_0^r y^3 \cdot dy = 2\pi \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

Da nun

$$J_x = J_y \text{ und } J_p = J_x + J_y = 2\,J_x$$

ist, so folgt

$$J_x = \frac{J_p}{2} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{2}}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = J_y.$$

Man vermeidet auf diese Weise die immerhin etwas umständliche Berechnung des in der ersten Lösung auftretenden

$$\int \sin^2 2\,\varphi \cdot d \cdot \varphi.$$

c) Der Kreisringquerschnitt (Abb. 29).

Nach dem unter 1 angegebenen Satz ergibt sich sofort

$$J_x = \frac{\pi \cdot R^4}{4} - \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4).$$

Setzt man $R = \frac{D}{2}$ und $r = \frac{d}{2}$, so wird

$$J_x = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = J_y$$

$$Z_{xy} = 0.$$

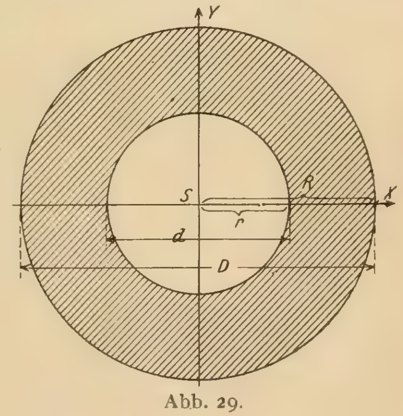


Abb. 29.

d) Der dreieckige Querschnitt (Abb. 30).

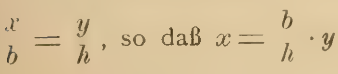
Gesucht sei J_x. Da die X-Achse keine Symmetrieachse ist, berechnet man zweckmäßig zunächst J_{x_1} und bestimmt dann das gesuchte J_x mit Hilfe der unter 2 angegebenen Gleichung

$$J_{x_1} = J_x + \left(\frac{2}{3} \cdot h\right)^2 F.$$

Hierin ist

$$J_{x_1} = \int y^2 \cdot df = \int y^2 \cdot x \cdot dy.$$

Ferner besteht die Proportion



$\frac{x}{b} = \frac{y}{h}$, so daß $x = \frac{b}{h} \cdot y$

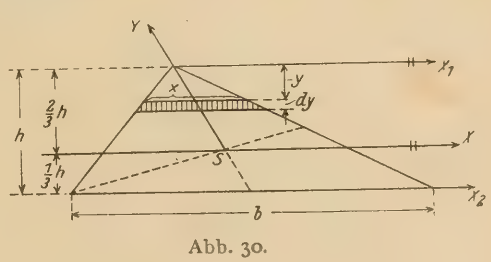


Abb. 30.

und
$$J_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h y^3 \cdot dy + \frac{b}{h}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b \cdot h^3}{4}.$$

Unter Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung
$$J_{x_1} = J_x + \left(\frac{2}{3}\cdot h\right)^2 F$$
erhält man
$$\frac{b \cdot h^3}{4} = J_x + \frac{4}{9}\cdot h^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2},$$
woraus
$$\underline{J_x} = \frac{b \cdot h^3}{4} - \frac{2}{9}\cdot b \cdot h^3 = \underline{\frac{b \cdot h^3}{36}}$$
$$J_{x_2} = J_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F = \frac{b \cdot h^3}{36} + \frac{h^2}{9}\cdot\frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{\mathbf{12}}.$$

$Z_{xy} = 0$, weil die Y-Achse Symmetrieachse ist (siehe unter 3).

e) Der I-Querschnitt (Abb. 31).

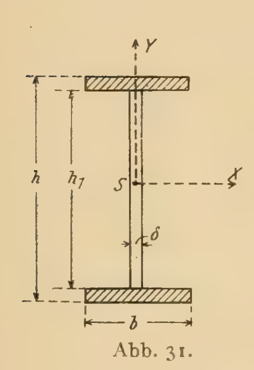


Abb. 31.

Der Querschnitt setzt sich zusammen aus den beiden Flanschquerschnitten und dem Stegquerschnitt. Demgemäß wird
$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h_1^3}{12} + \frac{\delta \cdot h_1^3}{12}$$
$$= \frac{1}{12}\left[b\,(h^3 - h_1^3) + \delta \cdot h_1^3\right],$$
$$J_y = (h - h_1)\frac{b^3}{12} + h_1 \cdot \frac{\delta^3}{12},$$
$$Z_{xy} = 0.$$

f) Der genietete Trägerquerschnitt (Abb. 32).

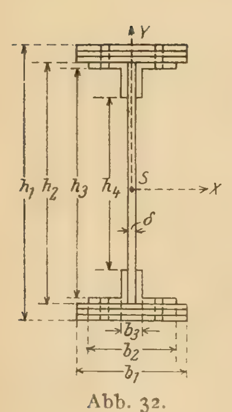


Abb. 32.

Man findet wie beim I-Querschnitt
$$J_x = \left(\frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} - \frac{b_1 \cdot h_2^3}{12}\right) + \left(\frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} - \frac{b_2 \cdot h_3^3}{12}\right)$$
$$+ \left(\frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} - \frac{b_3 \cdot h_4^3}{12}\right) + \frac{\delta \cdot h_4^3}{12} = \frac{1}{12}\left[b_1\,(h_1^3 - h_2^3)\right.$$
$$\left.+ b_2\,(h_2^3 - h_3^3) + b_3\,(h_3^3 - h_4^3) + \delta \cdot h_4^3\right].$$

Entsprechend findet man J_y.

Handelt es sich um einen auf Biegung beanspruchten Querschnitt, so sind die Nietdurchmesser der in einem senkrechten Schnitt sitzenden Niete von den Breiten b_1 und b_2 in Abzug zu bringen.
$$Z_{xy} = 0.$$

g) Der [-Querschnitt (Abb. 33).

Der Querschnitt kann als die Differenz zweier Rechteckquerschnitte von den Flächeninhalten $b_1 \cdot h_1$ und $b_2 \cdot h_2$ aufgefaßt werden. Der Schwerpunkt muß auf der X-Achse liegen, weil diese Symmetrieachse ist. Seinen Abstand von

der Y_1-Achse findet man mit Hilfe der Momentengleichung: „Das statische Moment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Y_1-Achse ist gleich der Differenz der statischen Momente der Teilquerschnitte." Die Flächeninhalte der Querschnitte werden dabei als in ihren Schwerpunkten wirkende Kräfte aufgefaßt. Es muß daher sein

$$(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2) \cdot \eta_r = b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{b_1}{2} - b_2 \cdot h_2 \cdot \frac{b_2}{2};$$

$$\eta_r = \frac{h_1 \cdot b_1^2 - h_2 \cdot b_2^2}{2(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

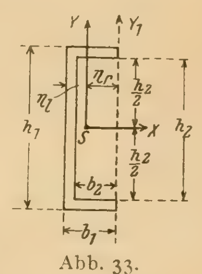


Abb. 33.

Alsdann ist

$$\eta_e = b_1 - \eta_r.$$

Das Trägheitsmoment J_x findet man sofort als Differenz der Trägheitsmomente der Teilquerschnitte in bezug auf die X-Achse. Es wird demgemäß

$$J_x = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} - \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{1}{12}(b_1 \cdot h_1^3 - b_2 \cdot h_2^3).$$

Zur Ermittlung von J_y berechne man zunächst J_{y_1}. Nach dem unter 2 angegebenen Satz muß dann sein

$$J_{y_1} = J_y + \eta_r^2 \cdot F, \text{ woraus } J_y = J_{y_1} - \eta_r^2 \cdot F.$$

J_{y_1} ist gleich der Differenz der Trägheitsmomente der Teilquerschnitte in bezug auf ihre Grundlinie, d. h.

$$J_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{3} - \frac{h_2 \cdot b_2^3}{3} = \frac{1}{3}(h_1 \cdot b_1^3 - h_2 \cdot b_2^3).$$

Nunmehr ist

$$J_y = J_{y_1} - \eta_r^2 \cdot F = \frac{1}{3}(h_1 \cdot b_1^3 - h_2 \cdot b_2^3) - \eta_r^2 (b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)$$

$$= \frac{1}{3}(h_1 \cdot b_1^3 - h_2 \cdot b_2^3) - \frac{(h_1 \cdot b_1^2 - h_2 \cdot b_2^2)^2}{4(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)^2}(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)$$

$$= \frac{1}{3}(h_1 \cdot b_1^3 - h_2 \cdot b_2^3) - \frac{(h_1 \cdot b_1^2 - h_2 \cdot b_2^2)^2}{4(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

$Z_{xy} = 0$, weil die X-Achse Symmetrieachse ist.

h) Der ⊥-Querschnitt (Abb. 34).

Der Schwerpunkt liegt auf der Y-Achse. Seinen Abstand von der X_1-Achse findet man mit Hilfe einer Momentengleichung für diese Achse, wobei der Querschnitt als die Differenz eines Rechteckquerschnitts vom Flächeninhalt $b_1 \cdot h_1$ und zweier Rechteckquerschnitte von den Flächeninhalten $b_2 \cdot h_2$ aufgefaßt werden kann.

Die Momentengleichung lautet mithin

$$(b_1 \cdot h_1 - 2\,b_2 \cdot h_2)\,\eta_o = b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} - 2\,b_2 \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2}$$

$$\eta_o = \frac{b_1 \cdot h_1^2 - 2\,b_2 \cdot h_2^2}{2(b_1 \cdot h_1 - 2\,b_2 \cdot h_2)}.$$

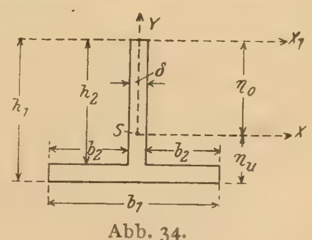


Abb. 34.

Alsdann ist

$$\eta_u = h_1 - \eta_o.$$

Man findet zunächst

$$J_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{3} - \frac{2\, b_2 \cdot h_2^3}{3} = \frac{1}{3}(b_1 \cdot h_1^3 - 2\, b_2 \cdot h_2^3).$$

Ferner ist $J_{x_1} = J_x + \eta_o^2 \cdot F$, woraus $J_x = J_{x_1} - \eta_o^2 \cdot F$

$$= \frac{1}{3}(b_1 \cdot h_1^3 - 2\, b_2 \cdot h_2^3) - \frac{(b_1 \cdot h_1^2 - 2\, b_2 \cdot h_2^2)^2}{4\,(b_1 \cdot h_1 - 2\, b_2 \cdot h_2)}.$$

Zur Berechnung von J_y fasse man den Querschnitt als die Summe zweier Rechteckquerschnitte von den Flächeninhalten $(h_1 - h_2)\, b_1$ und $h_2 \cdot \delta$ auf und erhält

$$J_y = \frac{(h_1 - h_2)\, b_1^3}{12} + \frac{h_2 \cdot \delta^3}{12} = \frac{1}{12}\left[(h_1 - h_2)\, b_1^3 + h_2 \cdot \delta^3\right].$$

$Z_{xy} = 0$, weil die Y-Achse Symmetrieachse ist.

i) Der L-Querschnitt (Abb. 35).

Der Querschnitt ist die Differenz zweier Rechteckquerschnitte von den Flächeninhalten $b_1 \cdot h_1$ und $b_2 \cdot h_2$. Die Schwerpunktlage erhält man durch Momentengleichungen für die X_1- bezw. Y_1-Achse. Es muß sein

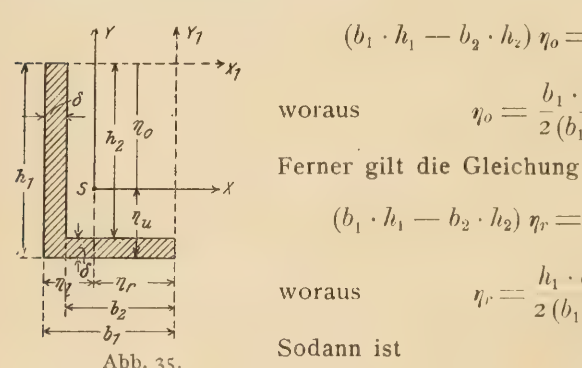


Abb. 35.

$$(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)\, \eta_o = b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{h_1}{2} - b_2 \cdot h_2 \cdot \frac{h_2}{2},$$

woraus

$$\eta_o = \frac{b_1 \cdot h_1^2 - b_2 \cdot h_2^2}{2\,(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

Ferner gilt die Gleichung

$$(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)\, \eta_r = b_1 \cdot h_1 \cdot \frac{b_1}{2} - b_2 \cdot h_2 \cdot \frac{b_2}{2},$$

woraus

$$\eta_r = \frac{h_1 \cdot b_1^2 - h_2 \cdot b_2^2}{2\,(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

Sodann ist

$$\eta_u = h_1 - \eta_o \text{ und } \eta_l = b_1 - \eta_r.$$

Nunmehr werden zunächst die Trägheitsmomente J_{x_1} und J_{y_1} berechnet. Man findet

$$J_{x_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{3} - \frac{b_2 \cdot h_2^3}{3} \text{ und } J_{y_1} = \frac{h_1 \cdot b_1^3}{3} - \frac{h_2 \cdot b_2^3}{3}.$$

Aus der Gleichung

$$J_{x_1} = J_x + \eta_o^2 \cdot F$$

ergibt sich sodann

$$J_x = J_{x_1} - \eta_o^2 \cdot F = \frac{1}{3}(b_1 \cdot h_1^3 - b_2 \cdot h_2^3) - \frac{(b_1 \cdot h_1^2 - b_2 \cdot h_2^2)^2}{4\,(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

Entsprechend wird

$$J_y = J_{y_1} - \eta_r^2 \cdot F = \frac{1}{3}(h_1 \cdot b_1^3 - h_2 \cdot b_2^3) - \frac{(h_1 \cdot b_1^2 - h_2 \cdot b_2^2)^2}{4\,(b_1 \cdot h_1 - b_2 \cdot h_2)}.$$

Zur Berechnung von Z_{xy} berechne man zunächst das Zentrifugalmoment für das dem Achsensystem $X—Y$ parallele System $X_2—Y_2$ (Abb. 36). Der Schwerpunkt S habe in bezug auf den Ursprung des Achsensystems $X_2—Y_2$ die Koordinaten $+a$, $+b$.

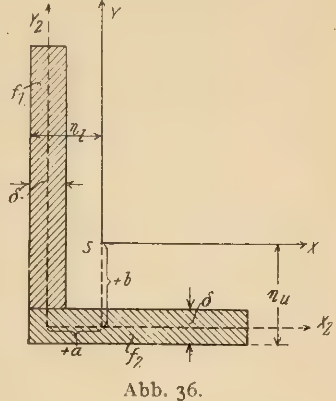


Abb. 36.

Nach 1 ist das Zentrifugalmoment des ganzen Querschnitts F in bezug auf das Achsensystem $X_2—Y_2$ gleich der Summe der Zentrifugalmomente der Teilquerschnitte f_1 und f_2, d. h.

$$Z_{x_2 y_2} = Z^{f_1}_{x_2 y_2} + Z^{f_2}_{x_2 y_2}.$$

$Z^{f_1}_{x_2 y_2} = 0$, weil für den Querschnitt f_1 die Y_2-Achse Symmetrieachse ist. $Z^{f_2}_{x_2 y_2} = 0$, weil für den Querschnitt f_2 die X_2-Achse Symmetrieachse ist. Daher wird $Z_{x_2 y_2} = 0$.

Nach dem unter 2 angegebenen Satz ist nun $Z_{x_2 y_2} = Z_{xy} + a \cdot b \cdot F$, also $0 = Z_{xy} + a \cdot b \cdot F$, woraus

$$Z_{xy} = -a \cdot b \cdot F = -\left[\left(\eta_l - \frac{\delta}{2}\right)\left(\eta_u - \frac{\delta}{2}\right)(f_1 + f_2)\right].$$

k) Der Z-Querschnitt.

Zur Berechnung von J_x verschiebe man den Querschnittsteil f_1 parallel zur X-Achse in die punktiert eingezeichnete Lage (Abb. 37), wodurch am Trägheitsmoment nichts geändert wird, weil die Abstände der einzelnen Flächenelemente df von der X-Achse dieselben bleiben. Das Trägheitsmoment J_x kann dann wie das unter *g* ermittelte J_x des **E**-Querschnitts berechnet werden.

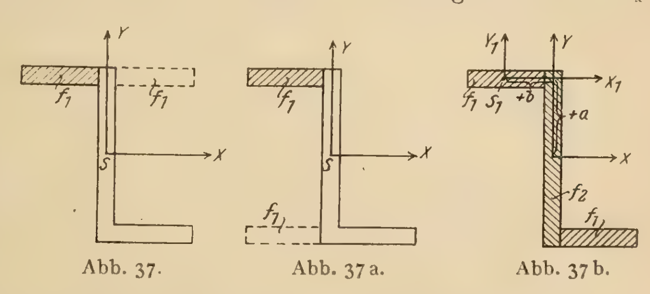


Abb. 37. Abb. 37a. Abb. 37b.

Verschiebt man dann den Querschnittsteil f_1 parallel zur Y-Achse in die punktiert angedeutete Lage (Abb. 37a), dann findet man J_y wie unter *h* als J_y des **T**-Querschnitts.

Zur Ermittlung von Z_{xy} endlich zerlege man den Querschnitt in die beiden Teilquerschnitte f_1 und den Teilquerschnitt f_2 (Abb. 37b). Es ist dann das Zentrifugalmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf das Achsensystem $X—Y$ gleich der Summe der Zentrifugalmomente der Teilquerschnitte, d. h.

$$Z_{xy} = 2\, Z^{f_1}_{xy} + Z^{f_2}_{xy}.$$

Nach dem unter 2 angegebenen Satz ist

$$Z^{f_1}_{xy} = Z^{f_1}_{x_1 y_1} + (-a)(+b)\, f_1.$$

(Bezüglich der Vorzeichen der Koordinaten a und b ist zu beachten, daß a in der negativen Richtung der Y_1-Achse, b in der positiven Richtung der X_1-Achse liegt.)

Hierin ist $Z_{x_1 y_1}^{f_1} = 0$, weil das Achsensystem $X_1 - Y_1$ für den Querschnitt f_1 ein Symmetrieachsensystem ist. Somit wird

$$Z_{xy}^{f_1} = 0 - a \cdot b \cdot f_1 = - a \cdot b \cdot f_1.$$

Ferner ist $Z_{xy}^{f_2} = 0$, weil für den Querschnitt f_2 das Achsensystem $X - Y$ ein Symmetrieachsensystem ist.

Setzt man die gefundenen Werte in die für Z_{xy} aufgestellte Gleichung ein, so erhält man

$$Z_{xy} = 2\, Z_{xy}^{f_1} + Z_{xy}^{f_2} = - 2\, a \cdot b \cdot f_1.$$

l) Schließlich möge noch die Berechnung der Querschnittsmomente 2. Ordnung für einen vielfach im Brückenbau verwendeten Querschnitt gezeigt werden (Abb. 38). Die Schwerpunktlagen der Winkelquerschnitte seien gegeben. Sie können jederzeit aus Tabellen (z. B. „Hütte", 23. Aufl., Bd. I) abgelesen werden. Für den Querschnitt der drei Kopfplatten, eines Winkels und eines Stegblechs seien die Bezeichnungen f_p, f_w und f_s eingeführt.

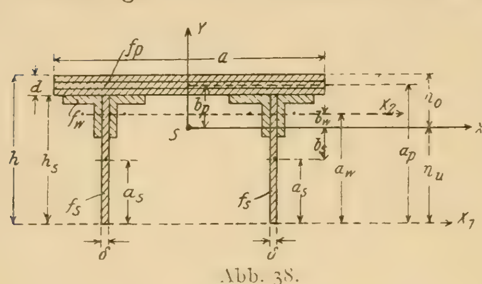


Abb. 38.

Zur Berechnung des Schwerpunktabstands η_u benutzen wir die Momentengleichung „Das statische Moment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Achse X_1 ist gleich der Summe der statischen Momente der Teilquerschnitte". Demgemäß ist

$$(f_p + 4\, f_w + 2\, f_s)\, \eta_u = f_p \cdot a_p + 4\, f_w \cdot a_w + 2\, f_s \cdot a_s,$$

woraus

$$\eta_u = \frac{f_p \cdot a_p + 4\, f_w \cdot a_w + 2\, f_s \cdot a_s}{f_p + 4\, f_w + 2\, f_s}.$$

Sodann ist

$$\eta_o = h - \eta_u.$$

Das Trägheitsmoment J_x wird dann unter Anwendung des unter 2 angegebenen Satzes wie folgt ermittelt:

$$J_x = \frac{a\, d^3}{12} + b_p^2 \cdot f_p + 4\, J_{x_2} + b_w^2 \cdot 4\, f_w + 2 \cdot \frac{\delta \cdot h_s^3}{12} + b_s^2 \cdot 2\, f_s.$$

Hierin ist J_{x_2} das Trägheitsmoment eines Winkelquerschnitts in bezug auf seine eigene Schwerachse X_2 und kann aus Tabellen abgelesen werden.

Sinngemäß findet man J_y.

$Z_{xy} = 0$, weil die Y-Achse Symmetrieachse ist.

4. Beziehung zwischen den Querschnittsmomenten 2. Ordnung für zwei verschiedene rechtwinklige Achsensysteme mit demselben Koordinatenanfangspunkt (Abb. 39).

Das Achsensystem $X - Y$ sei gegen das System $X_1 - Y_1$ um den Winkel α geneigt. Ein Flächenelement df des Querschnitts habe in bezug auf die beiden Systeme die Koordinaten x, y bezw. x_1, y_1. In den rechtwinkligen Dreiecken OAC und ABD sind die Winkel AOC und ADB gleich α, weil ihre Schenkel senkrecht aufeinander stehen. Es ist alsdann

$$x_1 = OC + CE = OC + AB = OA \cdot \cos\alpha + AD \cdot \sin\alpha$$
$$= x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha.$$

Entsprechend wird

$$y_1 = \overline{DB} - \overline{EB} = DB - AC$$
$$= y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha.$$

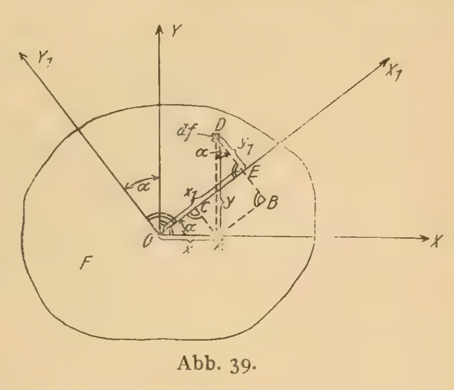


Abb. 39.

Gemäß seiner Definition ist alsdann

$$J_{x_1} = \int y_1^2 \cdot df = \int (-x \cdot \sin\alpha$$
$$+ y \cdot \cos\alpha)^2\, df = \int (x^2 \cdot \sin^2\alpha$$
$$+ y^2 \cdot \cos^2\alpha - 2\,x \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)\, df$$
$$= \sin^2\alpha \int x^2 \cdot df + \cos^2\alpha \int y^2 \cdot df$$
$$- 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int x \cdot y \cdot df$$
$$\mathbf{= J_y \cdot \sin^2\alpha + J_x \cdot \cos^2\alpha - 2\, Z_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.}$$

Entsprechend wird

$$J_{y_1} = \int x_1^2 \cdot df = \int (y \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha)^2\, df$$
$$= \int (y^2 \cdot \sin^2\alpha + x^2 \cdot \cos^2\alpha + 2\,x \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha)\, df$$
$$= \sin^2\alpha \int y^2 \cdot df + \cos^2\alpha \int x^2 \cdot df + 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int x \cdot y \cdot df$$
$$\mathbf{= J_x \cdot \sin^2\alpha + J_y \cdot \cos^2\alpha + 2\, Z_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.}$$

Durch Addition von J_{x_1} und J_{y_1} erhält man

$$J_{x_1} = J_{y_1} = J_y \cdot \sin^2\alpha + J_x \cdot \cos^2\alpha - 2\, Z_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + J_x \cdot \sin^2\alpha$$
$$+ J_y \cdot \cos^2\alpha + 2\, Z_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$= J_y\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + J_x\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, so folgt $\underline{J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y}$. D. h.:

Die Summe der Trägheitsmomente in bezug auf zwei zueinander senkrechte Achsen ist immer dieselbe.

Sinngemäß findet man für das Zentrifugalmoment

$$Z_{x_1 y_1} = \int x_1 \cdot y_1 \cdot df = \int (x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha)\,(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)\, df$$
$$= \int (x \cdot y \cdot \cos^2\alpha + y^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - x \cdot y \cdot \sin^2\alpha)\, df$$
$$= \int [x \cdot y\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (y^2 - x^2) \sin\alpha \cdot \cos\alpha]\, df.$$

Da $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ und $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$,

so wird

$$Z_{x_1 y_1} = \cos 2\alpha \int x \cdot y \cdot df + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \int (y^2 - x^2)\, df$$
$$= \cos 2\alpha \int x \cdot y \cdot df + \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \left(\int y^2 \cdot df - \int x^2 \cdot df \right)$$
$$\mathbf{= Z_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\,(J_x - J_y) \sin 2\alpha.}$$

Um ein übersichtliches Bild über die Veränderung, welche das Trägheitsmoment mit der Achsenrichtung erfährt, zu erhalten, empfiehlt sich eine graphische Darstellung der Trägheitsmomente.

Es läge am nächsten, die Trägheitsmomente selbst in irgend einem Maßstabe auf den entsprechenden Achsen als Strecken aufzutragen, indessen ergibt sich dann als geometrischer Ort der Endpunkte aller Strecken keine einfache mathematische Kurve, so daß es vorzuziehen ist, an Stelle der Werte J die Werte $\frac{c}{\sqrt{J}}$ als Strecken auf den jeweiligen Achsen aufzutragen (Abb. 40). c ist eine Konstante, über die später verfügt werden wird. So möge z. B. auf der Achse X_1, die mit der X-Achse den Winkel α einschließt, die Strecke $\frac{c}{\sqrt{J_{x_1}}}$ aufgetragen werden, worin

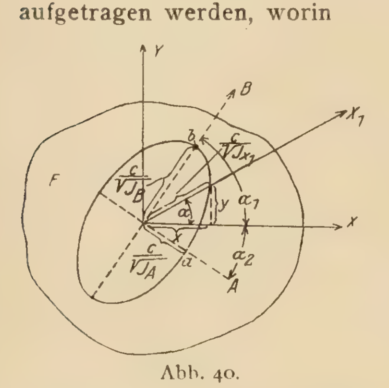


Abb. 40.

$$J_{x_1} = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - 2\, Z_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

J_x, J_y und Z_{xy} seien gegeben.

Da nach Abb. 40

$$\cos\alpha = \frac{x}{\frac{c}{\sqrt{J_{x_1}}}} = x \cdot \frac{\sqrt{J_{x_1}}}{c} \quad \text{und}$$

$$\sin\alpha = \frac{y}{\frac{c}{\sqrt{J_{x_1}}}} = y \cdot \frac{\sqrt{J_{x_1}}}{c},$$

so wird $\quad J_{x_1} = J_x \cdot \frac{x^2 \cdot J_{x_1}}{c^2} + J_y \cdot \frac{y^2 \cdot J_{x_1}}{c^2} - 2\, Z_{xy} \cdot x \cdot y \cdot \frac{J_{x_1}}{c^2}$

Dividiert man die Gleichung durch J_{x_1}, so erhält man

$$1 = J_x \cdot \frac{x^2}{c^2} + J_y \cdot \frac{y^2}{c^2} - 2\, Z_{xy} \cdot \frac{x \cdot y}{c^2}$$

oder $\quad \boldsymbol{J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 - 2\, Z_{xy} \cdot x \cdot y = c^2.}$

Das ist die Gleichung der Kurve, die entsteht, wenn man die Endpunkte aller Strecken $\frac{c}{\sqrt{J}}$ miteinander verbindet.

Aus der analytischen Geometrie der Ebene ist bekannt, daß, wenn in einer Gleichung die Glieder 1. Ordnung fehlen, der Koordinatenanfangspunkt der Mittelpunkt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche ist.

Der geometrische Ort der Endpunkte der Strecken $\frac{c}{\sqrt{J}}$ ist also eine Kurve 2. Ordnung, die den Punkt O zum Mittelpunkt hat. Derartige Kurven gibt es aber nur zwei, nämlich Ellipse und Hyperbel (der Kreis ist ja ein Spezialfall der Ellipse). Eine Hyperbel kann die Kurve nicht sein, denn das Trägheitsmoment J kann niemals gleich Null, also $\frac{c}{\sqrt{J}}$ niemals unendlich groß werden. Die Kurve hat daher keinen unendlich fernen Punkt.

Der geometrische Ort der Endpunkte der Strecken $\frac{c}{\sqrt{J}}$ ist demgemäß eine Ellipse mit dem Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt. Die Radien dieser Ellipse sind umgekehrt proportional den Quadratwurzeln aus den Trägheitsmomenten.

Man nennt diese Ellipse die Trägheitsellipse des Querschnitts. Wenn der Punkt O der Schwerpunkt des Querschnitts ist, heißt sie Zentralellipse. Die aufeinander senkrecht stehenden Achsen $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ nennt man die Hauptträgheitsachsen und die Trägheitsmomente J_A und J_B für diese Achsen die Hauptträgheitsmomente. Die große Achse der Ellipse ist die Achse des kleinsten und die kleine die Achse des größten Trägheitsmoments, denn die Strecken $\overline{Oa}$ und $\overline{Ob}$ sind umgekehrt proportional den Quadratwurzeln aus den Trägheitsmomenten.

Wenn man die Hauptachsen als Koordinatenachsen ($X - Y$) wählen würde, so würde die Gleichung der Trägheitsellipse nur die rein quadratischen Glieder, nicht aber das Glied mit dem Ordinatenprodukt enthalten. Denn die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf die Hauptachse, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (Abb. 41).}$$

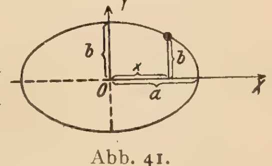


Abb. 41.

Daraus folgt, daß für das System der Hauptachsen das Zentrifugalmoment gleich Null sein muß, denn in der allgemeinen Gleichung der Trägheitsellipse

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 - 2\, Z_{xy} \cdot x \cdot y = c^2$$

ist ja das Zentrifugalmoment der Koeffizient des Ordinatenproduktes $x \cdot y$. Um also die Hauptträgheitsachsen zu finden, braucht man nur das Koordinatensystem $X_1 - Y_1$ zu ermitteln, für welches das Zentrifugalmoment gleich Null ist. Da für ein beliebiges rechtwinkliges Achsensystem $X_1 - Y_1$

$$Z_{x_1 y_1} = Z_{xy} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\,(J_x - J_y) \sin 2\alpha$$

ist (vgl. S. 23), so wird $Z_{x_1 y_1} = 0$, wenn

$$Z_{xy} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}\,(J_x - J_y) \sin 2\alpha \text{ wird.}$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch $\cos 2\alpha$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\, Z_{xy}}{J_y - J_x}.$$

Für 2α ergeben sich zwei Winkel, die sich um 180°, also für α zwei Winkel, die sich um 90° unterscheiden. Es lassen sich daher aus dieser Gleichung die Winkel α_1 und α_2 berechnen, welche die Hauptträgheitsachsen mit der X-Achse einschließen.

Sind z. B. die X- und Y-Achse die Hauptträgheitsachsen und J_x und J_y die entsprechenden Hauptträgheitsmomente, dann lautet die Gleichung der Trägheitsellipse

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 = c^2.$$

Z_{xy} ist ja hier gleich Null, wie eben entwickelt wurde.

Wir wählen jetzt die Konstante $c = \sqrt{\frac{J_x \cdot J_y}{F}}$, also $c^2 = \frac{J_x \cdot J_y}{F}$, worin F der Flächeninhalt des Querschnitts ist. Dann lautet die Gleichung der Trägheitsellipse

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 = \frac{J_x \cdot J_y}{F},$$

oder, um die Gleichung auf die bekannte Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bringen,

$$\frac{x^2}{\frac{J_y}{F}} + \frac{y^2}{\frac{J_x}{F}} = 1.$$

Die Dimension der Werte $\frac{J}{F}$ ist $\frac{\text{cm}^4}{\text{cm}^2} = \text{cm}^2$, so daß $\frac{J}{F}$ das Quadrat einer Länge ist, wie es ja auch gemäß der allgemeinen Gleichung der Ellipse sein muß. Diese Länge nennt man den Trägheitsradius für die betr. Achse. Wir wollen ihn in Zukunft mit i bezeichnen, so daß

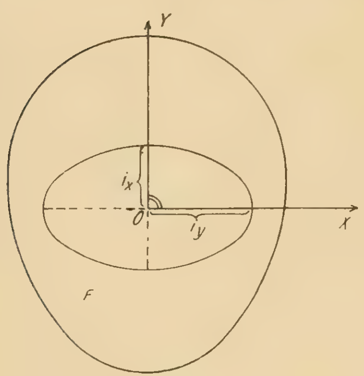


Abb. 42.

$$\frac{J}{F} = i^2 \text{ und } i = \sqrt{\frac{J}{F}} \text{ ist.}$$

Setzt man

$$\frac{J_x}{F} = i_x^2, \quad \frac{J_y}{F} = i_y^2,$$

so lautet die Gleichung der Trägheitsellipse

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 \text{ (Abb. 42).}$$

Es werden also die Halbachsen der Trägheitsellipse die Hauptträgheitsradien.

Bei gerade symmetrischen Flächen sind die Symmetrieachsen stets Hauptachsen; denn in bezug auf ein Symmetrieachsensystem ist das Zentrifugalmoment gleich Null.

So ist z. B. für den rechteckigen Querschnitt (Abb. 43)

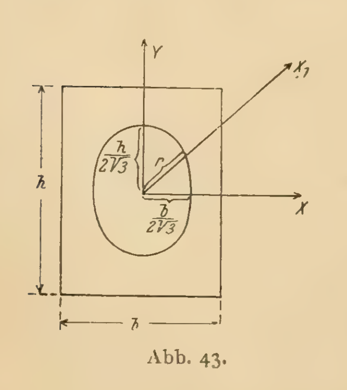


Abb. 43.

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

mithin $$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12}$$

und $$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{2 \cdot \sqrt{3}};$$

ferner $$i_y^2 = \frac{b^2}{12} \text{ und } i_y = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{3}}.$$

Die Halbachsen der Zentralellipse sind daher $i_y = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{3}}$ für die X-Achse und $i_x = \frac{h}{2 \cdot \sqrt{3}}$ für die Y-Achse. Die Gleichung der Ellipse lautet

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 \text{ oder } \frac{12\,x^2}{h^2} + \frac{12\,y^2}{b^2} = 1,$$

wodurch für jedes x das zugehörige y bestimmt ist. Nach Aufzeichnung der Trägheitsellipse kann man dann für jede beliebige Achse das Trägheitsmoment angeben. So ist z. B. für die Achse X_1 der Trägheitsradius gleich der Strecke

$$r = \frac{c}{\sqrt{J_{x_1}}}, \text{ worin } c = \sqrt{\frac{J_x \cdot J_y}{F}}, \text{ so daß } r = \sqrt{\frac{J_x \cdot J_y}{F \cdot J_{x_1}}}.$$

Da $r^2 = \frac{J_x \cdot J_y}{F \cdot J_{x_1}}$, so findet man

$$J_{x_1} = \frac{J_x \cdot J_y}{F \cdot r^2} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{h \cdot b^3}{12}}{b \cdot h \cdot r^2} = \frac{b^3 \cdot h^3}{144\,r^2}.$$

Für die Anwendung bequemer ist die Benutzung des Mohrschen Kreises, der weiter unten behandelt werden wird.

5. Beziehung zwischen den Querschnittsmomenten 2. Ordnung eines rechtwinkligen Achsensystems $X - Y$ und eines beliebigen schiefwinkligen Systems $X_1 - Y_1$ (Abb. 44).

Die Achsen X_1 und Y_1 schließen mit der X-Achse die Winkel α bezw. β ein. a und b seien die von einem beliebigen Flächenelement df auf die X_1-Ache bezw. die Y_1-Achse gefällten Lote. x, y seien die Koordinaten des Flächenelements für das Achsensystem $X - Y$. Im Dreieck cde ist dann der Winkel $dce = \alpha$, da die Schenkel cd und ce senkrecht auf den Schenkeln des Winkels α stehen. Ebenso ist im Dreieck cgh der Winkel $gch = \beta$, da die Schenkel cg und ch senkrecht auf den Schenkeln des Winkels β stehen. Im Dreieck cde ist

$$\cos\alpha = \frac{a}{ce} = \frac{a}{cf - ef} = \frac{a}{y - x \cdot \operatorname{tg}\alpha};$$

folglich

$$a = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$= y \cdot \cos\alpha - x \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha;$$

$$\mathbf{= y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha.}$$

Abb. 44.

Ferner ist im Dreieck cgh

$$\cos\beta = \frac{b}{cf - hf} = \frac{b}{y - x \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

daher

$$\mathbf{b = y \cdot \cos\beta - x \cdot \sin\beta.}$$

Nach Seite 12 ist

$$Z_{x_1 y_1} = \int a \cdot b \cdot df = \int [(y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)(y \cdot \cos\beta - x \cdot \sin\beta)]\, df$$

$$= \int [y^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - x \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta - x \cdot y \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta + x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta]\, df$$

$$= \int [y^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + x^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - x \cdot y\,(\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta)]\, df$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta \int y^2 \cdot df + \sin\alpha \cdot \sin\beta \int x^2 \cdot df - (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \int x \cdot y \cdot df.$$

Mit $\int y^2 \cdot df = J_x$, $\int x^2 \cdot df = J_y$, $\int x \cdot y \cdot df = Z_{xy}$ sowie $\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$ wird

$$\mathbf{Z_{x_1 y_1} = J_x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_y \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - Z_{xy} \cdot \sin(\alpha + \beta).}$$

Ferner ist

$$\underline{J_{x_1}} = \int a^2 \cdot df = \int (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)^2\, df$$

$$= \int (y^2 \cdot \cos^2\alpha - 2\, x \cdot y \sin\alpha \cdot \cos\alpha + x^2 \cdot \sin^2\alpha)\, df$$

$$= \cos^2\alpha \int y^2 \cdot df - 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int x \cdot y \cdot df + \sin^2\alpha \int x^2 \cdot df$$

$$\mathbf{= J_x \cdot \cos^2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha.}$$

Endlich ist

$$\underline{J_{y_1}} = \int b^2 \cdot df = \int (y \cdot \cos\beta - x \cdot \sin\beta)^2\, df$$

$$= \cos^2\beta \int y^2 \cdot df - 2 \sin\beta \cdot \cos\beta \int x \cdot y \cdot df + \sin^2\beta \int x^2 \cdot df$$

$$\mathbf{= J_x \cdot \cos^2\beta - Z_{xy} \cdot \sin 2\beta + J_y \cdot \sin^2\beta.}$$

6. Konstruktion der Querschnittsmomente 2. Ordnung mit Hilfe des Mohrschen Kreises[1]) (Abb. 45).

Gegeben seien die drei Querschnittsmomente J_x, J_y und Z_{xy} für ein rechtwinkliges Achsensystem $X - Y$, gesucht sind die Querschnittsmomente für ein beliebiges schiefwinkliges Achsensystem $X_1 - Y_1$.

Man trage auf der Y-Achse vom Koordinatenanfangspunkt aus zunächst J_x und im Anschluß daran J_y in irgend einem Maßstabe auf (z. B. 10 cm⁴ seien dargestellt durch 1 mm) und beschreibe über dem Durchmesser J_x und J_y einen Kreis. Im Endpunkt von J_x errichte man auf der Y-Achse ein Lot und trage auf diesem die Strecke $Z_{xy} = CT$ auf (in dem Maßstabe, in welchem J_x und J_y aufgetragen waren), und zwar, je nachdem Z_{xy} positiv oder negativ ist, in der Richtung der positiven oder negativen X-Achse. Der Punkt T heißt der Trägheitshauptpunkt. Um nun das Trägheitsmoment J_{x_1} zu erhalten, zeichne man im Schnittpunkt a der X_1-Achse mit dem Kreise die Tangente und fälle darauf vom Trägheitshauptpunkt das Lot TS. Dieses stellt dann, gemessen in dem Maßstab,

[1]) Mohr, Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Zivilingenieur 1887, 33. Band, S. 43.

in dem J_x, J_y und Z_{xy} aufgetragen sind, das Trägheitsmoment J_{x_1} dar. Entsprechend erhält man in TR das Trägheitsmoment J_{y_1}. Endlich ist das Lot $\overline{TQ}$, von T aus auf die Verbindungslinie $a—b$ gefällt, das Zentrifugalmoment $Z_{x_1y_1}$. In folgendem möge der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion gezeigt werden:

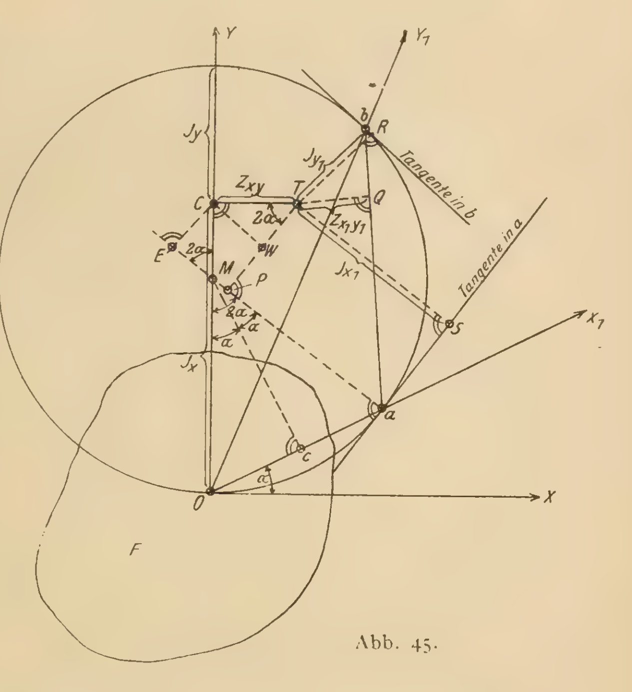


Abb. 45.

M = Mittelpunkt des Kreises. $\sphericalangle a O x = \alpha$. Fällt man von M ein Lot Mc auf Oa, so ist $\sphericalangle c M O = \alpha$, weil die Schenkel cM und OM senkrecht auf den Schenkeln des Winkels α stehen. Ebenso ist $\sphericalangle c Ma = \alpha$, also $\sphericalangle O Ma = 2\alpha$.

$$OM = \frac{J_x + J_y}{2};$$

$$CM = J_x - OM = J_x - \frac{J_x + J_y}{2} = \frac{J_x - J_y}{2}.$$

Fällt man von C das Lot CE auf aM, dann ist

$$TS = aP = aE - EP.$$

Hierin ist

$$aE = aM + ME, \text{ so daß } TS = aM + ME - EP.$$

aM ist der Radius des Mohrschen Kreises $= \frac{J_x + J_y}{2}$.

Da sich der Winkel 2α als Scheitelwinkel in dem Dreieck CME wiederfindet, so ist

$$EM = CM \cdot \cos 2\alpha = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\alpha.$$

EP ist gleich der Projektion Cw von Z_{xy}. Da der Winkel CTP auch gleich 2α ist, weil die Schenkel CT und TP senkrecht auf den Schenkeln CM und $\overline{EM}$ des Winkels 2α stehen, so ist in dem $\triangle CTw$

$$\sin 2\alpha = \frac{Cw}{Z_{xy}} = \frac{EP}{Z_{xy}};$$

daraus

$$EP = Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Folglich

$$aP = aE - EP = aM + EM - EP = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$\overline{aP} = \frac{J_x}{2} + \frac{J_y}{2} + \frac{J_x}{2} \cdot \cos 2\alpha - \frac{J_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$= \frac{J_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{J_y}{2}(1 - \cos 2\alpha) - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Aus den Gleichungen

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \text{ und } \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

ergibt sich durch Addition

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

und durch Subtraktion

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

Setzt man diese Werte in die für $\overline{aP}$ aufgestellte Gleichung ein, so wird

$$\overline{aP} = \frac{J_x}{2} \cdot 2\cos^2\alpha + \frac{J_y}{2} \cdot 2\sin^2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha$$

$$= J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha.$$

Anderseits ist $\overline{aP} = \overline{TS}$, so daß man erhält

$$\mathbf{\overline{TS} = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - Z_{xy} \cdot \sin 2\alpha.}$$

Nach Seite 23 ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich J_{x_1}, so daß

$$\mathbf{\overline{TS} = J_{x_1}.}$$

Ebenso läßt sich nachweisen, daß $\overline{TR} = J_{y_1}$ ist. Es bleibt noch nachzuweisen, daß $\overline{TQ} = Z_{x_1y_1}$ ist.

Nach Seite 28 ist

$$Z_{x_1y_1} = J_x \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + J_y \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - Z_{xy} \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Setzt man $\qquad \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

und $\qquad \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$

so wird

$$Z_{x_1y_1} = J_x \cdot \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] + J_y \cdot \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] - Z_{xy} \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

$$\mathbf{= \frac{J_x + J_y}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) - Z_{xy} \cdot \sin(\alpha + \beta).}$$

Verbindet man den Kreismittelpunkt M mit a und b und mit dem Mittelpunkt E der Sehne ab (Abb. 46), so ist $\sphericalangle OMa = 2\alpha$ als Zentriwinkel über dem Bogen $\widehat{Oa}$, für den α der Abschnittswinkel ist. Entsprechend ist

$$\sphericalangle OMb = 2\beta,$$
$$\sphericalangle aMb = 2\beta - 2\alpha,$$

folglich $\qquad \sphericalangle aME = \sphericalangle bME = \frac{2\beta - 2\alpha}{2} = \beta - \alpha.$

Der Winkel, den die Sehne $\overline{ab}$ mit der X-Achse einschließt, ist als Außenwinkel des Dreiecks Obz, dessen Basiswinkel die Winkel α und β sind, gleich $\alpha + \beta$. Mithin ist auch $\sphericalangle OME = \alpha + \beta$, weil dessen Schenkel senkrecht auf den Schenkeln des Außenwinkels $\alpha + \beta$ stehen.

Fällt man von T das Lot TP auf $\overline{ME}$, so ist auch $\sphericalangle CTP = \alpha + \beta$, weil seine Schenkel senkrecht auf den Schenkeln des Winkels OME stehen, der ebenfalls gleich $\alpha + \beta$ ist.

Endlich ist noch $\sphericalangle CMF = \alpha + \beta$ als Scheitelwinkel zu $\sphericalangle OME$.

Aus Abb. 29 erkennt man nun, daß

$$\overline{TQ} = \overline{EP} = \overline{EM} + \overline{MF} - \overline{FP}.$$

Hierin ist

$$\overline{EM} = aM \cdot \cos(\beta - \alpha) = \frac{J_x + J_y}{2} \cdot \cos(\beta - \alpha) = \frac{J_x + J_y}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

Ferner ist

$$\overline{MF} = \overline{MC} \cdot \cos(\alpha + \beta) = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Abb. 46.

Endlich ist noch

$$\overline{FP} = \overline{CS} = \overline{CT} \cdot \sin(\alpha + \beta) = Z_{xy} \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Demnach wird

$$\overline{TQ} = \overline{EP} = \overline{EM} + \overline{MF} - \overline{FP}$$
$$= \frac{J_x + J_y}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) - Z_{xy} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$
$$= Z_{x_1 y_1}.$$

Das gesuchte Zentrifugalmoment ist also das Lot vom Trägheitshauptpunkt auf die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Achsen X_1 und Y_1 mit dem Kreise.

Zwei Achsen, für welche das Zentrifugalmoment gleich Null ist, nennt man **konjugierte oder einander zugeordnete Achsen**.

Mit Hilfe des Mohrschen Kreises läßt sich leicht für jede Achse die konjugierte bestimmen (Abb. 47).

Gesucht sei z. B. die der X_1-Achse zugeordnete Achse Y_1.

Man zeichne zunächst den Mohrschen Kreis mit dem Durchmesser $J_x + J_y$ und trage in C rechtwinklig zur Y-Achse das Zentrifugalmoment Z_{xy} ab, und zwar, wenn es positiv ist, nach der positiven, wenn es negativ ist, nach der negativen Richtung der X-Achse. Dadurch erhält man den Trägheitshauptpunkt T. Soll jetzt $Z_{x_1 y_1} = 0$ werden, so muß die Gerade $\overline{ab}$ durch T gehen, womit der Punkt b festliegt.

Die durch b gehende Y_1-Achse ist dann der X_1-Achse konjugiert.

Gesucht sei ferner die **Zentralellipse** für das in Abb. 47a dargestellte Winkeleisen, deren Mittelpunkt also mit dem Schwerpunkt des Winkeleisens zusammenfallen muß.

Wir suchen zunächst die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts auf, d. h. diejenigen Achsen Ξ und H, für welche das Zentrifugalmoment $Z_{\xi\eta} = 0$ ist und die aufeinander senkrecht stehen. Die Querschnittsmomente J_x, J_y und

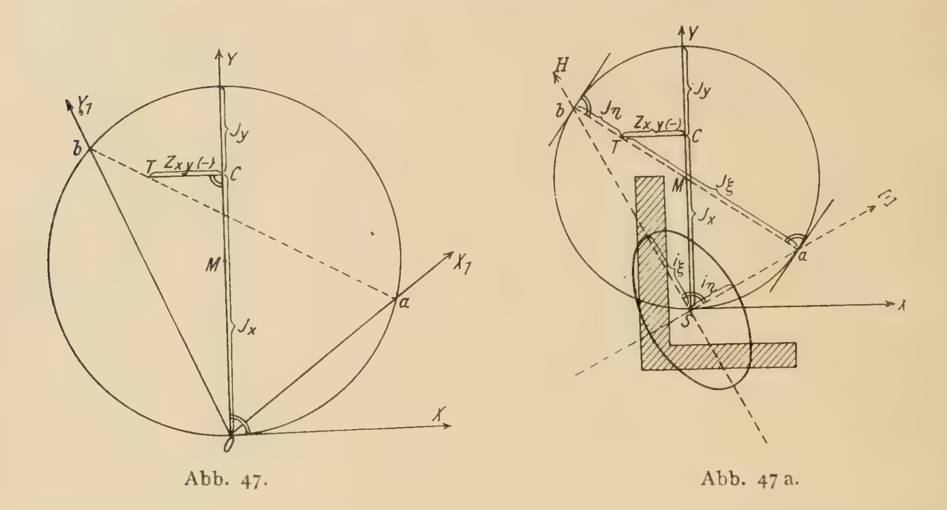


Abb. 47. Abb. 47a.

Z_{xy} seien gegeben (vergl. S. 20 u. 21). Z_{xy} habe sich negativ ergeben. Wir zeichnen zunächst mit dem Durchmesser $J_x + J_y$ den Mohrschen Kreis und tragen im Punkt C lotrecht zur Y-Achse den Wert Z_{xy} auf, und zwar auf der negativen Seite der X-Achse (wegen des negativen Vorzeichens von Z_{xy}). Der Maßstab, in dem J_x, J_y und Z_{xy} aufgetragen werden, kann beliebig gewählt werden. Alsdann verbinden wir den Trägheitshauptpunkt T mit dem Kreismittelpunkt M und verlängern diese Linie bis zum Schnitt mit dem Kreise in a und b. Dann sind die Achsen $\overline{Sa}$ und $\overline{Sb}$ (Ξ- und H-Achse) die Hauptträgheitsachsen der Zentralellipse, da in bezug auf dieses Achsensystem das Zentrifugalmoment $Z_{\xi\eta} = 0$ ist und beide Achsen nach dem Lehrsatz des Thales aufeinander senkrecht stehen (sie schließen einen Peripheriewinkel über dem Durchmesser a—b miteinander ein).

Die Gleichung der Zentralellipse lautet nun nach Seite 26

$$\frac{\xi^2}{i_\eta^2} + \frac{\eta^2}{i_\xi^2} = 1.$$

Die Halbmesser der Zentralellipse sind daher i_η (auf der Ξ-Achse) und i_ξ (auf der H-Achse), wobei

$$i_\eta = \sqrt{\frac{J_\eta}{F}} \quad \text{und} \quad i_\xi = \sqrt{\frac{J_\xi}{F}}.$$

Zeichnen wir jetzt im Schnittpunkt der H-Achse mit dem Kreise die Tangente und fällen vom Trägheitshauptpunkt T das Lot auf die Tangente, so ist dieses gleich J_η, also im vorliegenden Fall gleich der Strecke $\overline{T-b}$. Entsprechend finden wir J_ξ gleich der Strecke $\overline{T-a}$.

Nunmehr kann die Zentralellipse konstruiert werden.

§ 3. Berechnung der Normalspannungen.

1. Die Biegungsfestigkeit.

Man unterscheidet gerade und schiefe Belastung. Die Belastung heißt gerade, wenn die Kraftlinie (Schnittgerade der Kräfteebene mit der Querschnittsebene) mit einer Hauptachse (gerade Symmetrieachse) zusammenfällt (Abb. 48). Ist dies nicht der Fall, so spricht man von schiefer Belastung (Abb. 48a).

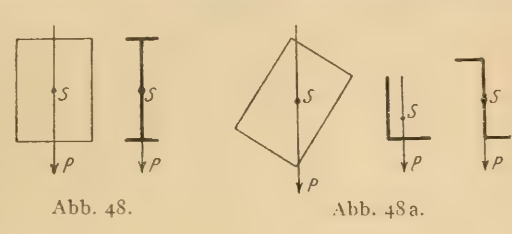


Abb. 48. Abb. 48a.

a) Gerade Belastung.

Ein Balken auf zwei Stützen sei durch senkrechte Kräfte P belastet, die in ein und derselben Ebene liegen (Abb. 49). Die Kraftlinie falle mit einer Hauptachse zusammen, so daß also gerade Belastung vorliegt (Abb. 49a).

Die Auflagerdrücke A und B werden mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen ermittelt. Für ebene Kräftesysteme bestehen drei Gleichgewichtsbedingungen:

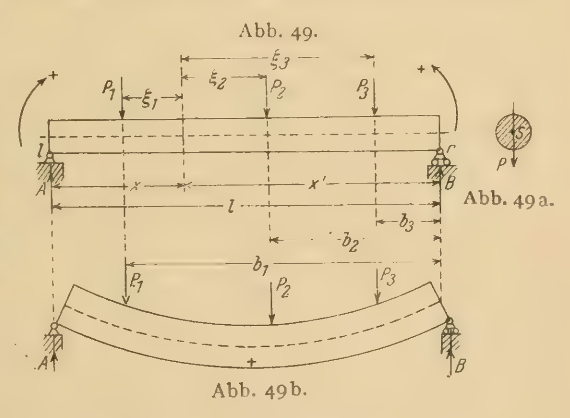


Abb. 49b.

1. Die Summe der statischen Momente aller an dem Balken sich das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräfte, d. h. also der Kräfte P und der durch sie hervorgerufenen Stützendrücke A und B, in bezug auf irgend einen in der Kräfteebene gelegenen Punkt muß gleich Null sein.

2. und 3. Die Summe der Seitenkräfte nach je zwei zueinander rechtwinklig stehenden, in der Kräfteebene liegenden Richtungen muß gleich Null sein (z. B. $\Sigma H = 0$ und $\Sigma V = 0$).

Gehören die sich das Gleichgewicht haltenden äußeren Kräfte einem räumlichen Kräftesystem an, so können sechs Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden:

1., 2. und 3. Die Summe der statischen Momente aller Kräfte in bezug auf je drei zueinander rechtwinklig stehende, im Raum liegende Achsen muß gleich Null sein.

4., 5. und 6. Die Summe der Seitenkräfte nach den Richtungen je einer dieser drei Achsen muß gleich Null sein.

Zur Berechnung des Auflagerdrucks A benutzen wir die für ebene Kräftesysteme geltende Momentengleichung: „Die Summe der Momente in bezug auf den Punkt r muß gleich Null sein" (Abb. 49). Bei dieser Wahl des Momentenpunktes schneidet der Auflagerdruck B den Drehpunkt, sein Moment ist daher

gleich Null, so daß nur die Unbekannte A in der Momentengleichung enthalten ist. Diese lautet mithin

$$A \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 = 0.$$

Hieraus findet man $$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3}{l}.$$

B kann dann aus der Bedingung $\Sigma V = 0$ gefunden werden, so daß

$$B + A - P_1 - P_2 - P_3 = 0,$$

woraus $$B = P_1 + P_2 + P_3 - A.$$

Der Balken wird sich nun derart deformieren, daß die oberen Fasern verkürzt, die unteren verlängert werden (Abb. 49b), so daß die oberen Fasern Druckspannungen, die unteren Zugspannungen erleiden. Diese Längenänderungen der Fasern können aber nur durch Spannkräfte (innere Kräfte) verursacht sein, die in der Richtung der Fasern, also in der Richtung der Achse des Balkens, d. h. lotrecht (normal) zu dem Querschnitt wirken (Normalspannkräfte). Da erfahrungsgemäß bei der Formänderung des Balkens die Querschnitte eben und zu der Balkenachse lotrecht bleiben (homogenes Material des Balkens vorausgesetzt), so müssen die auf den Querschnitt wirkenden Spannkräfte in einem linearen Verhältnis zueinander stehen. Trägt man daher die Spannungen (Spannung = Spannkraft je Flächeneinheit) in den einzelnen Punkten des Querschnitts als Ordinaten auf und verbindet deren Endpunkte miteinander, so muß die Verbindungslinie eine Gerade sein. In Abb. 50 ist ein unendlich kleines Balkenstück von der Länge dx nach erfolgter Deformation dargestellt. Die vor der Deformation parallelen (senkrechten) Querschnitte I und II schließen nach der Deformation einen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ miteinander ein. Die Spannungen für den Querschnitt I sind durch das Spannungsdiagramm dargestellt. Dort, wo die Druckspannungen in die Zugspannungen übergehen, ist die Spannung gleich Null. Verbindet man alle Punkte des Querschnitts, in denen die Spannung gleich Null ist, miteinander, so erhält man die Nullinie oder neutrale Achse.

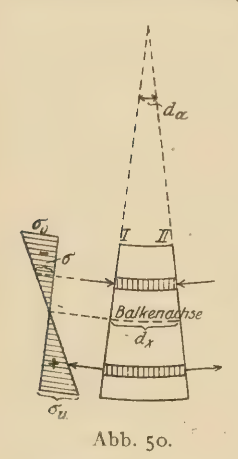


Abb. 50.

Nachstehend soll nunmehr die Ermittlung der Spannungsverteilung für einen beliebigen, im Abstand x vom linken Auflager befindlichen Querschnitt gezeigt werden.

Wir denken uns den Balken an der fraglichen Stelle durchschnitten und zum Ersatz die dort wirkenden inneren Kräfte (Normalspannkräfte) angebracht, so daß an dem Gleichgewichtszustand nichts geändert ist (Abb. 51). Der Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils ist in Abb. 51a in größerem Maßstab dargestellt. Die Mittelkraft der links vom Querschnitt wirkenden äußeren Kräfte sei $= R$, in dem vorliegenden Fall also $= A - P_1$. Sie wirke im Abstand z von dem fraglichen Querschnitt. Bringt man R in dem Querschnitt noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an (was auf den Gleichgewichtszustand ohne Einfluß ist, da die beiden Kräfte sich aufheben), so bilden die

beiden mit einem gefiederten Pfeil versehenen Kräfte R ein Kräftepaar vom Moment $M_x = R \cdot z$. Auf den Querschnitt wirkt mithin außer dem Moment M_x noch eine in der Ebene des Querschnitts wirkende Einzelkraft R, welche die Querkraft oder Scherkraft des Querschnitts genannt wird.

Das Moment $M_x = R \cdot z$ heißt das Biegungsmoment oder Angriffsmoment oder auch kurz das Moment für den Querschnitt. Da $R \cdot z$ das statische Moment der Mittelkraft und dieses nach dem Momentensatz gleich der Summe der statischen Momente der Seitenkräfte ist, so folgt

$$\boldsymbol{M_x = R \cdot z = A \cdot x - P_1 \cdot \xi_1}.$$

Die Querkraft $\boldsymbol{V_x = R = A - P_1}$ ist gleich der Summe der an dem abgetrennten Teil in Richtung des Querschnitts wirkenden äußeren Kräfte.

Da die Summe der Momente aller äußeren Kräfte aus Gleichgewichtsgründen gleich Null sein muß, so folgt, daß die an dem rechts abgetrennten Teil wirkenden Kräfte auf den Querschnitt ein gleich großes, aber entgegengesetzt wirkendes Moment ausüben müssen. Es muß also auch sein

$$M_x = B \cdot x' - P_2 \cdot \xi_2 - P_3 \cdot \xi_3.$$

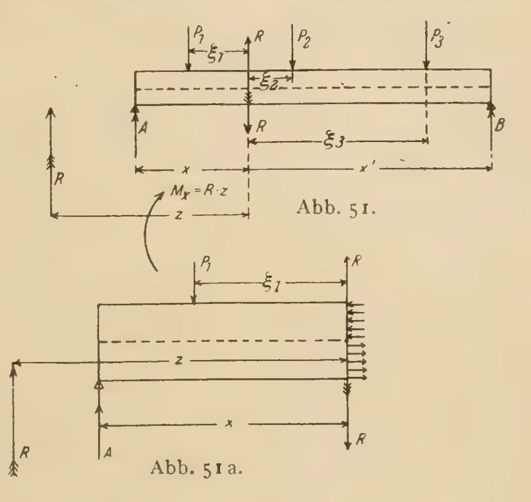


Abb. 51.

Abb. 51a.

Da ferner für alle äußeren Kräfte die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ zutreffen muß, so folgt, daß die am rechts abgetrennten Teil wirkenden äußeren Kräfte eine dem V_x gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft bilden müssen. Es muß also sein

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0.$$

Mit $A - P_1 = V_x$ erhält man $V_x + B - P_2 - P_3 = 0$.

Daraus folgt $V_x = P_2 + P_3 - B$.

Man kann daher folgende Regeln für die Berechnung von Biegungsmoment und Querkraft aufstellen:

a) Das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt ist gleich der Summe der statischen Momente aller links oder rechts vom Querschnitt wirkenden äußeren Kräfte. Bezüglich des Vorzeichens der Momente ist zu beachten, daß die oben um den Schwerpunkt des Querschnitts herumdrehenden Momente als positiv, die entgegengesetzt drehenden als negativ in Ansatz gebracht werden müssen, so daß entweder

$$M_x = + A \cdot x - P_1 \cdot \xi_1 \text{ oder } M_x = + B \cdot x' - P_2 \cdot \xi_2 - P_3 \cdot \xi_3.$$

Dabei empfiehlt es sich, die Momente von der Seite aus zu berechnen, an welcher die wenigsten Kräfte wirken.

b) Die Querkraft für irgend einen Querschnitt ist gleich der Summe der an einem abgetrennten Teil in Richtung des Querschnitts wirkenden äußeren Kräfte. Positiv zählen am links abgetrennten Teil die nach oben wirkenden, am rechts abgetrennten Teil die nach unten wirkenden Kräfte.

Nun möge der fragliche Querschnitt in größerem Maßstabe, und zwar der besseren Übersicht halber perspektivisch herausgezeichnet werden (Abb. 52).

Das Moment M_x der äußeren Kräfte werde durch das Moment eines in der Ebene der äußeren Kräfte auf den Querschnitt wirkenden Kräftepaars ersetzt, wodurch an der Beanspruchung nichts geändert wird, wenn nur das Moment des Kräftepaars gleich dem Moment M_x der äußeren Kräfte ist. Wählt man dann die Seitenkraft des Kräftepaars gleich P, so ergibt sich der Hebelarm p aus der Bedingung $M_x = P \cdot p$, woraus $p = \frac{M_x}{P}$. Ebensogut kann man natürlich p willkürlich wählen. Dann wird $P = \frac{M_x}{p}$.

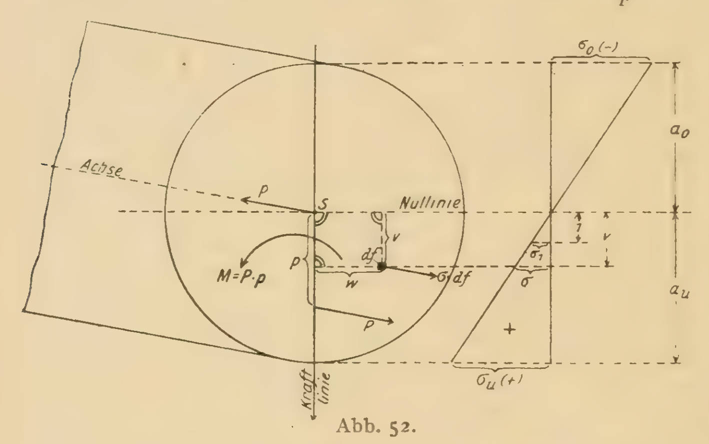


Abb. 52.

Infolge dieses Moments treten in dem Querschnitt, wie bereits weiter oben ausgeführt wurde, in den oberen Flächenelementen Druckspannungen, in den unteren Zugspannungen auf, die sich geradlinig über den Querschnitt verteilen.

Ist die Spannung für ein Flächenelement im Abstand „eins" von der Nullinie gleich σ_1, so ist sie im Abstand v wegen der geradlinigen Spannungsverteilung v mal so groß, d. h. $\sigma_1 \cdot v$. Sie sei mit σ bezeichnet. Da die Spannung die Spannkraft je Flächeneinheit ist, so entfällt auf das Element df im Abstand v von der Nullinie die Spannkraft $\sigma \cdot df = \sigma_1 \cdot v \cdot df$. Diese Kraft ist lotrecht (normal) zum Querschnitt gerichtet (Normalspannkraft). Auf den Querschnitt wirken unendlich viele derartige Spannkräfte (innere Kräfte), die oberhalb der Nullinie die entgegengesetzte Richtung haben wie unterhalb, da sie oberhalb der Nullinie Druck-, unterhalb der Nullinie Zugkräfte sind.

Diese inneren Kräfte müssen den äußeren, auf den Querschnitt wirkenden Kräften das Gleichgewicht halten. Da die äußeren Kräfte aus einem Kräftepaar bestehen, müssen auch die inneren Kräfte ein Kräftepaar bilden, dessen Drehsinn dem Moment der äußeren Kräfte entgegenwirkt. Da ferner die Seitenkräfte eines Kräftepaars entgegengesetzt gleich groß sind, muß die algebraische Summe der Seitenkräfte gleich Null sein, d. h. es muß

$$\int \sigma \cdot df = \int \sigma_1 \cdot v \cdot df = \sigma_1 \int v \cdot df = 0$$

sein. σ_1 kann nicht gleich Null werden, da σ_1 die Spannung im Abstand „eins" von der Nullinie ist. Mithin muß $\int v \cdot df = 0$ sein. Da nun $df \cdot v$ das statische Moment des im Abstand v von der Nullinie liegenden Flächenelements df in bezug auf die Nullinie ist, so ist $\int df \cdot v$ das statische Moment des ganzen Quer-

schnitts in bezug auf die Nullinie. Dieses kann aber nur dann gleich Null sein, wenn die Nullinie Schwerachse ist.

Bei reiner Biegungsbeanspruchung muß daher die Nullinie durch den Schwerpunkt gehen.

Jetzt setzen wir eine von den Gleichgewichtsbedingungen für räumliche Kräftesysteme an (die auf den Querschnitt wirkenden Kräfte P und $\sigma \cdot df$ gehören ja einem räumlichen Kräftesystem an): „Die Summe der Momente aller Kräfte in bezug auf die Kraftlinie als Drehachse muß gleich Null sein". Da die Seitenkräfte P des Kräftepaars die Drehachse schneiden, ist ihr Moment gleich Null. Es kommen somit für die Gleichgewichtsbedingung nur noch die inneren Kräfte $\sigma \cdot df$ in Betracht. Mithin muß sein

$$\int \sigma \cdot df \cdot w = 0 \text{ (Abb. 52).}$$

Setzt man $\sigma = \sigma_1 \cdot v$, so folgt

$$\int \sigma_1 \cdot v \cdot df \cdot w = 0.$$

Setzt man die Konstante σ_1 vor das Integral, so erhält man

$$\sigma_1 \int v \cdot w \cdot df = 0, \text{ d. h.} \int v \cdot w \cdot df = 0,$$

da σ_1 nicht gleich Null sein kann. $\int v \cdot w \cdot df$ ist das Zentrifugalmoment des Achsensystems „Kraftlinie — Nullinie". Dieses kann nur dann gleich Null sein, wenn die beiden Achsen konjugiert sind. Da nun nach Voraussetzung die Kraftlinie eine Hauptachse ist, muß die Nullinie, weil sie anderseits durch den Schwerpunkt geht, die andere Hauptachse sein. Ist der Querschnitt also gerade symmetrisch, wie hier vorausgesetzt wurde, so muß die Nullinie mit der Kraftlinie einen Winkel von 90° bilden.

Setzt man jetzt eine Momentengleichung für die Nullinie als Drehachse an, so ergibt sich die Bedingung

$$P \cdot p - \int \sigma \cdot df \cdot v = 0 \text{ bezw. mit } \sigma = \sigma_1 \cdot v$$

$$P \cdot p - \sigma_1 \int v^2 \cdot df = 0.$$

Hieraus findet man

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot p}{\int v^2 \cdot df}.$$

$P \cdot p$ ist das Moment M_x der äußeren Kräfte, $\int v^2 \cdot df$ das Trägheitsmoment J_n des Querschnitts in bezug auf die Nullinie. Somit wird

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{J_n}.$$

Im Abstand v von der Nullinie erhält man alsdann

$$\sigma = \sigma_1 \cdot v = \frac{M_x}{J_n} \cdot v.$$

Für $v = a_u$ bezw. a_o wird σ ein Maximum, so daß

$$\sigma_u = + \frac{M_x}{J_n} \cdot a_u = + \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_u}} \text{ und } \sigma_o = - \frac{M_x}{J_n} \cdot a_o = - \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_o}}.$$

$\frac{J_n}{a_u}$ und $\frac{J_n}{a_o}$ nennt man die Widerstandsmomente W_u bezw. W_o des Querschnitts. Mit dieser Bezeichnungsweise erhält man daher

$$\sigma_u = + \frac{M_x}{W_u} \text{ (Zugspannung) und } \sigma_o = - \frac{M_x}{W_o} \text{ (Druckspannung)}$$

Ist z. B. der Querschnitt rechteckig (Abb. 53), so wird

$$a_o = a_u = \frac{h}{2},$$

mithin

$$W_o = W_u = W = \frac{J_n}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Abb. 53.

Somit erhält man

$$\sigma_u = + \frac{M_x}{W} = + \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = + \frac{6\,M_x}{b \cdot h^2}$$

und

$$\sigma_o = - \frac{M_x}{W} = - \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = - \frac{6\,M_x}{b \cdot h^2}.$$

In diesem Falle werden die beiden Randspannungen gleich groß.

b) Schiefe Belastung.

Die Kraftlinie falle nicht mehr mit einer Hauptachse zusammen, so daß schiefe Belastung vorliegt (Abb. 54).

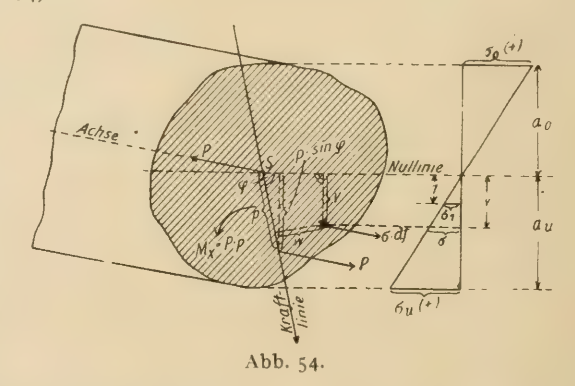


Abb. 54.

Zunächst gelten bezüglich der Lage und Richtung der Nullinie die unter a hergeleiteten Entwicklungen: $\int v \cdot df = 0$ und $\int v \cdot w \cdot df = 0$. Die erste Bedingungsgleichung besagt wieder, daß die Nullinie durch den Schwerpunkt geht, die zweite, daß Kraftlinie und Nullinie konjugierte Achsen sein müssen, die einen Winkel φ miteinander einschließen. Bei gegebener Kraftlinie kann die konjugierte Nullinie ganz allgemein für jeden beliebigen Querschnitt mit Hilfe des Mohrschen Kreises nach der auf Seite 31 beschriebenen Konstruktion bestimmt werden, wodurch auch der Winkel φ gegeben ist.

Setzt man sodann eine Momentengleichung für die Nullinie als Achse an, so erhält man

$$P \cdot p \cdot \sin \varphi - \int \sigma \cdot df \cdot v = 0.$$

Da $\sigma = \sigma_1 \cdot v$, so ist

$$\sigma_1 \int v^2 \cdot df = P \cdot p \cdot \sin \varphi,$$

woraus
$$\sigma_1 = \frac{P \cdot p}{\int v^2 \cdot df} \cdot \sin \varphi = \frac{M_x}{J_n} \cdot \sin \varphi.$$

Dann ist
$$\sigma = \sigma_1 \cdot v = \frac{M_x}{J_n} \cdot v \cdot \sin \varphi = \frac{M_x}{\frac{J_n}{v}} \cdot \sin \varphi.$$

Die größten Spannungen ergeben sich für $v = a_u$ bezw. a_o. Demnach wird

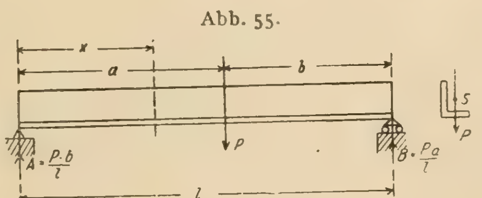
$$\sigma_u = + \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_u}} \cdot \sin \varphi = + \frac{M_x}{W_u} \cdot \sin \varphi$$

und
$$\sigma_o = - \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_o}} \cdot \sin \varphi = - \frac{M_x}{W_o} \cdot \sin \varphi.$$

Beispiel.

Ein als Balken auf zwei Stützen gelagertes Winkeleisen sei durch eine Kraft P derart belastet, daß die Kraftlinie mit der senkrechten Schwerachse zusammenfällt (Abb. 55).

Abb. 55.



Gesucht ist die Spannungsverteilung in dem im Abstand x vom linken Auflager befindlichen Querschnitt.

Gegeben sind das Biegungsmoment

$$M_x = A \cdot x = \frac{P \cdot b}{l} \cdot x$$

sowie die Querschnittsmomente 2. Ordnung J_x, J_y und Z_{xy}.

Sodann ist

$$\sigma_u = + \frac{M_x}{W_u} \cdot \sin \varphi \text{ und}$$

$$\sigma_o = - \frac{M_x}{W_o} \cdot \sin \varphi,$$

worin

$$W_u = \frac{J_n}{a_u} \text{ und } W_o = \frac{J_n}{a_o}.$$

J_n ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Nullinie, φ der Winkel, den die Kraftlinie mit der Nullinie einschließt. a_o und a_u sind die lotrechten Abstände der äußersten Kanten des Querschnitts von der Nullinie.

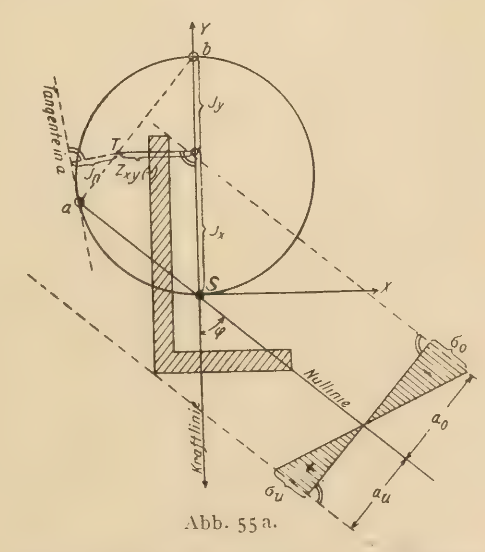


Abb. 55 a.

Es ist daher zunächst die Lage der Nullinie zu bestimmen. Die Nullinie ist die zur Kraftlinie konjugierte Achse, die mit Hilfe des Mohrschen Kreises

nach der auf Seite 31 angegebenen Konstruktion gefunden werden kann. Zunächst tragen wir daher von dem Schwerpunkt S $J_x + J_y$ auf der Y-Achse in irgend einem Maßstab als Strecken auf, ferner rechtwinklig zur Y-Achse das Zentrifugalmoment Z_{xy} (Abb. 55a), und zwar nach der negativen Seite der X-Achse, da Z_{xy} für den Winkeleisenquerschnitt negativ ist (vergl. Seite 21). Alsdann beschreiben wir mit dem Durchmesser $J_x + J_y$ den Mohrschen Kreis und verbinden b mit T bis zum Schnitt mit dem Kreise in a. Dann ist die Gerade aS die Konjugierte zur Kraftlinie, d. h. die Nullinie.

Zieht man jetzt durch die äußersten Kanten des Querschnitts Parallele zur Nullinie, so können die Abstände a_o und a_u sowie der Winkel φ, den die Kraftlinie mit der Nullinie einschließt, abgegriffen werden.

Das Trägheitsmoment J_n ist dann das vom Trägheitshauptpunkt T auf die Tangente im Punkt a gefällte Lot (vergl. Seite 29, Abb. 45).

Nunmehr sind die Spannungen

$$\sigma_o = - \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_o}} \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad \sigma_u = + \frac{M_x}{\frac{J_n}{a_u}} \cdot \sin \varphi$$

bestimmt, wodurch mit Hilfe des Spannungsdiagramms die Spannungsverteilung gegeben ist.

2. Zusammengesetzte Festigkeit.

a) Der Querschnitt werde auf Biegung und Zug bezw. Druck beansprucht (Abb. 56).

Auf den Querschnitt F eines Freiträgers wirke ein Moment M, dessen Ebene den Querschnitt F in der durch den Schwerpunkt S gehenden Kraftlinie schneidet und eine im Schwerpunkt angreifende achsiale Druckkraft P. Der

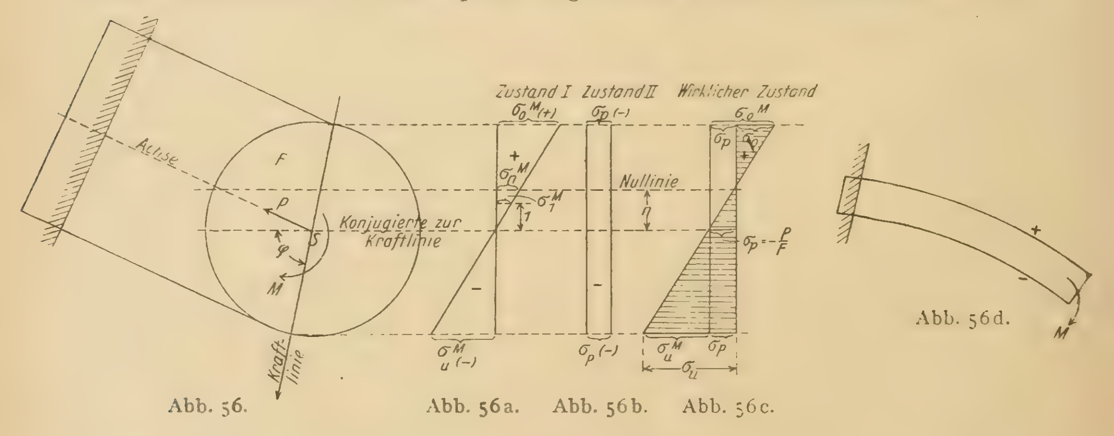


Abb. 56. Abb. 56a. Abb. 56b. Abb. 56c. Abb. 56d.

Querschnitt F sei beliebig geformt. Die Konjugierte zur Kraftlinie ist gegeben, da sie für jeden Querschnitt mit Hilfe des Mohrschen Kreises bestimmt werden kann. Sie schließe mit der Kraftlinie den gegebenen Winkel φ ein.

Wir untersuchen den Einfluß des Momentes und der Achsialkraft getrennt voneinander, zerlegen also den wirklichen Zustand in zwei Einzelzustände:

Zustand I. Es wirke nur das Moment M auf den Querschnitt, so daß reine Biegungfestigkeit vorliegt, die größten Randspannungen also nach den

für reine Biegungsfestigkeit aufgestellten Formeln ermittelt werden können. Man erhält allgemein

$$\sigma_o^M = -\frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi \text{ und } \sigma_u^M = -\frac{M}{W_u} \cdot \sin\varphi.$$

Man beachte die Vorzeichen. Hier werden die obersten Fasern verlängert, die untersten verkürzt (Abb. 56d).

Das zugehörige Spannungsdiagramm ist in Abb. 56a dargestellt. Die Nullinie ist für diesen Zustand die Konjugierte zur Kraftlinie, wie immer bei reiner Biegungsbeanspruchung.

Zustand II. Es wirke nur die im Schwerpunkt angreifende achsiale Druckkraft P.

Infolge dieser Belastung werden in sämtlichen Flächenelementen des Querschnitts gleich große Druckspannungen $\sigma_P = -\frac{P}{F}$ hervorgerufen, da sich die Kraft P gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt. Das Spannungsdiagramm ist daher ein Rechteck (Abb. 56b).

Wirklicher Zustand. Dieser Zustand entsteht durch Summierung der Einzelzustände I und II. Es sind daher die Diagramme der Einzelzustände derart zusammenzulegen, daß die Spannungen mit gleichem bezw. verschiedenem Vorzeichen addiert bezw. voneinander abgezogen werden können. So entsteht das in Abb. 56c dargestellte Diagramm. Man erhält für die obere Randspannung

$$\sigma_o = \sigma_o^M - \sigma_P \text{ (absolut genommen)} = \frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi - \frac{P}{F}$$

und für die untere Randspannung

$$\sigma_u = -\sigma_u^M - \sigma_P = -\frac{M}{W_u} \cdot \sin\varphi - \frac{P}{F}.$$

Bei gerader Belastung ist $\varphi = 90^\circ$, $\sin\varphi = 1$, so daß

$$\sigma_o = \frac{M}{W_o} - \frac{P}{F} \text{ und } \sigma_u = -\frac{M}{W_u} - \frac{P}{F}.$$

Zu beachten ist, daß in der Konjugierten zur Kraftlinie die Spannung gleich $-\frac{P}{F}$ ist, wie aus Abb. 56c hervorgeht.

Ist die Achsialkraft P eine Zugkraft, so ändern sich natürlich die Vorzeichen der Spannung σ_P. Es wird dann

$$\sigma_o = +\frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi + \frac{P}{F} \text{ und } \sigma_u = -\frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi + \frac{P}{F}.$$

Die Nullinie geht also jetzt nicht mehr durch den Schwerpunkt, sondern hat einen Abstand n von der Konjugierten zur Kraftlinie, der wie folgt berechnet wird:

Nach Abb. 56a ist für den Zustand I die Spannung σ_n^M im Abstande n von der Konjugierten zur Kraftlinie gleich $n \cdot \sigma_1^M$, wenn $\sigma_1^M = \frac{M}{J} \cdot \sin\varphi$ die Spannung im Abstande „eins" ist. Für den Zustand II ist die Spannung in demselben

Abstande n gleich $-\frac{P}{F}$ (Abb. 56b). Addiert man beide Spannungen, so erhält man die Gesamtspannung im Abstande n von der Konjugierten zur Kraftlinie, die gleich Null sein muß (Abb. 56c). Demgemäß gilt die Gleichung

$$n \cdot \sigma_1^M - \frac{P}{F} = n \cdot \frac{M}{J} \cdot \sin\varphi - \frac{P}{F} = 0.$$

Setzt man noch
$$\frac{J}{F} = i^2,$$

so findet man
$$n = \frac{P}{M} \cdot \frac{J}{F} \cdot \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{P}{M} \cdot \frac{i^2}{\sin\varphi}.$$

b) Der Querschnitt werde durch eine exzentrisch angreifende Achsialkraft P (Druck- oder Zugkraft) beansprucht (Abb. 57).

Bringt man im Schwerpunkt des Querschnitts die Kraft P noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an (wodurch am Gleichgewichtszustand nichts geändert wird, da die Kräfte P sich aufheben), so bilden die beiden doppelt durchstrichenen Kräfte P ein Kräftepaar vom Moment $M = P \cdot p$. Es wirken also jetzt auf den Querschnitt das Moment $M = P \cdot p$ und eine im Schwerpunkt angreifende achsiale Druckkraft P.

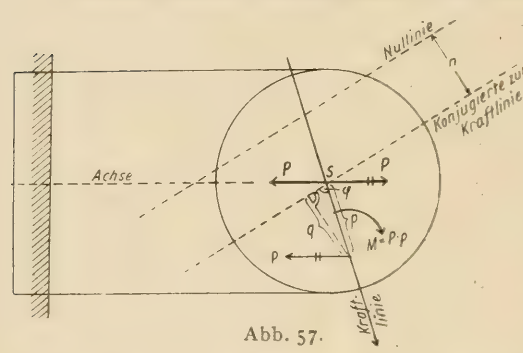


Abb. 57.

Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt. Es gelten daher genau die unter a) entwickelten Formeln:

$$\sigma_o = \frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi - \frac{P}{F} \text{ und } \sigma_u = -\frac{M}{W_u} \cdot \sin\varphi - \frac{P}{F};$$

$$n = \frac{P}{M} \cdot \frac{i^2}{\sin\varphi} = \frac{P}{P \cdot p} \cdot \frac{i^2}{\sin\varphi} = \frac{i^2}{p \cdot \sin\varphi}.$$

$p \cdot \sin\varphi$ ist der lotrechte Abstand q des Kraftangriffspunktes der exzentrischen Kraft von der Konjugierten zur Kraftlinie. Somit ist

$$n = \frac{i^2}{q}.$$

Man beachte, daß die Konjugierte zur Kraftlinie zwischen der Nullinie und dem Kraftangriffspunkt der exzentrischen Kraft P liegen muß, wie auch aus einem Vergleich mit Abb. 56 hervorgeht.

Beispiel.

Auf ein Widerlager vom Querschnitt $b \cdot h$ und Gewicht G wirke eine den Schwerpunkt schneidende wagerechte Kraft H (Abb. 58). Gesucht ist die Spannungsverteilung im Querschnitt $a—a$.

G und H seien zu einer Mittelkraft R zusammengesetzt, die den Querschnitt $a—a$ im Punkte c schneidet.

In diesem Punkte werde R wieder in H und G zerlegt. H kann bei Berechnung der Spannungsverteilung vernachlässigt werden.

Bringt man dann im Schwerpunkt S des Querschnitts a—a die Kraft G noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an, so bilden die beiden doppelt durchstrichenen Kräfte G ein Kräftepaar vom Moment $G \cdot g$, so daß auf den Querschnitt ein Moment und eine im Schwerpunkt angreifende achsiale Druckkraft wirken. Es liegt daher der unter b) angegebene Fall vor.

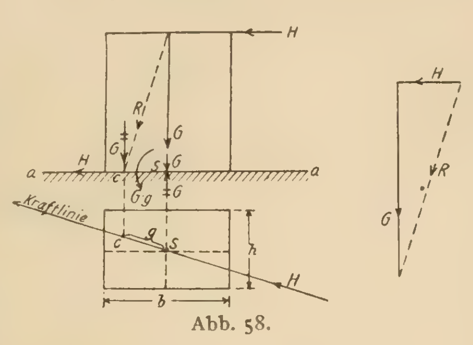


Abb. 58.

Die Ebene des Kräftepaares schneidet die Querschnittsebene in der Kraftlinie. Die Nullinie verläuft parallel zur Konjugierten zur Kraftlinie im lotrechten Abstand $n = \frac{i^2}{q}$, worin q der lotrechte Abstand des Kraftangriffspunktes c von der Konjugierten zur Kraftlinie und $i^2 = \frac{J}{F}$ ist.

Zunächst ist daher die Lage der Konjugierten zur Kraftlinie zu ermitteln, eine Aufgabe, welche mit Hilfe des Mohrschen Kreises gelöst werden kann (Abb. 59).

Nach Ermittlung der Querschnittsmomente $J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$, $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ und $Z_{xy} = 0$ tragen wir vom Schwerpunkt S in irgend einem Maßstabe auf der Y-Achse zuerst J_x, daran anschließend J_y auf und beschreiben mit dem Durchmesser $J_x + J_y$ den Mohrschen Kreis. Der Trägheitshauptpunkt T liegt, weil $Z_{xy} = 0$ ist, auf der Y-Achse. Darauf verbinden wir b mit T bis zum Schnitt mit dem Kreise in a und ziehen die Gerade aS, die dann die Konjugierte zur Kraftlinie ist (vergl. Seite 32, Abb. 47). Parallel zu dieser verläuft die Nullinie im lotrechten

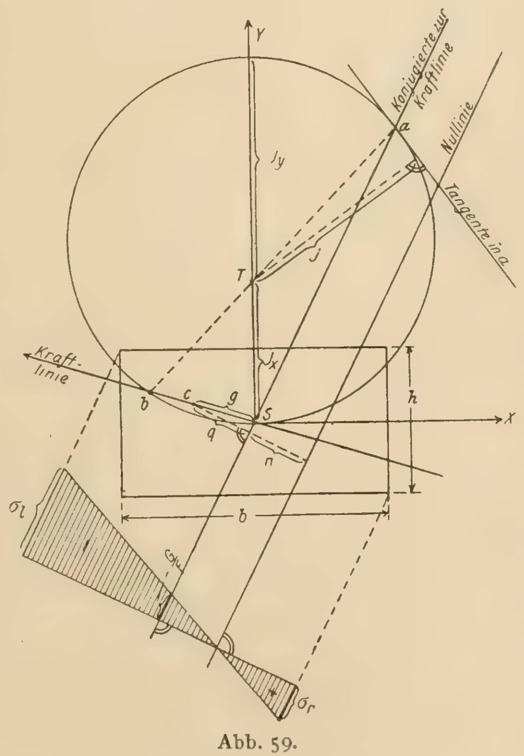


Abb. 59.

Abstand $n = \frac{i^2}{q}$, und zwar derart, daß die Konjugierte zur Kraftlinie zwischen der Nullinie und dem Kraftangriffspunkt c liegt, dessen lotrechter Abstand q von der Konjugierten zur Kraftlinie dann aus der Zeichnung abgegriffen werden kann.

Ferner ist $i^2 = \frac{J}{F}$, worin J, das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die Konjugierte zur Kraftlinie, das vom Trägheitshauptpunkt T auf die Tangente in a gefällte Lot ist (vergl. Seite 29, Abb. 45). Auch dieses wird in dem Maßstabe, in dem J_x und J_y aufgetragen sind, aus der Zeichnung abgegriffen. $F = b \cdot h$.

Zieht man dann durch die äußersten Kanten des Querschnitts Parallele zur Nullinie, trägt auf der Konjugierten zur Kraftlinie die Spannung $-\frac{G}{F} = -\frac{G}{b \cdot h}$ auf (Abb. 59) und verbindet den Endpunkt dieser Spannung mit dem in der Nullinie gelegenen Nullpunkt des Spannungsdiagramms, so sind die äußersten Randspannungen σ_l und σ_r bestimmt. Sie werden in dem Maßstabe, in welchem die Spannung $-\frac{G}{F}$ aufgetragen ist, abgegriffen.

§ 4. Berechnung der Spannungen mittels des Kerns.

1. Definition des Kerns (Abb. 60).

Ein beliebig geformter Querschnitt vom Flächeninhalt F werde im Punkt 1 durch eine Kraft P exzentrisch gedrückt, so daß die Verbindungslinie $1S$ die Kraftlinie ist. Die Konjugierte zur Kraftlinie ist mit Hilfe des Mohrschen

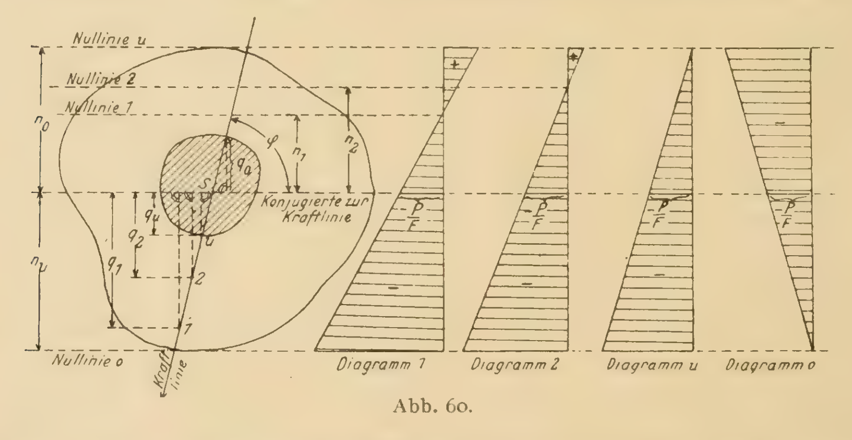


Abb. 60.

Kreises gegeben, womit auch der Winkel φ bestimmt ist, den die beiden konjugierten Achsen miteinander einschließen.

Zu diesem Kraftangriffspunkt 1 gehört eine Nullinie 1 im lotrechten Abstand $n_1 = \frac{i^2}{q_1} = \frac{J}{F \cdot q_1}$ von der Konjugierten zur Kraftlinie sowie das Diagramm 1.

Greift jetzt die Kraft P auf derselben Kraftlinie im Punkt 2 an, so entspricht diesem Kraftangriffspunkt eine Nullinie 2 im Abstand $n_2 = \frac{i^2}{q_2} = \frac{J}{F \cdot q_2}$ und das Diagramm 2.

$\frac{J}{F}$ ist unverändert geblieben, q_2 ist aber kleiner als q_1, mithin n_2 größer als n_1 geworden. Die Nullinie hat sich also von der Konjugierten zur Kraftlinie entfernt.

Es wird schließlich auf derselben Kraftlinie einen Kraftangriffspunkt u geben, zu dem eine Nullinie u gehört, welche die Umhüllungslinie des Querschnitts gerade tangiert und von der Konjugierten zur Kraftlinie den Abstand n_o hat. Zwischen q_u und n_o besteht dann die Beziehung $n_o = \frac{i^2}{q_u} = \frac{J}{F \cdot q_u}$. Ist n_o gegeben, so kann q_u und damit der Punkt u berechnet werden. Man findet

$$q_u = \frac{J}{F \cdot n_o} = \frac{\frac{J}{n_o}}{F} = \frac{W_o}{F}.$$

Hierzu gehört dann das Diagramm u, das nur ein Vorzeichen hat.

Man nennt einen derartigen Kraftangriffspunkt u, dem nur Spannungen gleichen Vorzeichens entsprechen, einen **Kernpunkt**.

Sinngemäß findet man die Lage des oberen Kernpunktes o aus der Gleichung

$$n_u = \frac{i^2}{q_o} = \frac{J}{F \cdot q_o}; \quad q_o = \frac{\frac{J}{n_u}}{F} = \frac{W_u}{F}.$$

Eine Last P im Punkt o hat daher das Diagramm o zur Folge.

Berechnet man auf diese Weise für eine ganze Schar von den Querschnitt tangierenden Nullinien die zugehörigen Kraftangriffspunkte und verbindet sie miteinander, so entsteht die Kernlinie. Die von der Kernlinie eingeschlossene Fläche heißt der Kern des Querschnitts.

Man kann daher sagen: Rollt die Nullinie auf der Umhüllungslinie des Querschnitts, so beschreibt der zugehörige Kraftangriffspunkt den Umfang des Kerns.

Bei der Berechnung der Kernpunkte beachte man, daß die dem betr. Kernpunkt entsprechende Nullinie den Querschnitt an keiner Stelle schneiden darf. Bei einspringenden Ecken muß daher die Nullinie nach Abb. 61 gelegt werden.

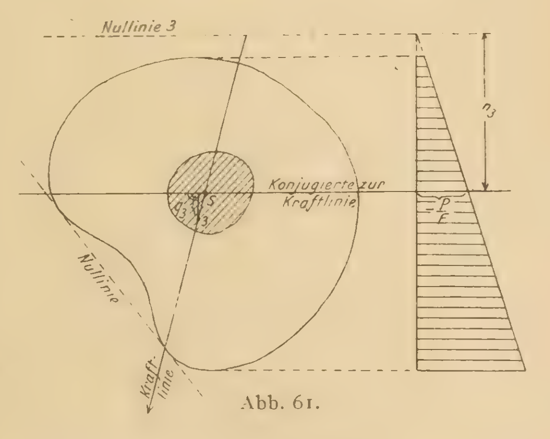


Abb. 61.

Wirkt die Last P im Punkt 3 (Abb. 61), also innerhalb des Kerns, so ist $n_3 = \frac{J}{F \cdot q_3}$. Da q_3 noch kleiner geworden ist, $\frac{J}{F}$ sich aber nicht geändert hat, so ist n_3 noch größer geworden. Die Nullinie hat daher keinen Punkt mehr mit dem Querschnitt gemeinsam. Diesem Kraftangriffspunkt 3 entspricht daher das Diagramm 3, das ebenfalls nur ein Vorzeichen hat. Man kann also sagen:

Kräfte, die auf der Kernlinie oder innerhalb des Kerns angreifen, haben nur Spannungen einerlei Vorzeichens zur Folge.

Von großer Wichtigkeit ist die Kenntnis des Kerns für Baumaterialien, die gewisse Spannungen gar nicht oder nur in geringem Maße ertragen

können, z. B. für Mauerwerk oder Beton, die im wesentlichen nur geeignet sind, Druckspannungen aufzunehmen. Man wird bei derartigen Bauwerken die Druckkräfte nur innerhalb des Kerns oder höchstens auf der Kernlinie angreifen lassen. Aber auch für andere Materialien, die sowohl für Zug- als auch für Druckspannungen geeignet sind, wird die Kenntnis des Kerns zur schnellen Berechnung der Spannungen von Wichtigkeit sein. Es lassen sich nämlich sehr einfache Formeln für die größten Randspannungen aufstellen, wie nachstehende Untersuchung zeigt:

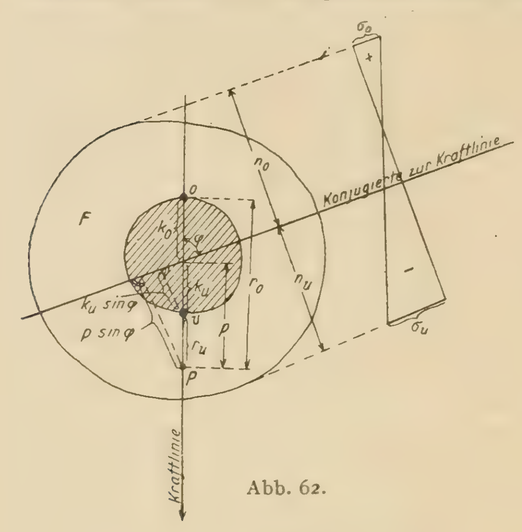


Abb. 62.

Der Querschnitt F, dessen Kern und Konjugierte zur Kraftlinie gegeben sei, werde durch eine Kraft P exzentrisch gedrückt (Abb. 62). Nach Seite 42 ist dann die obere Randspannung

$$\sigma_o = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W_o} \cdot \sin\varphi$$

$$= -\frac{P}{F} + \frac{M}{\frac{J}{n_o}} \cdot \sin\varphi$$

$$= -\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{\frac{J}{n_o}} \cdot \sin\varphi .$$

Anderseits besteht die Beziehung

$$n_o = \frac{i^2}{k_u \cdot \sin\varphi} \text{ (vergl. Seite 45)} = \frac{J}{F \cdot k_u \cdot \sin\varphi}.$$

J ist das Trägheitsmoment in bezug auf die Konjugierte zur Kraftlinie. Setzt man $n_o = \frac{J}{F \cdot k_u \cdot \sin\varphi}$ in die für σ_o aufgestellte Gleichung ein, so wird

$$\sigma_o = -\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p \cdot \sin\varphi}{J} \cdot \frac{J}{F \cdot k_u \cdot \sin\varphi}$$

$$= -\frac{P}{F} + \frac{P \cdot p}{F \cdot k_u} = \frac{P}{F}\left(-1 + \frac{p}{k_u}\right) = \frac{P}{F}\left(\frac{p - k_u}{k_u}\right) = \frac{\boldsymbol{P \cdot r_u}}{\boldsymbol{F \cdot k_u}}.$$

Aus der Gleichung $n_o = \frac{J}{F \cdot k_u \cdot \sin\varphi}$ ergibt sich $F \cdot k_u = \frac{J}{n_o \cdot \sin\varphi}$; daher

$$\sigma_o = \frac{P \cdot r_u}{\frac{J}{n_o \cdot \sin\varphi}} = \frac{P \cdot r_u}{\frac{J}{n_o}} \cdot \sin\varphi = \frac{P \cdot r_u}{W_o} \cdot \sin\varphi = + \frac{\boldsymbol{M_u}}{\boldsymbol{W_o}} \cdot \boldsymbol{\sin\varphi},$$

worin M_u das Moment für den von der Kraftlinie geschnittenen unteren Kernpunkt u (Kernmoment) bedeutet.

Sinngemäß findet man

$$\sigma_u = -\frac{P}{F} - \frac{M}{\frac{J}{n_u}} \cdot \sin\varphi .$$

Mit
$$n_u = \frac{i^2}{k_o \cdot \sin \varphi} = \frac{J}{F \cdot k_o \cdot \sin \varphi}$$
wird dann
$$\sigma_u = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot p \cdot \sin \varphi}{J} \cdot \frac{J}{F \cdot k_o \cdot \sin \varphi} = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot p}{F \cdot k_o}$$
$$= -\frac{P}{F}\left(1 + \frac{p}{k_o}\right) = -\frac{P}{F}\left(\frac{k_o + p}{k_o}\right) = -\frac{P \cdot r_o}{F \cdot k_o}.$$
Hierin ist $F \cdot k_o = \frac{J}{n_u \cdot \sin \varphi}$ (aus der für n_u aufgestellten Gleichung).

Daher wird
$$\sigma_u = -\frac{P \cdot r_o}{\frac{J}{n_u}} \cdot \sin \varphi = -\frac{M_o}{W_u} \cdot \sin \varphi.$$

M_o ist das Moment für den oberen von der Kraftlinie geschnittenen Kernpunkt o.

Fällt die Kraftlinie mit einer Hauptachse zusammen, was in der Regel der Fall ist, so schließt sie mit ihrer Zugeordneten den Winkel $\varphi = 90°$ ein, so daß $\sin \varphi = 1$ wird. Alsdann ist
$$\sigma_o = +\frac{M_u}{W_o} \text{ und } \sigma_u = -\frac{M_o}{W_u}.$$

Greift die Druckkraft P innerhalb des Kerns an, so sind die Vorzeichen natürlich beide negativ (Abb. 63). Man erhält daher
$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} \cdot \sin \varphi = -\frac{P \cdot r_u}{W_o} \cdot \sin \varphi$$
$$\sigma_u = -\frac{M_o}{W_u} \cdot \sin \varphi = -\frac{P \cdot r_o}{W_u} \cdot \sin \varphi.$$

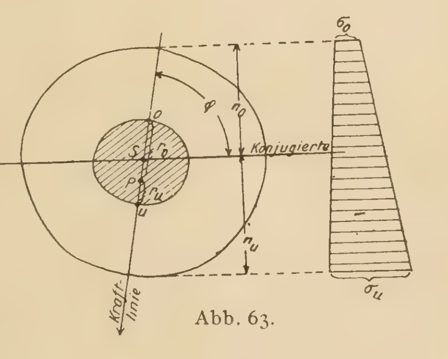


Abb. 63.

Ist die Kraft P eine Zugkraft, so sind sämtliche Vorzeichen umzukehren.

Für den auf Biegung beanspruchten Balken oder Bogen lauten die Formeln sinngemäß ebenso, nur gilt für die obere Randspannung das negative, für die untere das positive Vorzeichen, da oberhalb der Nullinie Druck- und unterhalb Zugspannungen herrschen. Demgemäß ist
$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} \text{ und } \sigma_u = +\frac{M_o}{W_u}.$$

Nachstehend möge zunächst für einige häufiger vorkommende Querschnitte der Kern bestimmt werden.

a) Der Rechteckquerschnitt (Abb. 64).

Wir geben der Nullinie zunächst die Lage I. Die ihr entsprechende Konjugierte zur Kraftlinie verläuft parallel zur Nullinie und geht durch den Schwerpunkt, fällt also mit der X-Achse zusammen. Der zugehörige Kernpunkt u liegt auf der Kraftlinie, mithin auf der Zugeordneten zur X-Achse,

d. h. auf der Y-Achse, und zwar im Abstand $k_u = \frac{W_o}{F}$ von der X-Achse. W_o ist das Widerstandsmoment in bezug auf die Konjugierte zur Kraftlinie, d. h. in bezug auf die X-Achse. Man erhält daher

$$k_u = \frac{W_x}{F} = \frac{\frac{b \cdot h^2}{6}}{b \cdot h} = \frac{h}{6}.$$

Entsprechend findet man

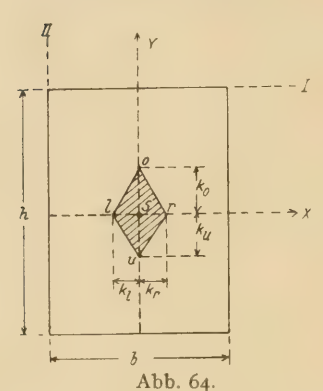


Abb. 64.

$$k_o = \frac{W_u}{F} = \frac{W_x}{F} = \frac{h}{6}.$$

Sinngemäß findet man für die Lage II der Nullinie die zugehörigen Kernpunkte l und r mit Hilfe der Gleichungen

$$k_l = \frac{W_r}{F} = \frac{W_y}{F} = \frac{\frac{h \cdot b^2}{6}}{b \cdot h} = \frac{b}{6}$$

und
$$k_r = \frac{W_l}{F} = \frac{W_y}{F} = \frac{b}{6}.$$

Die Kernpunkte o und u bezw. l und r liegen daher auf den Drittelpunkten der Y- bezw. X-Achse.

Die Verbindungslinien der gefundenen Kernpunkte schließen dann den Kern des Querschnitts ein.

b) Das Dreieck (Abb. 65).

Wir geben der Nullinie zunächst die Lage I. Die ihr entsprechende Konjugierte zur Kraftlinie verläuft parallel zur Nullinie und geht durch den Schwerpunkt, fällt also mit der X-Achse zusammen. Die Kraftlinie ist daher die Mitteltransversale (Y-Achse), denn für das Achsensystem $X—Y$ ist das Zentrifugalmoment gleich Null, weil der Querschnitt in bezug auf die Y-Achse schief symmetrisch ist. Auf dieser Kraftlinie muß der zugehörige Kraftangriffspunkt 1 liegen,

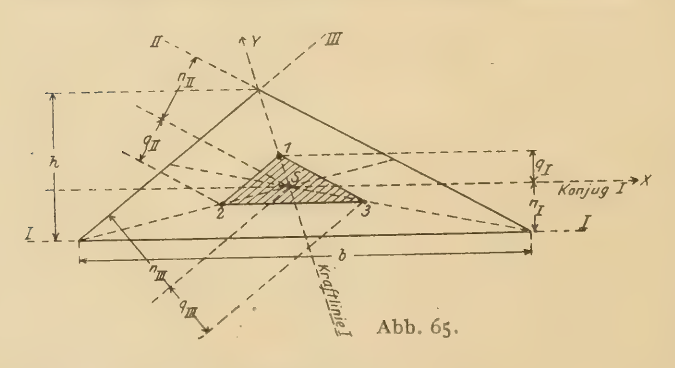


Abb. 65.

und zwar im lotrechten Abstand

$$q_{\mathrm{I}} = \frac{i^2}{n_{\mathrm{I}}} = \frac{J_{\text{Konj. I}}}{F \cdot n_{\mathrm{I}}} = \frac{J_x}{\frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3}} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{36}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{h}{6}$$

von der Konjugierten I (X-Achse).

Gibt man weiter der Nullinie noch die Lagen II und III, berechnet die zugehörigen Kernpunkte 2 und 3 und verbindet diese miteinander, so erkennt man leicht, daß der Kern des Dreiecks ein ähnliches Dreieck ist, dessen Schwerpunkt mit dem Querschnittsschwerpunkt zusammenfällt.

c) Der Kreisquerschnitt (Abb. 66).

Für die beliebige Lage I der Nullinie ist die parallel zu ihr verlaufende X-Achse die Konjugierte zur Kraftlinie. Da diese eine Hauptachse ist, so muß auch die Kraftlinie als Zugeordnete zur X-Achse eine Hauptachse sein, d. h. sie muß mit der X-Achse einen Winkel von 90° einschließen. Die Y-Achse ist mithin die zur Nullinie I gehörende Kraftlinie. Auf ihr muß der zugehörige Kernpunkt o liegen, und zwar im Abstand $k_o = \frac{W_u}{F}$, worin W_u das Widerstandsmoment in bezug auf die Konjugierte zur Kraftlinie, d.h. die X-Achse ist. Man findet

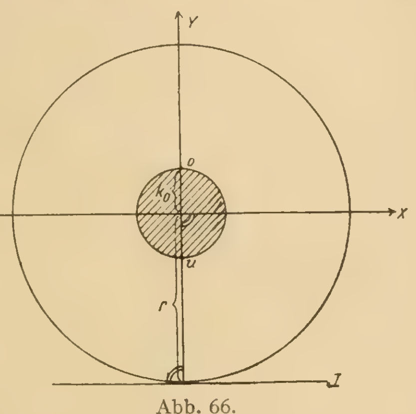


Abb. 66.

$$W_u = W_x = \frac{J_x}{r} = \frac{\frac{\pi \cdot r^4}{4}}{r} = \frac{\pi \cdot r^3}{4}.$$

Somit erhält man $$k_o = \frac{W_u}{F} = \frac{W_x}{F} = \frac{\frac{\pi \cdot r^3}{4}}{\pi \cdot r^2} = \frac{r}{4}.$$

Berechnet man so für eine Schar von den Querschnitt berührenden Nullinien die zugehörigen Kernpunkte, so findet man, daß alle den gleichen Abstand $\frac{r}{4}$ von der zugehörigen Konjugierten zur Kraftlinie haben. Der Kern ist daher ein Kreisquerschnitt vom Radius $\frac{r}{4}$.

d) Der I-Querschnitt (Abb. 67).

Man findet genau wie beim Rechteckquerschnitt

$$k_o = k_u = \frac{W_x}{F} \text{ und } k_l = k_r = \frac{W_y}{F}.$$

W_x, W_y und F können aus Profiltabellen entnommen werden.

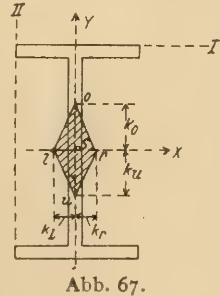


Abb. 67.

e) Der genietete Trägerquerschnitt (Abb. 68).

Nach Ermittelung der Schwerpunktslage und der Trägheitsmomente J_x und J_y findet man

$$k_o = \frac{W_u}{F} \text{ und } k_u = \frac{W_o}{F},$$

worin $$W_u = \frac{J_x}{a_u} \text{ und } W_o = \frac{J_x}{a_o}.$$



Ferner ist $$k_l = k_r = \frac{W_y}{F},$$

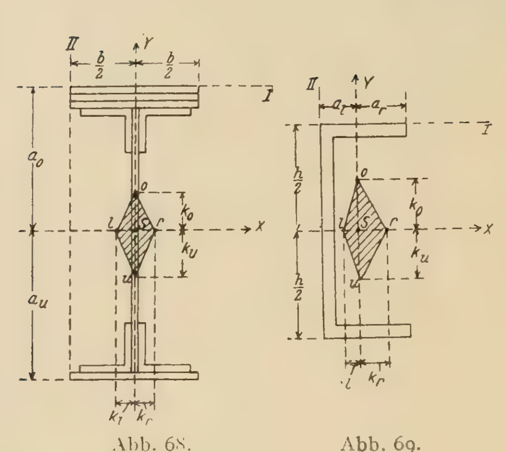


Abb. 68. Abb. 69.

worin $$W_y = \frac{J_y}{\frac{b}{2}}$$

f) Der [-Querschnitt (Abb. 69).

Die Schwerpunktslage sowie J_x und J_y werden aus Profiltabellen gefunden. Dann ist

$$k_o = k_u = \frac{W_x}{F}, \text{ worin } W_x = \frac{J_x}{\frac{h}{2}}.$$

Ferner ist

$$k_l = \frac{W_r}{F} \text{ und } k_r = \frac{W_l}{F}.$$

Hierin ist $$W_r = \frac{J_y}{a_r} \text{ und } W_l = \frac{J_y}{a_l}.$$

g) Der Winkeleisenquerschnitt (Abb. 70).

Das Beispiel ist sehr lehrreich und zeigt ganz allgemein die Berechnung der Kernpunkte eines beliebigen unsymmetrischen Querschnitts.

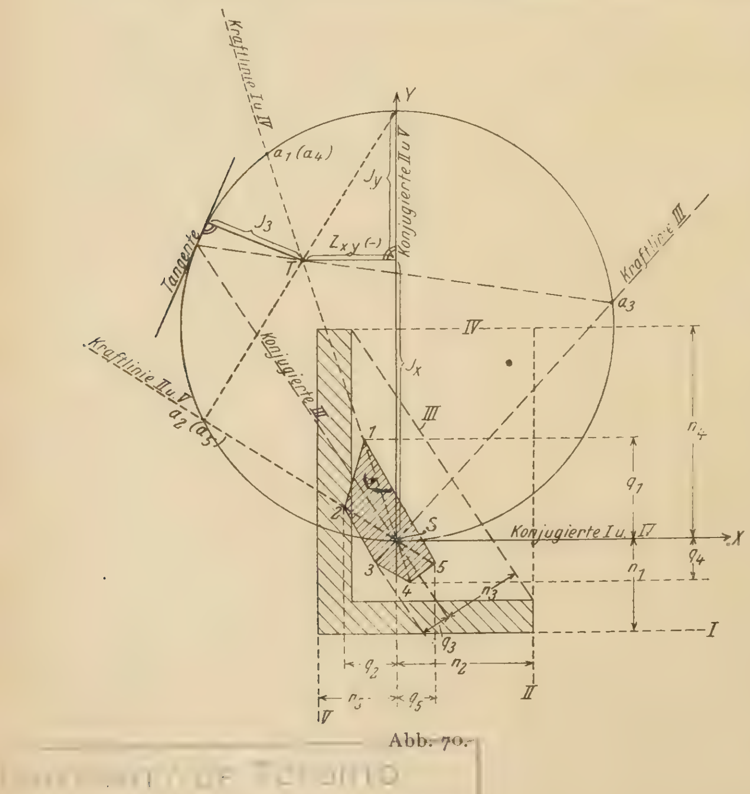


Abb. 70.

Gegeben seien die Lage des Schwerpunktes sowie die Querschnittsmomente J_x, J_y und Z_{xy} für das rechtwinklige Schwerachsensystem $X—Y$ (vergl. § 2, i, Seite 20).

Zuerst geben wir der Nullinie die Lage I. Die Konjugierte zur Kraftlinie verläuft parallel zur Nullinie I und muß durch den Schwerpunkt gehen, fällt also mit der X-Achse zusammen. Die zugehörige Kraftlinie ist daher die Konjugierte zur X Achse, die nach Seite 31 mit Hilfe des Mohrschen Kreises gefunden wird. Wir

zeichnen demgemäß mit dem Durchmesser $J_x + J_y$ einen Kreis und bestimmen den Trägheitshauptpunkt T durch rechtwinkliges Absetzen des Zentrifugalmoments Z_{xy} von der Y-Achse. Nach Seite 21 ergab sich Z_{xy} negativ, so daß es nach der negativen Seite der X-Achse abgetragen werden muß. Die Konjugierte zur X-Achse finden wir nun, wenn wir den Schnittpunkt der X-Achse mit dem Kreise (in diesem Falle S) mit T verbinden, diese Gerade zum Schnitt mit dem Kreise in a_1 bringen und a_1 mit dem Schwerpunkt verbinden. $a_1 - S$ ist alsdann die Konjugierte zur X-Achse, also die Kraftlinie I. Auf dieser liegt der Kernpunkt 1 im lotrechten Abstand $q_1 = \frac{i^2}{n_1} = \frac{J_x}{F \cdot n_1}$ von der X-Achse.

Sodann geben wir der Nullinie die Lage II. Die Konjugierte zur Kraftlinie ist dann die Y-Achse, die Kraftlinie II ist daher die Konjugierte zu dieser Achse, die wie die Kraftlinie I mittels des Mohrschen Kreises gefunden wird. Der zugehörige Kernpunkt 2 liegt auf dieser Kraftlinie II im lotrechten Abstand $q_2 = \frac{i^2}{n_2} = \frac{J_y}{F \cdot n_2}$. Alsdann erhält die Nullinie die Lage III. Die Konjugierte III geht wieder durch S und verläuft parallel zur Nullinie III. Die Kraftlinie III findet man wie vor mittels des Mohrschen Kreises. Der Kernpunkt 3 liegt im lotrechten Abstand $q_3 = \frac{i^2}{n_3} = \frac{J_3}{F \cdot n_3}$ von der Konjugierten III. J_3 findet man mit Hilfe des Mohrschen Kreises als Trägheitsmoment in bezug auf die Konjugierte III. Man bringt diese also zum Schnitt mit dem Kreise, zeichnet im Schnittpunkt die Tangente an den Kreis und fällt vom Trägheitshauptpunkt T das Lot auf die Tangente. Dieses ist dann $= J_3$, und muß in dem Maßstab abgegriffen werden, in welchem J_x, J_y und Z_{xy} aufgetragen sind.

Die Abstände n der Nullinien von den zugehörigen Konjugierten zu den Kraftlinien werden durch Abgreifen aus der Zeichnung entnommen.

Entsprechend findet man noch mittels der Nullinien IV und V die Kernpunkte 4 und 5.

Durch Verbindung der Kernpunkte 1 bis 5 erhält man dann die Kernlinie, welche den Kern des Querschnitts einschließt.

2. Beispiele zur Berechnung der Spannungsverteilung.

1. Gesucht sei die Spannungsverteilung in dem im Abstand x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt eines durch eine schräge Kraft P belasteten hölzernen Balkens von rechteckigem Querschnitt (Abb. 71).

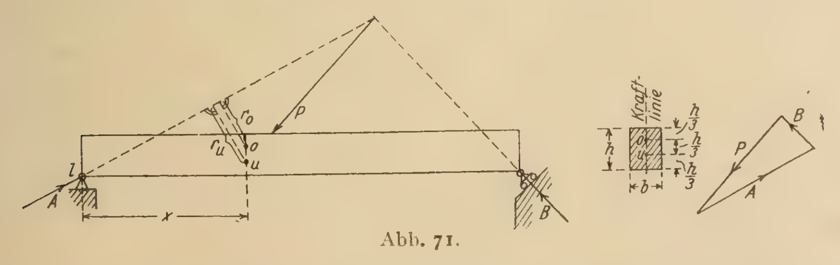


Abb. 71.

Der Auflagerdruck B an dem beweglichen Auflager muß (wenn man, wie üblich, von den Reibungswiderständen der Gleitbahn absieht) senkrecht

zur Gleitbahn gerichtet sein. Da drei Kräfte nur dann im Gleichgewicht sein können, wenn sie sich in einem Punkt schneiden, so muß der Auflagerdruck A durch den Schnittpunkt von B und P gehen. Die Größe von A und B findet man dann entweder zeichnerisch durch Zerlegung der Kraft P nach den Richtungen von A und B oder durch Rechnung mit Hilfe von Momentengleichungen für die Punkte l und r.

Nunmehr können die Randspannungen mittels der Formeln

$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} \text{ und } \sigma_u = +\frac{M_o}{W_u}$$

bestimmt werden. Nach Bestimmung der Kernpunkte o und u, die für den rechteckigen Querschnitt durch Drittelung der Kraftlinie gefunden werden, berechnet man die Kernmomente M_u und M_o, und zwar am bequemsten vom links abgetrennten Teil aus, weil hier nur eine Kraft wirksam ist. Man erhält demgemäß

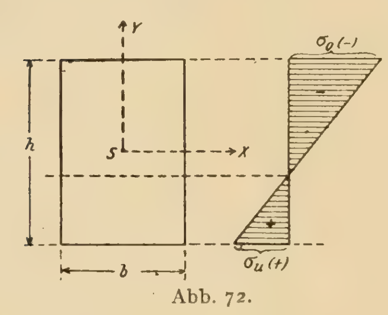


Abb. 72.

$$M_u = +A \cdot r_u \text{ und } M_o = +A \cdot r_o.$$

Mit
$$W_o = W_u = W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

ist alsdann

$$\sigma_o = -\frac{6 \cdot A \cdot r_u}{b \cdot h^2} \text{ und } \sigma_u = +\frac{6 \cdot A \cdot r_o}{b \cdot h^2}.$$

Damit ist das Spannungsdiagramm bestimmt (Abb. 72). Die größte Spannung ist σ_o, da $r_u > r_o$ und σ_o von r_u abhängt.

2. Gesucht ist die Spannungsverteilung in dem Einspannungsquerschnitt des in Abb. 73 dargestellten, durch eine Einzellast am Ende belasteten Freiträgers. Der Querschnitt sei rechteckig, so daß die Kernpunkte o und u durch Drittelung der Kraftlinie bestimmt sind.

Abb. 73.

Man findet
$$M_o = -P \cdot r_o \text{ und}$$
$$M_u = -P \cdot r_u.$$

Alsdann ist
$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} = -\frac{-P \cdot r_u}{W_x} = +\frac{6 \cdot P \cdot r_u}{b \cdot h^2};$$

$$\sigma_u = +\frac{M_o}{W_u} = +\frac{-P \cdot r_o}{W_x} = -\frac{6 \cdot P \cdot r_o}{b \cdot h^2}.$$

Man beachte, daß das Widerstandsmoment in bezug auf die Konjugierte zur Kraftlinie, also die X-Achse zu nehmen ist. Die größte Spannung ist σ_u, da $r_o > r_u$ und σ_u von r_o abhängt.

3. Gesucht ist die Spannungsverteilung des im Abstand x vom linken Auflager befindlichen Querschnitts eines Dreigelenkbogens (Abb. 74). Der Querschnitt sei gegeben (Abb. 74a).

Die Kernpunkte o und u sind bestimmt mittels der Formeln

$$k_o = \frac{W_u}{F} \text{ und } k_u = \frac{W_o}{F}, \text{ worin } W_u = \frac{J_x}{a_u}, \; W_o = \frac{J_x}{a_o}$$

und F der Flächeninhalt des Querschnitts ist. Die Randspannungen findet man dann mit Hilfe der Formeln

$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} \text{ und}$$

$$\sigma_u = +\frac{M_o}{W_u}.$$

M_u und M_o sind die Kernmomente für die Kernpunkte u und o.

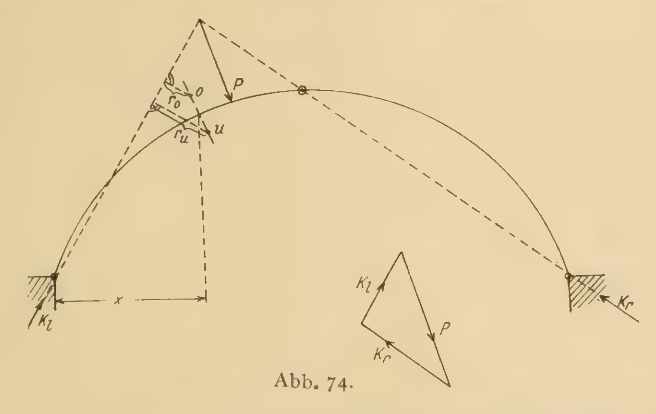


Abb. 74.

Um diese bestimmen zu können, müssen zunächst die Stützenwiderstände K_l und K_r nach Größe und Richtung bekannt sein. Da nur die linke Scheibe belastet ist (der Bogen selbst ist als gewichtslos anzusehen, weil nur der Einfluß der Last P gesucht ist), so muß der Stützenwiderstand K_r durch das Scheitelgelenk gehen, weil sich andernfalls die unbelastete rechte Scheibe um das Scheitelgelenk drehen, der Gleichgewichtszustand also gestört würde. Der linke Stützenwiderstand K_l ist dann bestimmt durch die Bedingung, daß die Kräfte P, K_r und K_l sich in einem Punkt schneiden müssen. Die Größen von K_l und K_r findet man sodann durch Zerlegung von P nach den Richtungen von K_l und K_r.

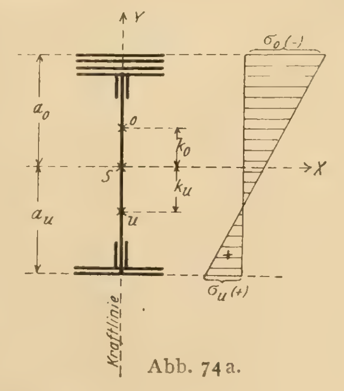


Abb. 74a.

Nunmehr findet man (vom links abgetrennten Teil aus)

$$M_u = +K_l \cdot r_u \text{ und } M_o = +K_l \cdot r_o.$$

Mithin wird

$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} = -\frac{K_l \cdot r_u}{W_o}$$

und

$$\sigma_u = +\frac{M_o}{W_u} = +\frac{K_l \cdot r_o}{W_u}.$$

Durch Auftragen der errechneten Spannungen ist das Spannungsdiagramm und damit die Spannungsverteilung bestimmt (Abb. 74a).

§ 5. Berechnung der Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Querschnitt.

Belastet man zwei lose übereinander liegende Balken, so verbiegen sie sich einzeln nach Abb. 75, da sich jedesmal die oberen Fasern verkürzen und die unteren verlängern. Die beiden Balken verschieben sich also gegeneinander.



Abb. 75.

Verbindet man sie nun z.B. durch eingelegte Dübel miteinander (Abb. 75a) so wird die gegenseitige Verschiebung durch die Dübel verhindert. Es müssen daher in der Richtung der Achse des Balkens Kräfte auftreten, welche die Dübel auf Abscheren beanspruchen. Man nennt diese Kräfte Schubkräfte.

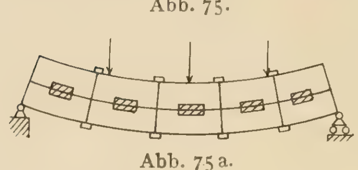
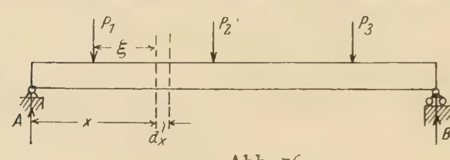


Abb. 75a.

In nachstehender Entwicklung soll die Berechnung der Größe der Schubkraft für einen beliebigen, im Abstand x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt gezeigt werden. Die Querschnittsform sei beliebig. Die Kraftlinie falle mit einer Hauptachse zusammen.

Gegeben ist das Moment $M_x = A \cdot x - P_1 \cdot \xi$ und die Querkraft $Q_x = A - P_1$ für den fraglichen Querschnitt (Abb. 76).

Wir führen in den Abständen x und $x + dx$ vom linken Auflager je einen senkrechten Schnitt durch den Balken, außerdem noch in dem herausgeschnittenen Balkenelement einen wagerechten Schnitt in der Richtung der Balkenachse und untersuchen den Gleichgewichtszustand des unteren abgetrennten Teils mit der Schnittfläche I, der parallelen, im Abstand dx von I liegenden Schnittfläche II und der wagerechten Schnittfläche III, nachdem vorher an den Schnittflächen die dort wirkenden inneren Kräfte angebracht sind, so daß Gleichgewicht vorhanden ist (Abb. 76a)



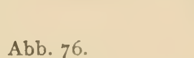
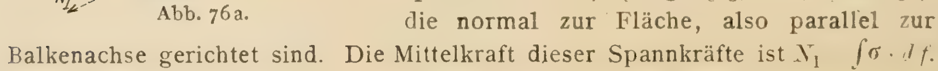


Abb. 76.

Abb. 76a.

Auf die Fläche I wirken die von den Biegungsspannungen herrührenden Normalspannkräfte $\sigma \cdot df$ (vergl. § 3, 1, a, Seite 36), die normal zur Fläche, also parallel zur Balkenachse gerichtet sind. Die Mittelkraft dieser Spannkräfte ist $N_1 = \int \sigma \cdot df$.

Setzt man nach Seite 37 $\sigma = \frac{M_x}{J} \cdot v$, so wird



$$N_1 = \frac{M_x}{J} \int v \cdot df = \frac{M_x}{J} \cdot \mathfrak{S},$$

worin $\mathfrak{S}$ das statische Moment der Fläche I in bezug auf die Nulllinie, J das Trägheitsmoment des ganzen Balkenquerschnitts in bezug auf die Nullinie ist.

Da die Fläche II im unendlich nahen Abstand dx von der Fläche I liegt, so ist

$$N_{II} = \frac{(M_x + dM_x)\,\mathfrak{S}}{J},$$

denn die Momente für die beiden in unendlich kleinem Abstand voneinander liegenden Querschnitte unterscheiden sich nur um ihr Differential.

In der Schnittfläche III wirkt endlich noch — ebenfalls in der Richtung der Balkenachse — die Schubkraft T, die den oberen Balkenteil gegen den unteren zu verschieben sucht. Es liegt also ein räumliches Kräftesystem vor. Setzt man dann die Gleichgewichtsbedingung „Summe aller in Richtung der Balkenachse wirkenden Kräfte gleich Null" an, so ergibt sich $N_I + T - N_{II} = 0$, d. h.

$$M_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J} + T - (M_x + dM_x)\,\frac{\mathfrak{S}}{J} = 0,$$

woraus

$$T = dM_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J}.$$

Zwischen Moment und Querkraft besteht nun die Beziehung

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x,$$

also $dM_x = Q_x \cdot dx$ (vergl. III. Abschnitt, § 6, 1, Seite 62). Setzt man diesen Wert in die für T aufgestellte Gleichung ein, so erhält man

$$T = Q_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J} \cdot dx.$$

Das ist die auf die Länge dx des Balkens entfallende Schubkraft. Auf die Längeneinheit entfällt dann die Schubkraft

$$T_1 = Q_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J} \cdot \frac{dx}{dx} = Q_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J}.$$

Die Schubspannung im Querschnitt III erhält man, wenn man die auf den Querschnitt III wirkende Schubkraft durch den Flächeninhalt des Querschnitts dividiert, d. h.

$$\tau = Q_x \cdot \frac{\mathfrak{S}}{J} \cdot \frac{dx}{w \cdot dx} = \frac{Q_x \cdot \mathfrak{S}}{J \cdot w}.$$

Beispiele.

1. Der Querschnitt sei rechteckig (Abb. 77). Die Kraftlinie falle mit der X-Achse zusammen. Gesucht ist die Schubspannung im Abstand x von der Nullinie (X-Achse).

$\mathfrak{S}$ ist das statische Moment des schraffierten Querschnitts in bezug auf die Nullinie

$$= b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} - b \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - x^2\right).$$

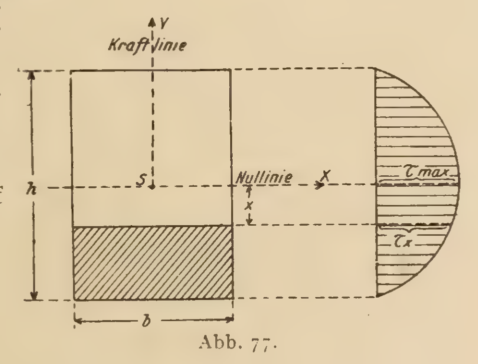


Abb. 77.

J ist das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Nullinie $= \frac{b h^3}{12}$; $w = b$. Somit wird

$$\tau_x = \frac{Q_x \cdot \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}{\frac{b h^3}{12} \cdot b} = \frac{6\, Q_x \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}{b h^3}.$$

Trägt man diese Spannungen für eine Reihe von Werten x von einer Geraden als Ordinaten ab, so erhält man das Spannungsdiagramm. Für $x = \frac{h}{2}$ wird $\tau_x = 0$.

Für $x = 0$ erhält man

$$\tau_{\max} = \frac{6\, Q_x \cdot \frac{h^2}{4}}{b h^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{F}.$$

Dort, wo die Biegungsspannungen am größten sind, sind daher die Schubspannungen am kleinsten und umgekehrt.

2. Der Querschnitt sei kreisförmig (Abb. 78). Man erhält $\mathfrak{S} = f \cdot \eta$, worin f = Querschnitt des schraffierten Kreisabschnitts ist.

Abb. 78.

$$\eta = \frac{w^3}{12 f}.$$

Daher wird $\mathfrak{S} = f \cdot \frac{w^3}{12 f} = \frac{w^3}{12}$.

Mit $J = \frac{\pi r^4}{4}$ wird sodann

$$\tau_x = \frac{Q_x \cdot \mathfrak{S}}{J \cdot w} = \frac{Q_x \cdot \frac{w^3}{12}}{\frac{\pi \cdot r^4}{4} \cdot w} = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_x \cdot w^2}{\pi \cdot r^4}.$$

Setzt man $\left(\frac{w}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$, so wird

$$\tau_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_x}{\pi \cdot r^4} \cdot 4\,(r^2 - x^2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_x}{\pi \cdot r^2}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right).$$

Für $x = r$ wird wieder $\tau_x = 0$ und für $x = 0$ ist

$$\tau_x = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_x}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_x}{F},$$

wenn F der Kreisquerschnitt ist.

Also auch hier erkennt man, daß die Schubspannungen dort am größten werden, wo die Biegungsspannungen am kleinsten sind und umgekehrt.

3. Der Querschnitt sei **I**-förmig (Abb. 79). Im Schnitt I—I wird $\tau_{\mathrm{I}} = \frac{Q_x \cdot \mathfrak{S}_{\mathrm{I}}}{J \cdot w_{\mathrm{I}}}$, worin $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ das statische Moment des unter I—I gelegenen Flächenteils in bezug auf die Nullinie, J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Nullinie ist.

Im Schnitt II—II wird $\tau_{II} = \frac{Q_x \cdot \mathfrak{S}_{II}}{J \cdot w_{II}}$. $\mathfrak{S}_{II}$, das statische Moment des unter II—II gelegenen Flächenteils in bezug auf die Nullinie, hat sich nur wenig gegen $\mathfrak{S}_I$ geändert, da ja der Flansch den Hauptbeitrag zu dem statischen Moment des Flächenteils liefert. Dagegen ist w_{II} innerhalb des Stegs erheblich kleiner als w_I, τ_{II} daher erheblich größer als τ_I. Im Steg sind also die Schubspannungen gegenüber den Schubspannungen in den Flanschen sehr groß. Ein anschauliches Bild der Verteilung der Schubspannungen zeigt Abb. 79.

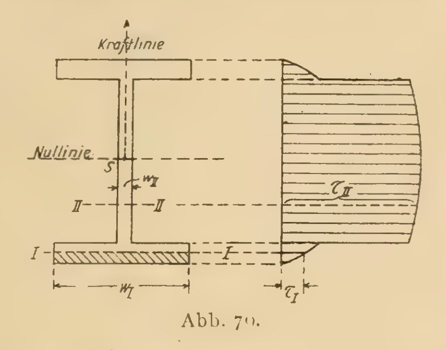


Abb. 79.

Praktische Anwendung findet die Theorie der Schubspannungen bei der Berechnung des verdübelten Balkens sowie des Nietabstandes der Gurtniete von Blechbalken bezw. Blechbögen.

1. Der verdübelte Balken (Abb. 80).

Die Querkraft zwischen zwei Dübeln, z. B. zwischen dem zweiten und dritten, sei $= Q = A - P_1$ (Abb. 80). Auf den zweiten Dübel wirkt eine Schubkraft von der Größe $T = \frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c$ $\Big($für die Längeneinheit ist die Schubkraft $= \frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J}$, auf die Strecke c entfällt daher $\frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c\Big)$.

$\mathfrak{S}$ ist das statische Moment eines Balkenquerschnitts in bezug auf die Nullinie

$$= \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} - \frac{b \cdot f}{2} \cdot \frac{f}{4} = \frac{b}{8}(h^2 - f^2);$$

f^2 darf gegen h^2 vernachlässigt werden, so daß $\mathfrak{S} = \frac{b \cdot h^2}{8}$ ist.

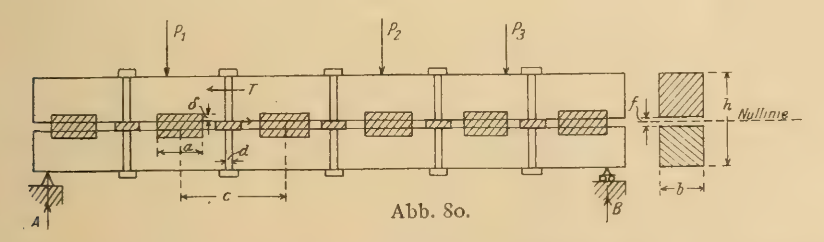


Abb. 80.

J ist das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Nullinie

$$= \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot f^3}{12} = \frac{b}{12}(h^3 - f^3).$$

Auch hier kann f^3 gegen h^3 vernachlässigt werden, so daß $J = \frac{b \cdot h^3}{12}$ ist. Daher wird

$$T = \frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c = Q \cdot \frac{b \cdot h^2}{8} \cdot \frac{12}{b \cdot h^3} \cdot c = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{h} \cdot c.$$

Streng genommen wird diese Schubkraft noch um die Reibung R verringert, die zwischen dem hölzernen, durch den Bolzen bedingten Futterstück

und dem Balken herrscht. Zugunsten der Sicherheit wird diese Reibung aber in der Regel vernachlässigt.

Die Schubkraft T beansprucht nun den fraglichen Dübel folgendermaßen:

1. Der in den Balken eingreifende Querschnitt $\delta \cdot b$ wird auf Druck beansprucht. Da in der Regel der Dübel aus Eichenholz, der Balken aus dem weicheren Kiefernholz besteht, so ist für die Berechnung der Querschnitt $\delta \cdot b$ des Balkens maßgebend. Die in dem Querschnitt herrschende Druckspannung darf die zulässige Druckspannung des Kiefernholzes nicht überschreiten.

2. Der Dübelquerschnitt $a \cdot b$ wird auf Abscheren beansprucht. Die errechnete Scherspannung darf die zulässige Scherspannung des Eichenholzes nicht überschreiten.

3. Der Balkenquerschnitt $(a - c)\, b$ wird ebenfalls auf Abscheren beansprucht. Auch hier darf die errechnete Scherspannung die zulässige Scherspannung des Kiefernholzes nicht überschreiten.

Demgemäß lassen sich folgende drei Gleichungen aufstellen:

Zu 1. $$\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{h} \cdot c < \sigma_b \cdot \delta \cdot b;$$

σ_b ist hierin die zulässige Druckspannung des Kiefernholzbalkens = 60 kg/qcm.

Zu 2. $$\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{h} \cdot c < \tau_d \cdot a \cdot b;$$

τ_d ist die zulässige Scherspannung des eichenen Dübelholzes = 15 kg/qcm.

Zu 3. $$\frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{h} \cdot c < \tau_b\, (a - c)\, b;$$

τ_b ist die zulässige Scherspannung des kiefernen Balkenholzes = 10 kg/qcm.

Man berechnet zweckmäßig zunächst b und h aus der Formel

$$W_{\text{erf.}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{M_{\max}}{\sigma},$$

worin σ die zulässige Biegungsspannung = 100 kg/qcm ist. Das Widerstandsmoment muß $\frac{4}{3}$ mal so groß wie das Widerstandsmoment eines einheitlichen Querschnitts von der Grundlinie b und der Höhe h werden, weil die Tragfähigkeit eines verdübelten Balkens nur $\frac{3}{4}$ der Tragfähigkeit eines gewöhnlichen Balkens von den Abmessungen b und h beträgt. Alsdann wählt man δ, a und c und weist aus den drei aufgestellten Gleichungen die Spannungen σ_b, τ_d und τ_b nach, die dann die zulässigen Spannungen nicht überschreiten dürfen. Andernfalls sind δ, a und c entsprechend zu verändern.

2. Berechnung des Nietabstandes der Gurtniete von Blechbalken oder Blechbögen.

Q sei die Querkraft zwischen den beiden Nieten, deren Abstand c gesucht ist (Abb. 81). Auf einen Niet wirkt die auf den Gurtquerschnitt entfallende Schubkraft $T = \frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c$, indem sie diesen gegen das Stegblech zu verschieben sucht.

Dadurch wird der fragliche Niet zweierlei Beanspruchungen ausgesetzt

1. Die in dem schraffierten Gurtquerschnitt (Abb. 81a) wirkende Schubkraft $\frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c$ sucht den Niet in zwei Querschnitten (in Abb. 81a durch kräftige Striche angedeutet) abzuscheren: der Niet wird daher zweischnittig auf Abscheren beansprucht.

Die dadurch entstehende Scherspannung darf die zulässige Scherspannung nicht überschreiten.

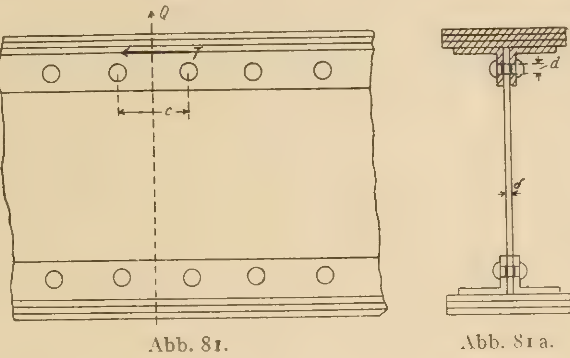


Abb. 81. Abb. 81a.

2. Die Schubkraft drückt den Niet mit seiner Leibung gegen den Steg, wodurch in der Leibungsfläche eine Druckspannung (Lochleibungs- oder Stauchspannung) entsteht, welche die zulässige Lochleibungsspannung nicht überschreiten darf. Die innerhalb des Stegs liegende gedrückte Leibungsfläche ist kleiner wie die innerhalb der beiden Winkelflansche liegende, so daß die erstere am ungünstigsten beansprucht wird, also bei der Berechnung der Nietentfernung in Ansatz zu bringen ist.

Demgemäß lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

Zu 1.
$$\frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c \leqq \tau \cdot \frac{2\pi \cdot d^2}{4}.$$

$\mathfrak{S}$ ist das statische Moment des schraffierten Gurtquerschnitts (bestehend aus den beiden Gurtwinkeln und den Gurtplatten) in bezug auf die Nullinie, J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts in bezug auf die Nullinie, τ die zulässige Scherspannung $= \frac{9}{10}\,\sigma$, worin σ die zulässige Zugspannung 1000 kg/qcm ist.

Zu 2. Die von der Nietleibung auf die Wandung des Stegblechs von der Stärke δ ausgeübten Drücke (Lochleibungs- oder Stauchdrücke) verteilen sich nach dem in Abb. 82 dargestellten Schema: Auf ein Flächenelement vom Flächeninhalt $\delta \cdot ds = \delta \cdot r \cdot d\varphi$ entfällt daher der Druck $dR = \sigma_s \cdot \delta \cdot r \cdot d\varphi$, wenn σ_s die an dem Flächenelement wirksame Lochleibungsspannung bedeutet. Zerlegt man diesen Druck in die wagerechte Seitenkraft $\sigma_s \cdot \delta \cdot r \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi$ und in eine senkrechte Seitenkraft und macht die nach Müller-Breslau zulässige Annahme $\sigma_s = \sigma_l \cdot \cos\varphi$, worin σ_l die größte Lochleibungsspannung bedeutet, so ist der gesamte Lochleibungsdruck

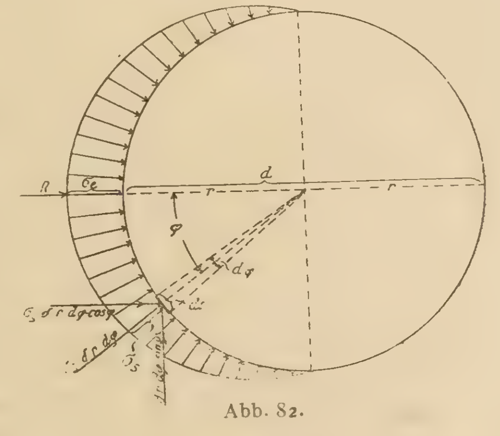


Abb. 82.

$$R = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sigma_s \cdot \delta \cdot r \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi = \sigma_l \cdot \delta \cdot r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot d\varphi = 2\,\sigma_l \cdot \delta \cdot r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$= 2\,r \cdot \sigma_l \cdot \delta \left[\frac{1}{4} \cdot \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,r \cdot \sigma_l \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{4} \cdot$$

Setzt man noch $2\,r = d$, so wird

$$\boldsymbol{R = \sigma_l \cdot d \cdot \delta \cdot \frac{\pi}{4}} \cdot$$

In der Regel wird aber zur Berechnung von R die einfachere Annahme gemacht, daß ein Querschnitt vom Flächeninhalt $d \cdot \delta$ gleichmäßig gedrückt wird, so daß die Lochleibungsspannung

$$\sigma_l = \frac{R}{d \cdot \delta}, \text{ woraus } R = \sigma_l \cdot d \cdot \delta.$$

Setzt man σ_l gleich der zulässigen Lochleibungsspannung ($\varrho = 2\,\tau$), so wird

$$\boldsymbol{R = \varrho \cdot d \cdot \delta.}$$

Es besteht daher die Bedingung

$$2)\quad \frac{Q \cdot \mathfrak{S}}{J} \cdot c \leqq \varrho \cdot d \cdot \delta.$$

Aus der Gleichung 1 ergibt sich

$$c = \frac{\tau \cdot \pi d^2 \cdot J}{2 \cdot Q \cdot \mathfrak{S}}, \text{ aus der Gleichung 2 } c = \frac{\varrho \cdot d \cdot \delta \cdot J}{Q \cdot \mathfrak{S}} \cdot$$

Der kleinste Wert c wird gewählt. Jedoch darf sich c nicht kleiner als $2{,}5\,d$ (kleinster zulässiger Nietabstand) ergeben. Liefert also eine der beiden Gleichungen einen Wert $c < 2{,}5\,d$, so muß der Querschnitt entsprechend verstärkt werden, was, da in der Regel der Lochleibungsdruck für die Nietentfernung maßgebend ist, am zweckmäßigsten durch die Verstärkung des Stegbleches (also ein größeres δ) erreicht wird. Ergibt sich $c > 6d$, so wählt man $c = 6\,d$ (= größter zulässiger Nietabstand für Niete, die Kräfte zu übertragen haben.

III. Abschnitt.

Die statisch bestimmten Bauwerke.

Wir nennen ein System statisch bestimmt, wenn es möglich ist, sämtliche an dem System wirkenden unbekannten statischen Größen mit Hilfe statischer Gleichungen (Gleichgewichts- und sonstiger statischer Bedingungen) zu berechnen. Reichen die statischen Gleichungen zur Berechnung der Unbekannten nicht aus, so sprechen wir von einem statisch unbestimmten System.

In den nachfolgenden Paragraphen sollen die wichtigsten statisch bestimmten Systeme eingehend besprochen werden. Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Einfluß der elastischen Formänderungen auf die statischen Größen statisch bestimmter Tragwerke verschwindend klein ist, so daß er vernachlässigt werden darf. Die Tragwerke dürfen daher als starre Scheiben (bezw. als aus mehreren starren Scheiben zusammengesetzte Systeme) aufgefaßt werden.

§ 6. Der vollwandige Balken auf zwei Stützen.

Der Balken auf zwei Stützen erhält ein festes und ein bewegliches Auflager. Das feste Auflager dient zur Aufnahme schräger bezw. wagerechter Kräfte, während das bewegliche Auflager nur senkrechte Kräfte auf das Widerlager übertragen kann. Wir setzen dabei voraus, daß die Gleitflächen des beweglichen Auflagers vollkommen glatt sind, daß also keinerlei Reibungswiderstände auftreten. Der Auflagerdruck an einem beweglichen Auflager kann daher nur senkrecht zur Gleitebene gerichtet sein.

Die Belastung des Balkens kann entweder eine ständige oder eine bewegliche sein. Zu letzterer gehören u. a. die Raddrücke von Fahrzeugen sowie das Menschengedränge.

1. Der Einfluß ständiger Belastung.

Die äußeren, am Balken angreifenden Kräfte sind meistens Schwerkräfte, sogenannte Lasten. Es gehören zu ihnen aber auch die Auflagerkräfte. Die Lasten sind entweder Einzellasten, d. h. solche, die in einem bestimmten Punkt wirken, oder verteilte (kontinuierliche) Lasten, d. h. solche, die über eine endliche Stabstrecke verteilt sind, z. B. das Eigengewicht oder eine

Aufschüttung. Die Verteilung braucht keine gleichmäßige zu sein. Man pflegt die verteilten Lasten durch ihren Wert je Längeneinheit (q_x) anzugeben. Ist die Gesamtlast Q und entfällt auf ein Längenelement dx des Balkens die Last dQ, so ist $q_x = \frac{dQ}{dx}$. Trägt man über jedem Punkt des Balkens das zugehörige q_x von einer Wagerechten als Ordinate auf und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten miteinander, so erhält man die **Belastungslinie**. Die von der Belastungslinie und der Wagerechten eingeschlossene Fläche heißt die **Belastungsfläche** (Abb. 83). Bei gleichmäßig verteilter Belastung ist die Belastungsfläche ein Rechteck (Abb. 83a). Die Belastung je Längeneinheit bezeichnen wir in diesem Falle mit q, wobei auch hier $q = \frac{dQ}{dx}$ ist.

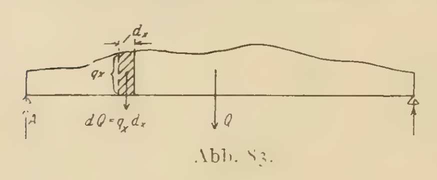


Abb. 83.

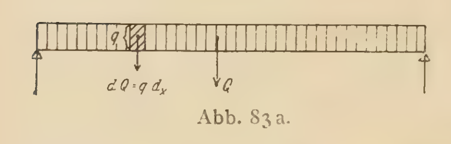


Abb. 83a.

Zwischen Belastung, Biegungsmoment und Querkraft besteht nun ein Zusammenhang, der nachstehend untersucht werden soll. Die Mittelkraft der links vom Querschnitt 1 wirkenden Kräfte sei $R = A - Q_x = V_x$ (= Querkraft für den Querschnitt 1) (Abb. 84). Dann ist $M_x = V_x \cdot \xi = A \cdot x - Q_x \cdot a$.

Abb. 84.

Für den im unendlich kleinen Abstand dx von 1 liegenden Querschnitt 2 ist $V_x' = A - Q_x - q_x \cdot dx = V_x - q_x \cdot dx$, so daß $V_x' - V_x = - q_x \cdot dx$.

Die Querkraft erfährt also nur eine unendlich kleine Änderung. Die Differenz $V_x' - V_x$ ist der Zuwachs von V_x, d. h. das Differential von V_x.

Mithin ist

$$dV_x = - q_x \cdot dx \quad \text{und} \quad \frac{dV_x}{dx} = - q_x.$$

Das Biegungsmoment für den Querschnitt 2 wird

$$M_x' = V_x(\xi + dx) - q_x \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = V_x \cdot \xi + V_x \cdot dx - q_x \cdot \frac{dx^2}{2}$$

$$= M_x + V_x \cdot dx - q_x \cdot \frac{dx^2}{2}.$$

Die unendlich kleine Größe 2. Ordnung darf gegen die unendlich kleine Größe 1. Ordnung vernachlässigt werden, so daß

$$M_x' = M_x + V_x \cdot dx \quad \text{und} \quad M_x' - M_x = V_x \cdot dx.$$

Hierin ist

$$M_x' - M_x = dM_x \quad \text{so daß} \quad dM_x = V_x \cdot dx$$

und

$$\frac{dM_x}{dx} = V_x.$$

Differentiiert man noch einmal, so folgt

$$\frac{d\,\frac{d\,M_x}{d\,x}}{d\,x} = \frac{d\,V_x}{d\,x} = -q_x \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\,M_x}{d\,x^2} = -q_x.$$

Trägt man für jeden Wert des x die zugehörigen Werte von V_x und M_x als Ordinaten auf, so erhält man die Querkraftfläche und die Momentenfläche (Abb. 85a und 85b).

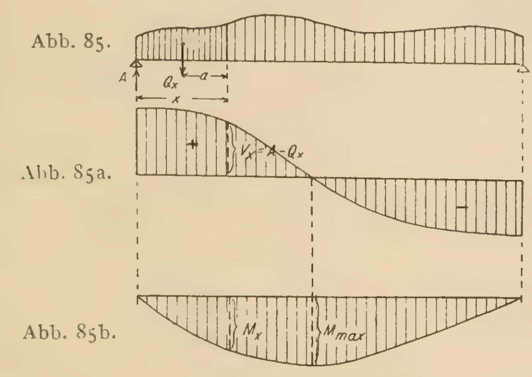


Abb. 85.

Abb. 85a.

Abb. 85b.

Für ein beliebiges x ist die Ordinate der Querkraftfläche $= V_x = A - Q_x$ und die Ordinate der Momentenfläche $= M_x = A \cdot x - Q_x \cdot a$.

Aus der Beziehung $\frac{d\,M_x}{d\,x} = V_x$ folgt: Wenn $\frac{d\,M_x}{d\,x} = V_x$ positiv ist, so wächst M_x mit wachsendem x, ist dagegen $\frac{d\,M_x}{d\,x} = V_x$ negativ, so nimmt M_x mit wachsendem x ab. (Vergl. die aus der höheren Mathematik bekannte Regel: Ist $\frac{d\,y}{d\,x}$ positiv, so wachsen die Ordinaten y mit wachsendem x, ist $\frac{d\,y}{d\,x}$ negativ, so nehmen sie mit wachsendem x ab.)

Dort wo V_x sein Vorzeichen wechselt, muß daher das Moment ein Maximum sein.

Ist der Balken prismatisch, hat also überall den gleichen Querschnitt, so ist, da $\sigma = \frac{M_x}{W}$, W aber für alle Querschnitte unveränderlich ist, die Spannung in dem Querschnitt am größten, für den das Moment ein Maximum wird. Dieser Querschnitt heißt der „gefährliche Querschnitt“.

Für praktische Fälle wird es sich empfehlen, das Eigengewicht des Balkens, das als gleichmäßig verteilte Last angesehen werden darf, zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung zu machen, d. h. also bei Bestimmung des Einflusses der Nutzlasten den Balken als gewichtslos anzunehmen. Für eine unbelastete Balkenstrecke ist alsdann $q_x = 0$. Da $d\,V_x = -q_x \cdot dx$, so wird für diese Strecke $d\,V_x = 0$, d. h. $V_x =$ **Const.** (denn das Differential einer Konstanten ist $= 0$).

Für eine unbelastete Balkenstrecke ist daher die Querkraftfläche durch eine Gerade begrenzt, die parallel zur Balkenachse verläuft.

Da ferner $d\,M_x = V_x \cdot dx = \text{Const.} \cdot d\,x$, so erhält man durch Integration $M_x = \text{Const.} \cdot x + C_1$, worin C_1 eine Integrationskonstante bedeutet. M_x ist also eine lineare Funktion von x. Für eine unbelastete Balkenstrecke ist daher die Momentenfläche durch eine geneigte Gerade begrenzt.

Trägt z. B. der Balken eine Reihe von Einzellasten, so zerfällt er in eine Anzahl unbelasteter Strecken (Abb. 86). Die Querkraft- bezw. Momentenfläche hat daher die in den Abb. 86a u. 86b dargestellte Form.

Ist eine endliche Balkenstrecke gleichmäßig mit q je Längeneinheit belastet, so ist

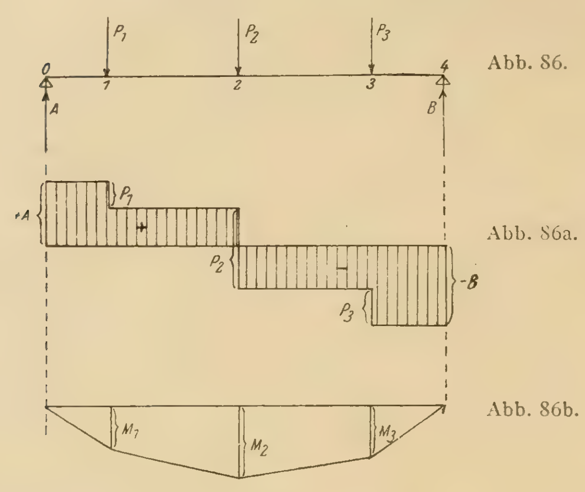


Abb. 86.

Abb. 86a.

Abb. 86b.

$$dV_x = -q \cdot dx,$$

mithin (durch Integration)

$$V_x = -q \cdot x + a$$

(a ist eine Integrationskonstante). Jetzt ergibt sich V_x als lineare Funktion von x. Die Querkraftfläche ist daher unter einer gleichmäßig belasteten Strecke durch eine geneigte Gerade begrenzt.

Ferner ist

$$dM_x = V_x \cdot dx$$
$$= (-q \cdot x + a)\, dx.$$

mithin (durch Integration)

$$M_x = -q \cdot \frac{x^2}{2} + a \cdot x + b,$$

worin b eine neue Integrationskonstante bedeutet. Das ist die Gleichung einer Parabel.

Für eine gleichmäßig belastete Balkenstrecke ist daher die Momentenfläche durch eine Parabel begrenzt.

Nachfolgend sollen die Querkraft- und Momentenflächen für die am häufigsten vorkommenden Belastungsfälle ermittelt werden.

a) Unmittelbare Belastung.

1. Einzellasten (Abb. 87).

Man berechne zunächst die Auflagerdrücke A und B. Setzt man die Summe der Momente für den Punkt r gleich Null, so erhält man

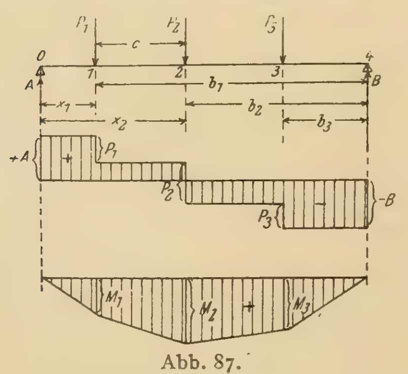


Abb. 87.

$$A \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 = 0$$

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3}{l}.$$

Aus der Bedingung $\Sigma V = 0$ folgt sodann

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 = 0$$

$$B = P_1 + P_2 + P_3 - A = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3}{l}.$$

Man findet sodann

$$Q_0 = +A,\ Q_1 = A - P_1,\ Q_2 = A - P_1 - P_2$$

(von der linken Seite aus),

$$Q_3 = -B + P_3,\ Q_4 = -B$$

(von der rechten Seite aus).

Ferner $$M_1 = A \cdot x_1,\ M_2 = A \cdot x_2 - P_1 \cdot c$$

(von der linken Seite aus),

$$M_3 = B \cdot b_3$$

(von der rechten Seite aus).

Trägt man diese Querkräfte und Momente unter den Punkten 1, 2 und 3 als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpunkte geradlinig miteinander, so erhält man die Querkraft- und Momentenfläche (Abb. 87). Die Querkräfte werden teils positiv, teils negativ, die Momente sämtlich positiv. Dort, wo die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt, also nach Abb. 87 in dem unter P_2 gelegenen Querschnitt, ist das Moment ein Maximum. Dort liegt also der gefährliche Querschnitt.

Zeichnerisch findet man nach Abb. 88 die Auflagerdrücke mittels eines Seilpolygons, indem man die Kräfte P in irgend einem Kräftemaßstab nach

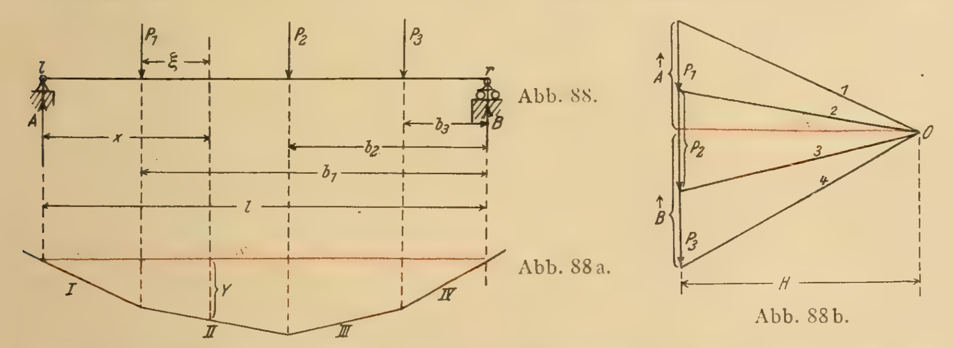


Abb. 88.

Abb. 88a.

Abb. 88b.

Größe und Richtung aneinanderreiht, einen beliebigen Pol O wählt, die Polstrahlen 1—4 und die zu ihnen parallelen Seilstrahlen I—IV zeichnet, die den Balkenauflagern entsprechende Schlußlinie s einträgt und zu ihr durch den Pol O eine Parallele zieht (Abb. 88a u. 88b). Diese schneidet dann von der Mittelkraft der Kräfte P die Auflagerdrücke A und B ab (vergl. I. Abschnitt, § 1, 7, Seite 6).

Das Biegungsmoment für einen im Abstande x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt ist sodann gleich dem Produkt aus der Polweite des Kräftepolygons und der unter dem Querschnitt gemessenen Ordinate des Seilpolygons, d. h. $\boldsymbol{M_x = H \cdot y}$ (vergl. auch I. Abschnitt, § 1, 8, Seite 7). Hierin ist H im Kräftemaßstab und y im Zeichenmaßstab zu messen oder umgekehrt.

2. Gleichmäßig verteilte Belastung (Abb. 89).

Die Belastung betrage q je Längeneinheit. Die Gesamtbelastung ist sodann $= q \cdot l$, wovon auf jede Stütze $\frac{q \cdot l}{2}$ als Auflagerdruck entfällt. Das **Biegungsmoment** für einen im Abstande x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt ist

$$= \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot x}{2}(l - x) = \frac{\boldsymbol{q \cdot x \cdot x'}}{\mathbf{2}}.$$

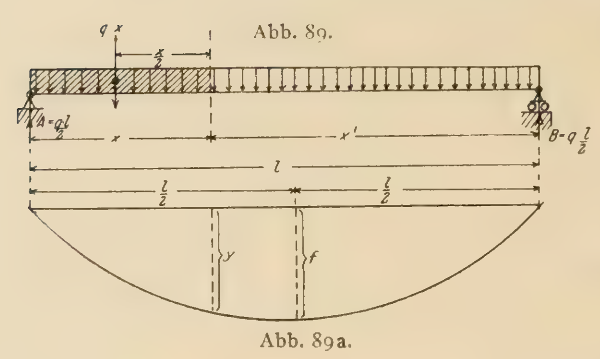


Abb. 89.

Abb. 89a.

Trägt man unter jedem Querschnitt das zugehörige Moment als Ordinate y auf, so entsteht die Momentenfläche (Abb. 89a). Die Gleichung der Momentenkurve lautet mithin

$$y = \frac{q \cdot x \cdot x'}{2} = \text{Const.} \cdot x \cdot x'.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel. Ist der Stich der Parabel $= f$, so muß für $x = x' = \frac{l}{2}$ die Ordinate $y = f$ werden. Demnach muß sein

$$f = \text{Const.} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}; \text{ daraus Const.} = \frac{4f}{l^2}.$$

Die Gleichung der Parabel lautet daher

$$\boldsymbol{y = \frac{4f}{l^2} \cdot x \cdot x'.}$$

$M_{\max}$ erhält man für $x = x' = \frac{l}{2}$. Da $M_x = \frac{q \cdot x \cdot x'}{2}$ ist, so wird

$$\boldsymbol{M}_{\max} = \frac{q}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\boldsymbol{q \cdot l^2}}{\mathbf{8}}.$$

Die Querkraft ist für einen im Abstand x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt

$$= \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot x = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$= q \cdot \xi \text{ (Abb. 90).}$$

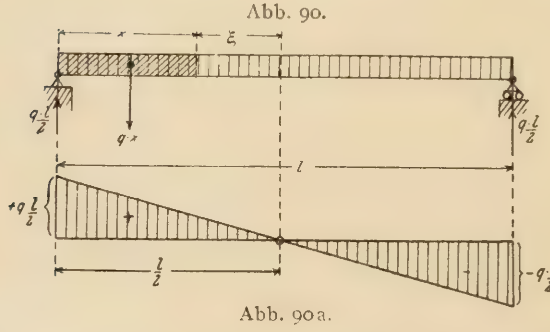


Abb. 90.

Abb. 90a.

Die Gleichung $Q_x = q \cdot \xi$ ist die Gleichung einer Geraden. Für $\xi = 0$ wird $Q_x = 0$. Für $\xi = + \frac{l}{2}$ bezw. $- \frac{l}{2}$ erhält man $Q_x = + \frac{q \cdot l}{2}$ bezw. $= - \frac{q \cdot l}{2}$.

Damit ist die in Abb. 90a dargestellte Querkraftfläche bestimmt.

Ist nur eine Strecke von der Länge ξ gleichmäßig mit q/lfd. m belastet (Abb. 91), so erhält man durch Momentengleichungen für das rechte bezw. linke Auflager

$$A = \frac{q \cdot \xi\left(\frac{\xi}{2} + b\right)}{l} \text{ und } B = \frac{q \cdot \xi\left(\frac{\xi}{2} + a\right)}{l}.$$

Für den Punkt l erhält man

$$M_l = A \cdot a = \frac{q \cdot \xi \left(\frac{\xi}{2} + b \right)}{l} \cdot a,$$

für den Punkt r

$$M_r = B \cdot b = \frac{q \cdot \xi \left(\frac{\xi}{2} + a \right)}{l} \cdot b.$$

Würde an Stelle der gleichmäßig verteilten Belastung eine Einzellast $q \cdot \xi$ wirken, so würde sie dieselben Auflagerdrücke A und B hervorrufen. Die Momentenfläche wäre dann ein Dreieck mit der Ordinate

$$\eta_m = A \left(a + \frac{\xi}{2} \right) = \frac{q \cdot \xi \left(\frac{\xi}{2} + b \right)}{l} \left(a + \frac{\xi}{2} \right)$$

unter der Last, und unter den Punkten l bezw. r stimmten die Ordinaten mit den Ordinaten M_l und M_r der tatsächlichen Momentenfläche überein, da für beide Belastungsfälle $M_l = A \cdot a$ und $M_r = B \cdot b$ ist. Berücksichtigt man nun, daß unter der belasteten Strecke die Momentenfläche durch eine Parabel begrenzt sein muß und unter den Punkten l und r keine Knickpunkte aufweisen darf, so daß die Geraden g_l und g_r tangential an die Parabel verlaufen müssen, so ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Momentenfläche: Man zeichne zunächst die Momentenfläche für eine Einzellast $q \cdot \xi$, d. h. ein Dreieck mit der Ordinate

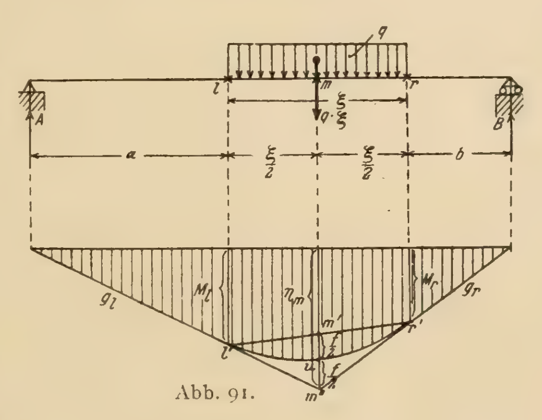


Abb. 91.

$$\eta_m = A \left(a + \frac{\xi}{2} \right) = \frac{q \cdot \xi \left(\frac{\xi}{2} + b \right)}{l} \left(a + \frac{\xi}{2} \right)$$

unter der Last, bestimme sodann die Punkte l' und r' der Momentenfläche senkrecht unter l und r, ziehe die Gerade $\overline{l' r'}$, halbiere die Strecke $\overline{m' m''} = f$ und lege durch die Punkte l', r' und den Mittelpunkt u von f eine Parabel. Nach einem bekannten mathematischen Satz verlaufen dann die Geraden g_l und g_r in den Punkten l' und r' tangential an die Parabel.

b) Mittelbare Belastung.

α) Die Belastung bestehe aus Einzellasten,

die durch Zwischenträger auf den Balken übertragen werden (Abb. 92).

1. Momente. Infolge einer zwischen zwei Querträgern stehenden Last P wird $A = \frac{P \cdot c}{l}$, wie sich durch eine Momentengleichung für den rechten Auflagerpunkt ergibt.

Ersetzt man die Last P durch ihre auf die benachbarten Zwischenträger entfallenden Seitenkräfte $\frac{P \cdot b}{\lambda}$ und $P \cdot \frac{a}{\lambda}$, so liegt wieder der Fall unmittelbarer Belastung vor und es ergibt sich, wiederum mittels einer Momentengleichung für den rechten Auflagerpunkt,

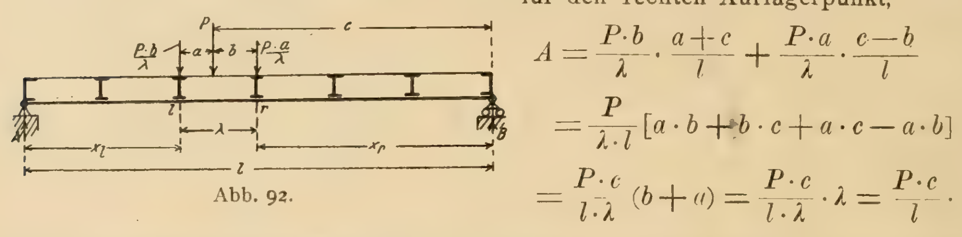


Abb. 92.

$$A = \frac{P \cdot b}{\lambda} \cdot \frac{a+c}{l} + \frac{P \cdot a}{\lambda} \cdot \frac{c-b}{l}$$

$$= \frac{P}{\lambda \cdot l}[a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c - a \cdot b]$$

$$= \frac{P \cdot c}{l \cdot \lambda}(b+a) = \frac{P \cdot c}{l \cdot \lambda} \cdot \lambda = \frac{P \cdot c}{l}.$$

Die Auflagerdrücke stimmen mithin in beiden Fällen miteinander überein, sind also unabhängig von der Art der Verteilung durch die Zwischenträger.

Auch das Biegungsmoment für den Punkt l ist für beide Fälle $M_l = A \cdot x_l$, ebenso $M_r = B \cdot x_r$. Die Momente sind daher ebenfalls unabhängig von der

Abb. 93.

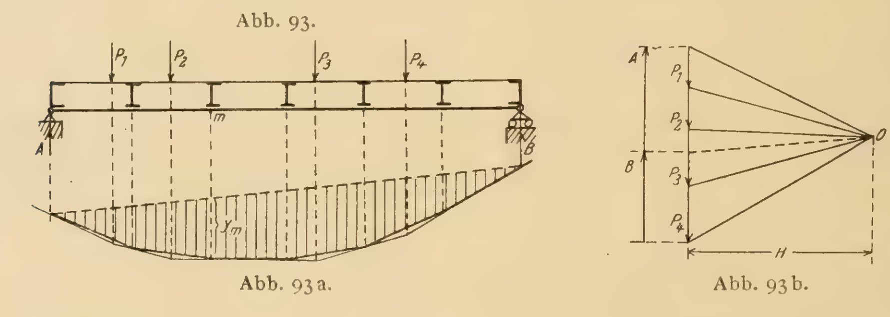


Abb. 93a. Abb. 93b.

Art der Verteilung der Lasten durch die Zwischenträger. Man braucht daher die Verteilung der Lasten auf die Zwischenträger gar nicht erst vorzunehmen, sondern bestimmt einfach die Momentenfläche für unmittelbare Belastung und beschreibt in diese ein Polygon ein, dessen Ecken senkrecht unter den Zwischenträgern liegen (Abb. 93, 93a u. 93b).

Abb. 94.

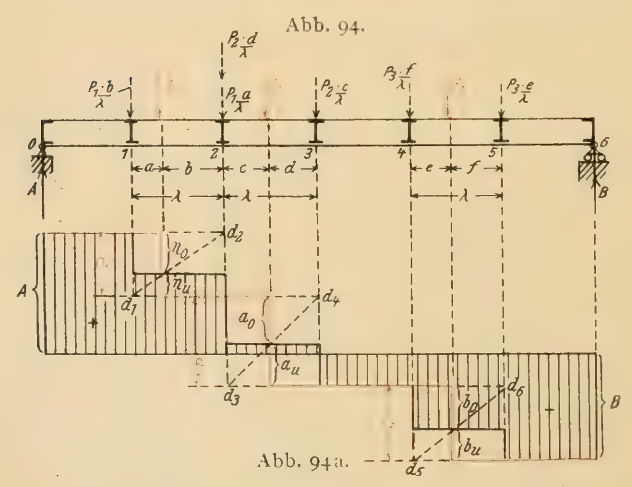


Abb. 94a.

2. Querkräfte. Man zeichne zunächst die Querkraftfläche wie für unmittelbare Belastung (in Abb. 94a in roter Farbe angedeutet). Zerlegt man dann die gegebenen Kräfte P in ihre auf die benachbarten Zwischenträger entfallenden Seitenkräfte, so ist für den Querschnitt 1 die Querkraft $= + A - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$. Zieht man die Diagonale $d_1 - d_2$,

so schneidet diese von der Senkrechten durch P_1 die Strecken η_o und η_u ab und es gelten die Proportionen

$$\frac{\eta_o}{P_1} = \frac{b}{\lambda} \text{ und } \frac{\eta_u}{P_1} = \frac{a}{\lambda}, \text{ so daß } \eta_o = P_1 \cdot \frac{b}{\lambda} \text{ und } \eta_u = P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}.$$

Mithin ist für den Querschnitt 1 die Querkraft

$$= + A - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda} = + A - \eta_o.$$

Für den Querschnitt 2 gilt

$$Q = + A - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda} - \left(P_1 \cdot \frac{a}{\lambda} + P_2 \cdot \frac{d}{\lambda}\right).$$

Zieht man die Diagonale $d_3 - d_4$, so schneidet diese von der Senkrechten durch P_2 die Strecken a_o und a_u ab und es ist

$$\frac{a_o}{P_2} = \frac{d}{\lambda}, \text{ ferner } \frac{a_u}{P_2} = \frac{c}{\lambda}, \text{ so daß } a_o = P_2 \cdot \frac{d}{\lambda} \text{ und } a_u = P_2 \cdot \frac{c}{\lambda}.$$

Mithin ist

$$Q = + A - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda} - \left(P_1 \cdot \frac{a}{\lambda} + P_2 \cdot \frac{d}{\lambda}\right) = + A - \eta_o - (\eta_u + a_o).$$

In derselben Weise verfährt man bei der Bestimmung der Querkräfte für die übrigen Querschnitte. Auf diese Weise entsteht die in Abb. 94a durch senkrechte Schraffur gekennzeichnete Querkraftfläche.

Abb. 95.

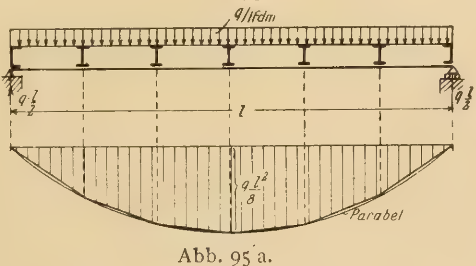


Abb. 95 a.

β) Der Balken sei gänzlich mit q/lfd. m belastet.

1. Momente (Abb. 95). Für unmittelbare Belastung ist die Momentenfläche eine Parabelfläche vom Pfeil $\frac{q \cdot l^2}{8}$. In diese Parabel ist dann nach b, α ein Polygon einzubeschreiben, dessen Ecken senkrecht unter den Zwischenträgern liegen (Abb. 95a).

2. Querkräfte (Abb. 96). Die gleichmäßige Belastung verteilt sich derart auf die Zwischenträger, daß auf die Endträger je $\frac{q \cdot \lambda}{2}$, auf die übrigen Zwischenträger je $q \cdot \lambda$ als Einzellast entfällt. Zeichnet man zunächst die Querkraftfläche wie für unmittelbare Belastung, die nach 1, a, 2, Abb. 90a, durch eine Gerade mit den Ordinaten $+\frac{q \cdot l}{2}$ bezw. $-\frac{q \cdot l}{2}$ unter den Auflagern begrenzt ist, so findet man die Querkraft für ein Feld als die unter

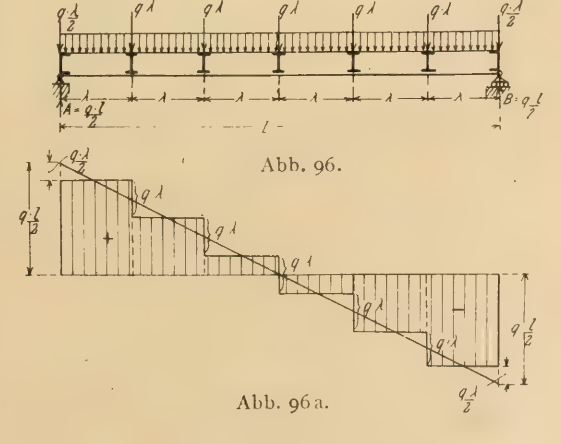


Abb. 96.

Abb. 96 a.

der Feldmitte gemessene Ordinate dieser Geraden. Innerhalb des Feldes ist die Querkraft konstant (Abb. 96a).

2. Der Einfluß beweglicher Belastung.

A. Berechnung der Größtwerte statischer Größen infolge bestimmter Lastenzüge.

Als bewegliche Belastung kommen bewegliche Einzellasten (Raddrücke von Fahrzeugen) und bewegliche gleichmäßig verteilte Belastung (Menschengedränge, Winddruck auf einen Eisenbahnzug, Fliehkräfte in Kurven) in Betracht.

1. Bewegliche Einzellasten.

Für Straßenbrücken sind die Raddrücke von Straßenbahnwagen, Straßenwalzen und sonstigen Fahrzeugen, für Eisenbahnbrücken die Raddrücke der Lokomotiven und Eisenbahnwagen als Belastung anzunehmen. Für erstere sind allgemein gültige Vorschriften über die Größe der Belastung nicht vorhanden. Sie richtet sich nach den örtlichen Verkehrsverhältnissen und ist jedesmal von Fall zu Fall festzusetzen. Im übrigen vergl. Hütte III, 23. Aufl., Seite 62 und 63. Für die Berechnung der Eisenbahnbrücken sind jedoch in den

Abb. 97.

einzelnen Staaten bestimmte Lastenzüge vorgeschrieben. Der vom preußischen Minister der öffentlichen Arbeiten durch Erlaß vom 1. Mai 1903 festgesetzte Lastenzug sieht zwei Lokomotiven mit je einem Tender und eine unbeschränkte Anzahl von einseitig angehängten Güterwagen mit den in Abb. 97 dargestellten Achslasten und Radständen vor.

Der Lastenzug soll in Zukunft kurz der 17 t-Zug genannt werden. Bei der Berechnung kleinerer Brücken und der Quer- und Schwellenträger sind, soweit sich hierdurch größere Beanspruchungen ergeben als durch die in Abb. 97 gezeichnete Lokomotive, als Belastungen anzunehmen: 1, 2, 3 oder 4 Achsen von 20, $2 \cdot 20$, $3 \cdot 19$ und $4 \cdot 18$ t. Der Achsabstand bleibt je 1,5 m.

Für bestimmte Hauptstrecken ist 1911 ein von Müller-Breslau empfohlener schwererer Zug, der 20 t-Zug, vorgeschrieben worden, der sich von dem 17 t-Zug nur dadurch unterscheidet, daß die Lokomotivachsen 20 t, die Tender- und Güterwagenachsen 15 t schwer anzunehmen sind. Kommen nur 1 bis 4 Achsen in Frage, so sind, ähnlich wie bei dem 17 t-Zug, Achslasten von 24, $2 \cdot 23$, $3 \cdot 22$ und $4 \cdot 21$ t einzuführen.

Näheres hierüber findet der Leser in Hütte III, 23. Aufl., Seite 65 bis 72.

Von großer Wichtigkeit für die späteren Untersuchungen ist die schnelle Berechnung der Auflagerdrücke für bestimmte Stellungen des Lastenzuges sowie der Maximalmomente und der größten Momente für bestimmte Querschnitte. Diese Berechnungen mögen daher in den folgenden Abschnitten zunächst gezeigt werden.

a) Berechnung der Auflagerdrücke für eine bestimmte Stellung des Lastenzuges.

α) Rechnerische Bestimmung des Auflagerdrucks mit Hilfe von Tabellen (Abb. 98).

Durch eine Momentengleichung in bezug auf den rechten Auflagerpunkt r ergibt sich

$$A = \frac{P_1(c_1 + b_n) + P_2(c_2 + b_n) + P_3(c_3 + b_n) + \dots}{l}$$

$$= \frac{\Sigma P(b_n + c)}{l}.$$

Abb. 98.

Da b_n eine Konstante ist und nur die Werte c in der Formel veränderlich sind, kann b_n vor die Summe gesetzt werden, so daß

$$A = \frac{b_n \cdot \Sigma P + \Sigma P \cdot c}{l} \text{ ist.}$$

Der Wert $\Sigma P \cdot c$ ist das statische Moment der Lasten P in bezug auf die letzte Last P_n. Er möge mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet werden. ΣP ist die Summe aller Lasten. Sie sei $= \mathfrak{P}_n$ gesetzt, so daß

$$\boldsymbol{A = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}}.$$

Die Werte $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{S}_n$ können für einen bestimmten Lastenzug leicht beberechnet werden, da sie unabhängig von der Stellung der Lasten auf dem Balken sind. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind für den 17 t- und 20 t-Zug in nachfolgenden, aus Hütte III, 23. Aufl., Seite 68 und 70 entnommenen Tabellen zusammengestellt (Seite 72, Tabelle I).

Der Balken habe z. B. eine Spannweite von 60 m und sei durch 18 Lasten eines 20 t-Zuges beansprucht, deren erste im Abstand 38 m vom rechten Auflager steht, dann ist $b_n = 38 - c_1$ (vergl. Abb. 98). Für $n = 18$ ist $c_1 = 37{,}5$ m, so daß $b_n = 38 - 37{,}5 = 0{,}5$ m. Ferner findet man $\mathfrak{P}_n = 320$ t und $\mathfrak{S}_n = 6630$ t · m, so daß

$$A = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} = \frac{320 \cdot 0{,}5 + 6630}{60} = 113{,}2 \text{ t.}$$

Da die Tabellen für Achslasten aufgestellt sind, so müssen, falls eine eingleisige Eisenbahnbrücke vorliegt, die Ergebnisse noch durch 2 dividiert werden, weil dann auf jeden Hauptträger ein Raddruck entfällt.

β) Zeichnerische Bestimmung des Auflagerdrucks mit Hilfe des A-Polygons (Abb. 99).

In folgendem möge zunächst das Verfahren beschrieben und im Anschluß daran der Beweis gegeben werden.

Gesucht ist der Auflagerdruck A infolge des von rechts nach links fahrenden Lastenzuges, dessen erste Last P_1 den Abstand b_1 vom rechten Auflager hat.

Man zeichne zu den Lasten P' eines von links nach rechts fahrenden Lastenzuges mit denselben Achsabständen, dessen erste Last P_1' über dem rechten Auflager steht und dessen Lasten P' gleich den Lasten P des von

Tabelle I.

17 t-Zug: Lokomotive 17-17-17-17-17 | Tender 13-13-13 | Lokomotive 17-17-17-17-17 | Tender 13-13-13 | Güterwagen 13-13 | 13-13

20 t-Zug: Lokomotive 20-20-20-20-20 | Tender 15-15-15 | Lokomotive 20-20-20-20-20 | Tender 15-15-15 | Güterwagen 15-15 | 15-15

17 t-Zug								20 t-Zug							
n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$	n	c_1	$\mathfrak{P}_n$	$\mathfrak{S}_n$
	m	t	t·m		m	t	t·m		m	t	t·m		m	t	t·m
1	0,0	20	0	31	76,5	443	19 389	1	0,0	20	0	31	76,5	515	22 620
2	1,5	40	30	32	79,5	456	20 718	2	1,5	40	30	32	79,5	530	24 165
3	3,0	57	85,5	33	82,5	469	22 086	3	3,0	60	90	33	82,5	545	25 755
4	4,5	72	162	34	85,5	482	23 493	4	4,5	80	180	34	85,5	560	27 390
5	6,0	85	255	35	88,5	495	24 939	5	6,0	100	300	35	88,5	575	29 070
6	10,5	98	637,5	36	91,5	508	26 424	6	10,5	115	750	36	91,5	590	30 795
7	12,0	111	784,5	37	94,5	521	27 948	7	12,0	130	922,5	37	94,5	605	32 565
8	13,5	124	951	38	97,5	534	29 511	8	13,5	145	1 117,5	38	97,5	620	34 380
9	18,0	141	1 509	39	100,5	547	31 113	9	18,0	165	1 770	39	100,5	635	36 240
10	19,5	158	1 720,5	40	103,5	560	32 754	10	19,5	185	2 017,5	40	103,5	650	38 145
11	21,0	175	1 957,5	41	106,5	573	34 434	11	21,0	205	2 295	41	106,5	665	40 095
12	22,5	192	2 220	42	109,5	586	36 153	12	22,5	225	2 602,5	42	109,5	680	42 090
13	24,0	209	2 508	43	112,5	599	37 911	13	24,0	245	2 940	43	112,5	695	44 130
14	28,5	222	3 448,5	44	115,5	612	39 708	14	28,5	260	4 042,5	44	115,5	710	46 215
15	30,0	235	3 781,5	45	118,5	625	41 544	15	30,0	275	4 432,5	45	118,5	725	48 345
16	31,5	248	4 134	46	121,5	638	43 419	16	31,5	290	4 845	46	121,5	740	50 520
17	34,5	261	4 878	47	124,5	651	45 333	17	34,5	305	5 717	47	124,5	755	52 740
18	37,5	274	5 661	48	127,5	664	47 286	18	37,5	320	6 630	48	127,5	770	55 005
19	40,5	287	6 483	49	130,5	677	49 278	19	40,5	335	7 590	49	130,5	785	57 315
20	43,5	300	7 344	50	133,5	690	51 309	20	43,5	350	8 595	50	133,5	800	59 670
21	46,5	313	8 244	51	136,5	703	53 379	21	46,5	365	9 645	51	136,5	815	62 070
22	49,5	326	9 183	52	139,5	716	55 488	22	49,5	380	10 740	52	139,5	830	64 515
23	52,5	339	10 161	53	142,5	729	57 636	23	52,5	395	11 880	53	142,5	845	67 005
24	55,5	352	11 178	54	145,5	742	59 823	24	55,5	410	13 065	54	145,5	860	69 540
25	58,5	365	12 234	55	148,5	755	62 049	25	58,5	425	14 205	55	148,5	875	72 120
26	61,5	378	13 329	56	151,5	768	64 314	26	61,5	440	15 570	56	151,5	890	74 745
27	64,5	391	14 463	57	154,5	781	66 618	27	64,5	455	16 890	57	154,5	905	77 415
28	67,5	404	15 636	58	157,5	794	68 961	28	67,5	470	18 255	58	157,5	920	80 130
29	70,5	417	16 848	59	160,5	807	71 343	29	70,5	485	19 665	59	160,5	935	82 890
30	73,5	430	18 099	60	163,5	820	73 764	30	73,5	500	21 120	60	163,5	950	85 695

rechts nach links fahrenden Lastenzuges sind, ein Seilpolygon, dessen zugehöriges Kräftepolygon die Spannweite l als Polweite hat, und zwar derart, daß der Seilstrahl I mit dem Polstrahl 1 zusammenfällt (Abb. 99a). Dann fällt auch der Seilstrahl II noch mit dem Polstrahl 2 zusammen, während die übrigen, den entsprechenden Polstrahlen parallelen Seilstrahlen sich nicht mehr mit diesen decken. Die Ordinate y unter der ersten Last P_1 des von rechts nach links fahrenden Lastenzuges stellt dann den gesuchten Auflagerdruck dar, gemessen in dem Kräftemaßstab, in welchem die Kräfte P des Kräftepolygons aufgetragen sind.

Beweis: Durch eine Momentengleichung in bezug auf den rechten Auflagerpunkt r ergibt sich der gesuchte Auflagerdruck

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4 + P_5 \cdot b_5}{l}.$$

Da nun die Achsabstände des Lastenzuges P' gleich denen des Lastenzuges P sind, so ist $b'_1 = b_1,\ b_2' = b_2,\ b_3' = b_3$ usw.

Außerdem ist nach Voraussetzung

$$P_1' = P_1,\ P_2' = P_2,$$

$$P_3' = P_3 \text{ usw.},$$

so daß man auch setzen kann

Abb. 99.

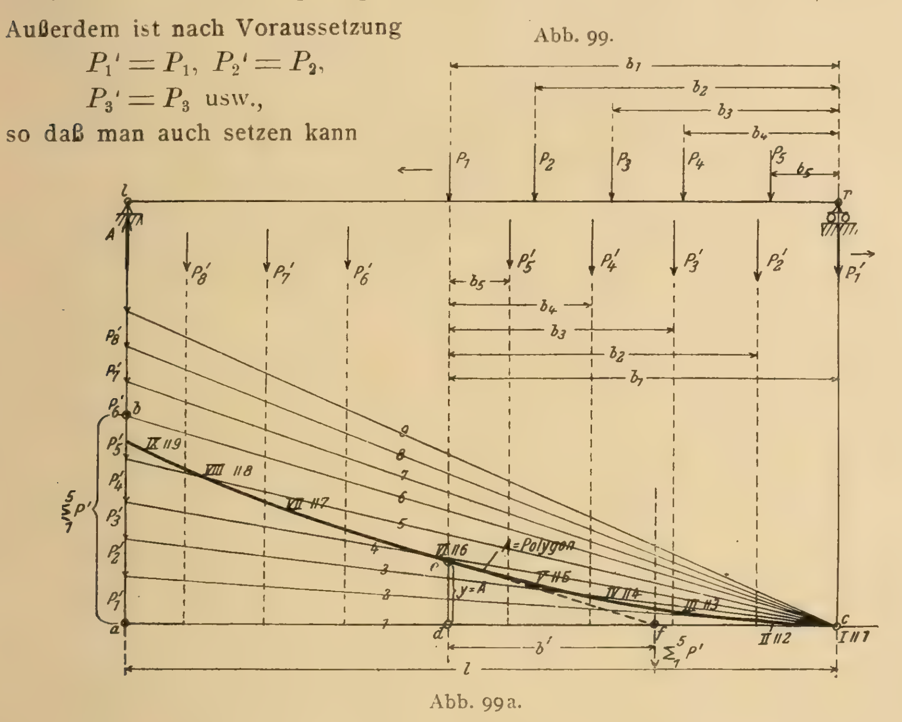


Abb. 99a.

$$A = \frac{P_1' \cdot b_1' + P_2' \cdot b_2' + P_3' \cdot b_3' + P_4' \cdot b_4' + P_5' \cdot b_5'}{l}.$$

Der Zähler des Bruches ist nun das statische Moment der Lasten P_1' bis P_5' in bezug auf die Last P_1, deren Mittelkraft $\Sigma_1^5 P'$ durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahls dieser fünf Lasten, d. h. also durch den Schnittpunkt f der Seilstrahlen I und VI gehen muß (vergl. I. Abschnitt, § 1 unter 3, Seite 3). Das statische Moment dieser Einzellasten ist aber gleich dem statischen Moment ihrer Mittelkraft in bezug auf die Last P_1, also nach Abb. 99a gleich $\Sigma_1^5 P' \cdot b'$. In den (wegen der parallelen Strahlen VI und 6) ähnlichen Dreiecken abc und def läßt sich nun die Proportion aufstellen:

$$\frac{y}{\Sigma_1^5 P'} = \frac{b'}{l}.$$

Daher ist

$$y = \frac{\Sigma_1^5 P' \cdot b'}{l} = \frac{P_1' \cdot b_1' + P_2' \cdot b_2' + P_3' \cdot b_3' + P_4' \cdot b_4' + P_5' \cdot b_5'}{l}$$

$$= \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4 + P_5 \cdot b_5}{l} = A$$

Man nennt das Seilpolygon daher das A-Polygon.

Ist das A-Polygon einmal gezeichnet, so kann aus ihm für jede beliebige Stellung des Lastenzuges P der zugehörige Auflagerdruck A sofort senkrecht unter der Last P_1 abgegriffen werden. Sinngemäß ergibt sich für einen umgekehrt fahrenden Lastenzug das B-Polygon für den Auflagerdruck B als Spiegelbild des A-Polygons.

b) **Berechnung des Maximalmoments infolge eines Lastenzuges** (Abb. 100).

Der Lastenzug werde zunächst in beliebiger Stellung angenommen. Der gefährliche Querschnitt liegt unter der der Mittelkraft am nächsten liegenden Last, da dort die Querkraft ihr Vorzeichen wechselt (vergl. auch § 6, 1, Seite 65). Das Moment für diesen, im vorläufig unbekannten Abstand x vom linken Auflager liegenden Querschnitt ist

$$M_x = A \cdot x - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 = \Sigma_1^n P \cdot \frac{b}{l} \cdot x - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2.$$

Da $b = l - s - x$ ist, so wird

$$M_x = \frac{\Sigma_1^n P}{l} (l - s - x)\, x - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2.$$

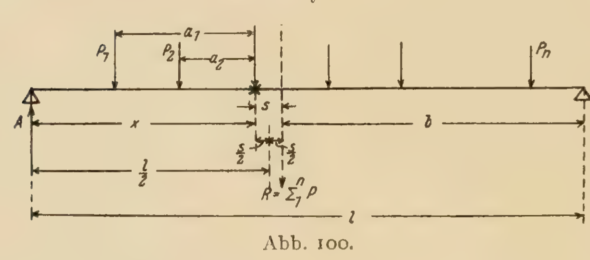


Abb. 100.

Es ist nun diejenige Stellung des Lastenzuges zu ermitteln, für welche dieses Moment ein Maximum wird. Zu diesem Zweck bilden wir die erste Ableitung $\frac{d M_x}{dx}$ und setzen diese $= 0$. Dadurch erhalten wir dann eine Gleichung zur Bestimmung von x. Demgemäß muß sein:

$$\frac{dM_x}{dx} = 0 = \frac{\Sigma_1^n P}{l} (l - s - 2\,x).$$

(Man beachte bei der Differentiation, daß das Differential der Konstanten $P_1 \cdot a_1$ und $P_2 \cdot a_2 = 0$ wird.)

Da $\frac{\Sigma_1^n P}{l}$ nicht 0 sein kann, so muß $l - s - 2x = 0$ werden, also $x = \frac{l}{2} - \frac{s}{2}$. Damit also das Moment ein Maximum wird, muß der Lastenzug derart aufgestellt werden, daß die Mitte der Spannweite die Strecke s (Abstand der Mittelkraft vom gefährlichen Querschnitt) halbiert.

Man kann das Ergebnis auch noch anders deuten. Da $b = l - s - x$ ist und $l - s - 2x = 0$, also $l - s = 2x$, so wird $b = 2x - x = x$.

Damit also das Moment ein Maximum wird, muß der Lastenzug derart aufgestellt werden, daß seine Mittelkraft vom rechten Auflager denselben Abstand hat, wie der gefährliche Querschnitt vom linken Auflager.

Beispiel.

Der Balken habe eine derartige Spannweite, daß nur zwei Lasten aufgestellt werden können (Abb. 101). Der gefährliche Querschnitt muß unter

der am meisten nach der Mitte zu wirkenden Last P liegen in einem Abstand x vom linken Auflager, der gleich dem Abstand b der Mittelkraft R vom rechten Auflager ist, wobei die Mitte der Spannweite die Strecke s halbieren muß, so daß $x = \frac{l}{2} - \frac{s}{2}$ ist.

Alsdann ist $$M_{max} = A \cdot x = A \left(\frac{l}{2} - \frac{s}{2} \right).$$

Mit $$A = R \cdot \frac{b}{l} = \frac{2\,P \cdot x}{l} = \frac{2\,P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{s}{2} \right)$$

wird $$M_{max} = \frac{2\,P}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{s}{2} \right)^2.$$

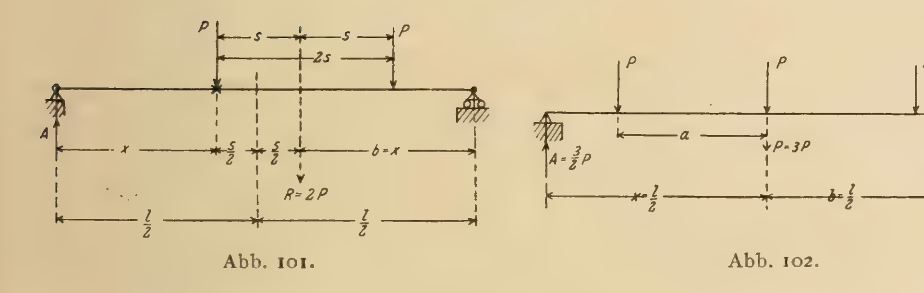


Abb. 101. Abb. 102.

Würden beispielsweise drei Lasten P auf den Balken gehen, so müßten die Lasten symmetrisch zur Mitte aufgestellt werden (Abb. 102), da dann die für M_{max} aufgestellte Bedingung $x = b$ erfüllt ist.

Alsdann ist
$$M_{max} = A \cdot \frac{l}{2} - P \cdot a = \frac{3}{2}\,P \cdot \frac{l}{2} - P \cdot a.$$

Nach diesem Verfahren sind die Momente M_{max} für eine Reihe von Spannweiten l für den preußischen Lastenzug berechnet[1]) und die Ergebnisse in den Tabellen II und IIa auf Seite 76 und 77 zusammengestellt.

Die Tabellen enthalten die größten Biegungsmomente M_{max} für Stützweiten von 1 bis 150 m in t · m. Für dazwischenliegende Stützweiten ist geradlinig einzuschalten, wozu die Werte $\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$ benutzt werden. Auch die den verschiedenen Stützweiten entsprechenden Belastungsgleichwerte kann man aus den Tabellen entnehmen. Diese sind für Überschlagsrechnungen geeignet und mit Hilfe der Gleichung $\frac{p \cdot l^2}{8} = M_{max}$ bestimmt, worin M_{max} das durch die Achslasten hervorgerufene größte Biegungsmoment ist. Die mit Hilfe dieser Gleichung gefundene gleichmäßig verteilte Belastung $p = \frac{8\,M_{max}}{l^2}$ je Längeneinheit beansprucht den Balken annähernd ebenso wie die Achslasten.

Die nachstehenden Tabellen für den 17 t- und 20 t-Zug sind aus der Hütte III, 23. Auflage, Seite 67 und 72 entnommen.

[1]) Müller-Breslau, Graph. Statik, I. Bd., V. Aufl., Seite 177 u. ff.

Tabelle II (für den 17 t-Zug).

l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$
m	t · m	t	$\frac{t}{m}$	m	t · m	t	$\frac{t}{m}$	m	t · m	t	$\frac{t}{m}$
1,0	**5,00**	5,00	40,00	**15**	**243,9**	26,1	8,672	**60**	**2 900**	81,5	6,444
1,2	6,00	5,00	33,333	16	270,0	27,8	8,438	62	3 063	84,5	6,375
1,4	7,00	5,00	28,571	17	297,8	29,2	8,243	64	3 232	85,0	6,313
1,6	8,00	5,00	25,000	18	327,0	32,8	8,074	66	3 402	86,5	6,247
1,8	9,00	5,00	22,222	19	359,8	34,2	7,973	68	3 575	88,0	6,185
2,0	**10,00**	5,00	20,00	**20**	**394,0**	37,5	7,88	**70**	**3 751**	88,0	6,124
2,2	11,00	5,00	18,181	22	469,0	40,8	7,752	72	3 927	91,0	6,069
2,4	12,00	5,80	16,666	24	550,5	40,8	7,645	74	4 109	93,0	6,003
2,6	13,16	9,25	15,574	26	632,0	48,1	7,479	76	4 295	94,5	5,949
2,8	15,01	9,30	15,316	28	728,2	52,1	7,431	78	4 484	95,0	5,806
3,0	**16,88**	9,40	15,004	**30**	**832,3**	53,5	7,398	**80**	**4 674**	97,0	5,843
3,2	18,76	9,50	14,656	32	939,2	55,4	7,338	82	4 868	97,5	5,792
3,5	21,61	13,8	14,113	34	1050	57,5	7,266	84	5 063	100	5,740
4,0	28,50	14,2	14,250	36	1165	60,5	7,191	86	5 263	101	5,693
4,5	35,63	14,2	14,076	38	1286	65,0	7,125	88	5 464	103	5,645
5,0	**42,75**	14,3	13,680	**40**	**1416**	68,0	7,08	**90**	**5 669**	104	5,599
6	57,00	16,4	12,666	42	1552	68,5	7,038	92	5 876	107	5,553
7	73,45	20,1	12,992	44	1689	71,5	6,979	94	6 080	107	5,512
8	93,50	21,2	11,687	46	1832	72,0	6,926	96	6 303	109	5,471
9	114,7	21,2	11,329	48	1970	73,5	6,861	98	6 520	110	5,431
10	**135,9**	21,2	10,872	**50**	**2123**	75,0	6,794	**100**	**6 740**	118	5,392
11	157,1	21,3	10,387	52	2273	75,0	6,724	110	7 918	126	5,235
12	178,4	21,3	9,911	54	2423	77,0	6,647	120	9 176	134	5,097
13	199,7	21,3	9,453	56	2577	80,0	6,574	130	10 520	144	4,979
14	221,6	22,0	9,045	58	2737	81,5	6,508	140	11 065	155	4,883
15	**243,9**		8,672	**60**	**2900**		6,444	**150**	**13 510**		4,803

c) Berechnung des größten Biegungsmoments für einen bestimmten Querschnitt.

Für die Lösung dieser Aufgabe mögen die drei zweckmäßigsten Methoden angegeben werden.

α) Bestimmung der gefährlichsten Zugstellung auf rechnerischem Wege.[1]

Wir nehmen den Lastenzug zunächst in beliebiger Stellung an, wobei aber eine schwere Last (Lokomotivlast) über dem fraglichen Querschnitt m stehen muß, wie bereits unter b) hervorgehoben wurde (Abb. 103). Es sei dies die $r$te Last eines von rechts nach links fahrenden Zuges, dessen erste Last P_1 dem linken Auflager am nächsten steht. Ist x_m der Abstand des Punktes m vom linken Auflager und ξ der Abstand der Mittelkraft der Kräfte P_1 bis einschl. P_r ($\Sigma_1^r P = \mathfrak{P}_r$) von m, so ist für diese Zugstellung

$$M_m = A \cdot x_m - \mathfrak{P}_r \cdot \xi.$$

Mit $A = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}$ erhält man $M_m = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} \cdot x_m - \mathfrak{P}_r \cdot \xi.$

[1] Müller-Breslau, Graph. Statik, I. Bd., V. Aufl., S. 173.

Tabelle IIa (für den 20 t-Zug).

l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$	l	M_{max}	$\frac{\Delta M_{max}}{\Delta l}$	$p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$
m	t·m	t	t/m	m	t·m	t	t/m	m	t·m	t	t/m
1,0	**6,00**	6,0	48,000	**15**	**286,8**	30,7	10,199	**60**	**3 390**	95,0	7,534
1,2	7,20	6,0	40,000	16	317,5	32,5	9,922	62	3 580	98,7	7,451
1,4	8,40	6,0	34,286	17	350,0	34,3	9,689	64	3 778	98,7	7,378
1,6	9,60	6,0	30,000	18	384,2	38,3	9,488	66	3 975	101	7,300
1,8	10,80	6,0	26,667	19	422,5	40,0	9,363	68	4 177	102	7,226
2,0	**12,00**	6,0	24,000	**20**	**462,5**	43,8	9,240	**70**	**4 381**	102	7,153
2,2	13,20	6,0	21,818	22	550,0	47,5	9,091	72	4 586	107	7,077
2,4	14,40	6,0	20,000	24	645,0	47,5	8,958	74	4 799	107	7,011
2,6	15,60	8,3	18,462	26	740,0	57,7	8,757	76	5 013	110	6,943
2,8	17,26	10,7	17,612	28	855,4	61,0	8,729	78	5 232	111	6,880
3,0	**19,41**	10,8	17,253	**30**	**977,5**	62,5	8,689	**80**	**5 454**	113	6,818
3,2	21,57	10,9	16,852	32	1102,5	65,0	8,613	82	5 680	117	6,758
3,5	24,85	16,3	16,229	34	1232	67,3	8,529	84	5 915	120	6,707
4,0	33,00	16,5	16,500	36	1367	70,1	8,438	86	6 156	121	6,658
4,5	41,25	16,5	16,296	38	1507	76,0	8,350	88	6 398	123	6,600
5	**49,50**	16,5	15,840	**40**	**1659**	78,9	8,296	**90**	**6 643**	125	6,561
6	66,00	19,7	14,667	42	1817	81,1	8,240	92	6 893	125	6,515
7	85,69	24,3	14,023	44	1979	83,7	8,178	94	7 143	128	6,467
8	110,0	25,0	13,750	46	2146	83,7	8,115	96	7 399	128	6,423
9	135,0	25,0	13,333	48	2314	85,7	8,034	98	7 656	129	6,377
10	**160,0**	25,0	12,800	**50**	**2485**	87,5	7,953	**100**	**7 915**	135	6,332
11	185,0	25,0	12,231	52	2660	87,8	7,871	110	9 266	143	6,126
12	210,0	25,0	11,667	54	2836	91,2	7,778	120	10 698	155	5,944
13	235,0	25,0	11,124	56	3018	91,2	7,700	130	12 250	168	5,799
14	260,0	26,8	10,637	58	3201	94,7	7,612	140	13 929	181	5,685
15	**286,8**		10,199	**60**	**3390**		7,534	**150**	**15 734**		5,594

Es ist nun festzustellen, ob dieses Moment bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Lastenzuges um die Strecke $d\xi$ zu- oder abnimmt. Verschiebt man den Zug um $d\xi$ nach **links,** vergrößert also ξ um $d\xi$, dann ändern sich sowohl ξ als auch b_n (Abstand der letzten Last P_n vom rechten Auflager) um dasselbe Differential $d\xi$,

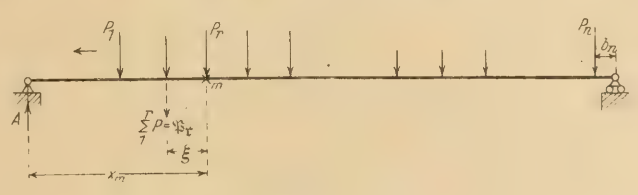


Abb. 103.

da sämtliche Lasten um dieselbe Strecke $d\xi$ vorrücken. $\mathfrak{S}_n$ und x_m bleiben unverändert, desgleichen $\mathfrak{P}_r$. M_m ändert sich um sein Differential $d\,M_m$. Es wird daher

$$d\,M_m = \mathfrak{P}_n \cdot \frac{d\,\xi}{l} \cdot x_m - \mathfrak{P}_r \cdot d\,\xi \quad \text{und} \quad \frac{d\,M_m}{d\,\xi} = \mathfrak{P}_n \cdot \frac{x_m}{l} - \mathfrak{P}_r.$$

Wird $\frac{d\,M_m}{d\,\xi}$ negativ, so nimmt nach einer bekannten Regel aus der höheren Mathematik M_m mit wachsendem ξ ab. $\frac{d\,M_m}{d\,\xi}$ wird aber negativ, wenn $\mathfrak{P}_n \cdot \frac{x_m}{l} < \mathfrak{P}_r$ bezw. wenn

$$\mathfrak{P}_n < \mathfrak{P}_r \cdot \frac{l}{x_m}.$$

Verschiebt man weiter den Zug um $-d\,\xi$ nach **rechts,** verkleinert also ξ um $d\,\xi$, dann befinden sich links von m nur noch die Lasten P_1 bis P_{r-1}, da P_r im Abstand $d\,\xi$ rechts von m steht. Ist die Mittelkraft der Kräfte P_1 bis P_{r-1} $= \mathfrak{P}_{r-1}$, so ist

$$d\,M_m = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot (-d\,\xi)}{l} \cdot x_m - \mathfrak{P}_{r-1} \cdot (-d\,\xi) = \mathfrak{P}_{r-1} \cdot d\,\xi - \frac{\mathfrak{P}_n \cdot d\,\xi}{l} \cdot x_m$$

und

$$\frac{d\,M_m}{d\,\xi} = \mathfrak{P}_{r-1} - \mathfrak{P}_n \cdot \frac{x_m}{l}.$$

Wird dann $\frac{d\,M_m}{d\,\xi}$ negativ, so nimmt M_m beim Verschieben des Lastenzuges um $-d\,\xi$ nach rechts ebenfalls ab. $\frac{d\,M_m}{d\,\xi}$ wird aber negativ, wenn $\mathfrak{P}_n \cdot \frac{x_m}{l} > \mathfrak{P}_{r-1}$, d. h. wenn

$$\mathfrak{P}_n > \mathfrak{P}_{r-1} \cdot \frac{l}{x_m}.$$

Soll daher das Moment M_m seinen Größtwert erreichen, so müssen bei der angenommenen Zugstellung die beiden aufgestellten Ungleichungen erfüllt sein.

β) **Zeichnerisches Verfahren** (Abb. 103a).

Es handele sich um die Berechnung des größten Biegungsmoments für den im Abstand x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt.

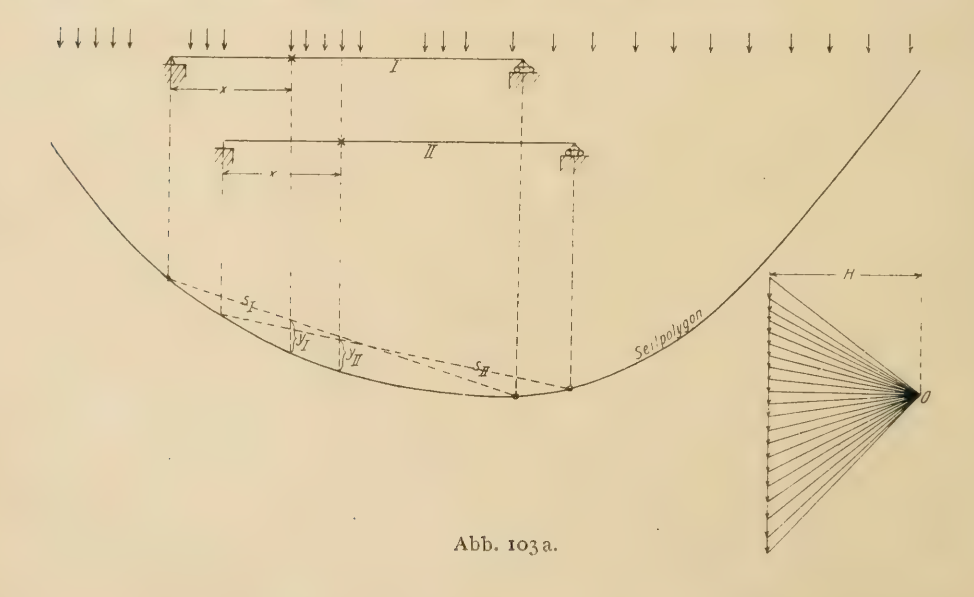


Abb. 103a.

Man nehme zunächst eine ganz beliebige Lastenstellung I an (wobei aber eine schwere Last über dem Querschnitt stehen muß) und zeichne zu ihr mit der beliebigen Polweite H ein Seilpolygon (das Seilpolygon ist in Abb. 103 a schematisch durch eine Kurve angedeutet). Zieht man dann die den Auflagern entsprechende Schlußlinie s_I, so ist $M_x = H \cdot y_I$ (vergl. II. Abschnitt, § 6, 1, a, Seite 65). Alsdann wähle man eine beliebige andere Lastenstellung II und ermittele genau wie vor das entsprechende Moment $M_x = H \cdot y_{II}$. Anstatt aber den Lastenzug gegen den Balken zu verschieben und ein neues Seilpolygon zu zeichnen, lassen wir den Lastenzug I mit dem zugehörigen Seilpolygon stehen und verschieben den Balken gegen den Lastenzug in die Stellung II, wiederum so, daß eine schwere Last über dem Querschnitt steht, was auf dasselbe hinauskommt. Nach Eintragung der Schlußlinie s_{II} ergibt sich dann $M_x = H \cdot y_{II}$. Dasselbe Verfahren wiederholen wir noch für eine Reihe anderer Stellungen des Balkens. Man findet so durch Vergleich das größte Moment M_x. Da das Seilpolygon nur einmal gezeichnet zu werden braucht und das Auffinden der größten Ordinate y bei einiger Übung recht schnell vonstatten geht, kann das Verfahren als sehr zweckmäßig empfohlen werden.

γ) Näherungsverfahren mittels der Umhüllungskurve der größten Momente bezw. mit Hilfe von Tabellen (Abb. 104).

Man ermittele aus der Tabelle II bezw. IIa das der Spannweite l entsprechende M_{max}, trage den Wert in der Balkenmitte in irgend einem Maßstab als Ordinate auf, behalte diese Ordinate in der Momentenkurve auf die Strecke 0,06 l beiderseits der Mitte bei und schließe rechts und links Parabelbögen an. Die dadurch entstehende Kurve ist die Umhüllungskurve der größten Momente für die einzelnen Querschnitte. Senkrecht unter jedem Querschnitt kann dann das größte Moment M_x in dem Maßstab, in dem M_{max} aufgetragen wurde, abgegriffen werden. Das Verfahren liefert etwas zu große Werte M_x, jedoch ist der Unterschied zwischen dem genauen und genäherten Verfahren nur ein geringer, so daß das Verfahren sehr empfohlen werden kann.

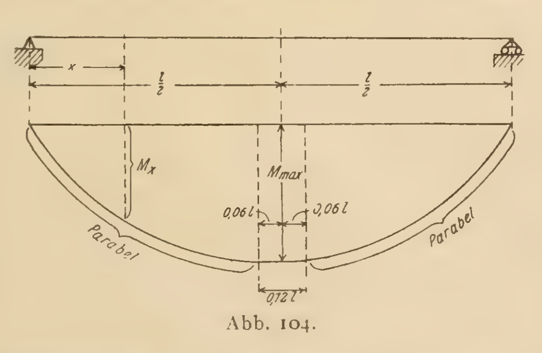


Abb. 104.

Die Gleichung eines Parabelzweiges lautet

$$M_x = \frac{4\,M_{max}}{\left[2\left(\frac{l}{2} - 0{,}06\,l\right)\right]^2} \cdot x\left[2\left(\frac{l}{2} - 0{,}06\,l\right) - x\right] \text{ (vergl. § 6, 1, a, Seite 66),}$$

woraus

$$\frac{M_x}{M_{max}} = \frac{x\,(0{,}88\,l - x)}{0{,}44^2 \cdot l^2}.$$

Nach dieser Gleichung wurden die in der Tabelle III auf Seite 81 zusammengestellten Werte $\frac{M_x}{M_{max}}$ berechnet.

Alsdann ist
$$M_x = \frac{M_x}{M_{\max}} \cdot M_{\max}.$$

Den zugehörigen Wert $M_{\max}$ findet man aus den auf Seite 76 und 77 angegebenen Tabellen II und IIa. Die Tabelle III (Seite 81) für die Werte $\frac{M_x}{M_{\max}}$ ist aus Hütte III, 23. Auflage, Seite 66 und 71 entlehnt.

Der Gebrauch der Tafel möge an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden. Gesucht sei das Moment M_x für einen im Abstand $x = 9$ m vom linken Auflager gelegenen Querschnitt eines Balkens auf zwei Stützen von der Spannweite 48 m infolge eines 20 t-Zuges. Man findet $\frac{x}{l} = \frac{9}{48} = 0{,}1875$. Aus der Tabelle entnimmt man für den nächst niedrigen Wert $\frac{x}{l} = 0{,}18$ den zugehörigen Wert $\frac{M_x}{M_{\max}} = 0{,}6508$. Der Unterschied zwischen dem wirklichen Wert $\frac{x}{l} = 0{,}1875$ und dem Tabellenwert 0,18 ist 0,0075. Dieser ist daher mit dem Interpolationskoeffizienten $\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{\max}}}{\Delta \frac{x}{l}} = 2{,}63$ (ebenfalls aus der Tabelle zu entnehmen) zu multiplizieren und das Ergebnis zu 0,6508 zu addieren. Man findet $0{,}0075 \cdot 2{,}63 = 0.0197$; daher $0{,}6508 + 0{,}0197 = 0{,}6705 = \frac{M_x}{M_{\max}}$. Zu der Spannweite $l = 48$ m gehört nach der auf Seite 77 stehenden Tabelle IIa $M_{\max} = 2314$ t · m. Mithin ist $M_x = \frac{M_x}{M_{\max}} \cdot M_{\max} = 0{,}6705 \cdot 2314 = 1551{,}537$ t · m.

Liegt eine eingleisige Eisenbahnbrücke vor, so ist dieser Wert, da auf jeden Hauptträger nur ein Raddruck entfällt, die Tabellen aber für Achsdrücke aufgestellt sind, noch durch 2 zu dividieren.

Für den 17 t-Zug würde man, da für diesen nach der auf Seite 76 stehenden Tabelle II $M_{\max} = 1976$ t · m ist, erhalten $M_{\max} = 0{,}6705 \cdot 1976$ 1324,908 t · m.

2. Bewegliche gleichmäßig verteilte Belastung (p/lfd.m).

Bewegt sich die gleichmäßig verteilte Last von rechts nach links und hat gerade die in Abb. 105 angedeutete Stellung, so ist die Gesamtlast $= p \cdot x$, angreifend in der Mitte der Strecke x. Durch eine Momentengleichung in bezug auf das rechte Auflager ergibt sich daher

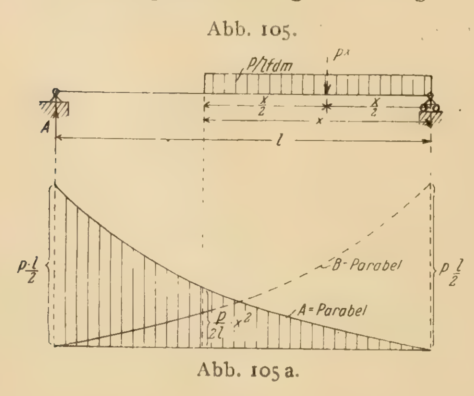


Abb. 105.

Abb. 105a.

$$A \cdot l - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$A = \frac{p}{2\,l} \cdot x^2.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Endordinaten durch folgende Be-

Tabelle III.

17 t-Zug						20 t-Zug					
$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{M_x}{M_{max}}$	$\frac{\Delta \frac{M_x}{M_{max}}}{\Delta \frac{x}{l}}$
0,00	**0,0000**	4,49	**0,25**	**0,8135**	1,91	**0,00**	**0,0000**	4,49	**0,25**	**0,8135**	1,91
0,01	0,0449	4,39	0,26	0,8326	1,81	0,01	0,0449	4,39	0,26	0,8326	1,81
0,02	0,0888	4,29	0,27	0,8507	1,70	0,02	0,0888	4,29	0,27	0,8507	1,70
0,03	0,1317	4,18	0,28	0,8678	1,60	0,03	0,1317	4,18	0,28	0,8679	1,60
0,04	0,1736	4,08	0,29	0,8838	1,50	0,04	0,1736	4,08	0,29	0,8838	1,50
0,05	**0,2144**	3,98	**0,30**	**0,8988**	1,39	**0,05**	**0,2144**	3,98	**0,30**	**0,8988**	1,39
0,06	0,2541	3,87	0,31	0,9127	1,29	0,06	0,2541	3,87	0,31	0,9127	1,29
0,07	0,2929	3,77	0,32	0,9256	1,19	0,07	0,2929	3,77	0,32	0,9256	1,19
0,08	0,3306	3,67	0,33	0,9375	1,08	0,08	0,3306	3,67	0,33	0,9375	1,08
0,09	0,3673	3,56	0,34	0,9483	0,98	0,09	0,3673	3,56	0,34	0,9483	0,98
0,10	**0,4029**	3,46	**0,35**	**0,9582**	0,88	**0,10**	**0,4029**	3,46	**0,35**	**0,9582**	0,88
0,11	0,4375	3,36	0,36	0,9669	0,77	0,11	0,4375	3,36	0,36	0,9669	0,77
0,12	0,4711	3,25	0,37	0,9747	0,67	0,12	0,4711	3,25	0,37	0,9747	0,67
0,13	0,5036	3,15	0,38	0,9814	0,57	0,13	0,5036	3,15	0,38	0,9814	0,57
0,14	0,5351	3,05	0,39	0,9871	0,46	0,14	0,5351	3,05	0,39	0,9871	0,46
0,15	**0,5656**	2,94	**0,40**	**0,9917**	0,36	**0,15**	**0,5656**	2,94	**0,40**	**0,9917**	0,36
0,16	0,5950	2,84	0,41	0,9954	0,26	0,16	0,5950	2,84	0,41	0,9954	0,26
0,17	0,6235	2,74	0,42	0,9979	0,16	0,17	0,6235	2,75	0,42	0,9979	0,16
0,18	0,6508	2,63	0,43	0,9995	0,05	0,18	0,6508	2,63	0,43	0,9995	0,05
0,19	0,6772	2,53	0,44	1,0000		0,19	0,6772	2,53	0,44	1,0000	
0,20	**0,7025**	2,43	**0,45**	**1,0000**		**0,20**	**0,7025**	2,43	**0,45**	**1,0000**	
0,21	0,7268	2,32	0,46	1,0000		0,21	0,7268	2,32	0,46	1,0000	
0,22	0,7500	2,22	0,47	1,0000		0,22	0,7500	2,22	0,47	1,0000	
0,23	0,7722	2,12	0,48	1,0000		0,23	0,7722	2,12	0,48	1,0000	
0,24	0,7934	2,01	0,49	1,0000		0,24	0,7934	2,01	0,49	1,0000	
0,25	**0,8135**		**0,50**	**1,0000**		**0,25**	**0,8135**		**0,50**	**1,0000**	

dingungen bestimmt sind: Für $x = 0$ bezw. l wird $A = 0$ bezw. $= \frac{p \cdot l^2}{2\,l} = \frac{p \cdot l}{2}$. Die Parabel entspricht dem A-Polygon eines aus Einzellasten bestehenden Lastenzuges und heißt daher die A-Parabel (Abb. 105a). Für eine in umgekehrter Richtung sich bewegende Last erhält man die B-Parabel als Spiegelbild der A-Parabel.

B. Berechnung der Größtwerte statischer Größen für beliebige Lastenzüge mit Hilfe von Einflußlinien.

1. Allgemeine Bestimmung von Einflußlinien.

Wir untersuchen den Einfluß einer wandernden Last von der Größe 1 t auf irgend eine statische Größe, z. B. das Moment M_m eines Zweigelenkbogens (Abb. 106). Die Stützenwiderstände H, A und B infolge irgend einer Laststellung seien als bekannt vorausgesetzt. Wie diese gefunden werden, wird in späteren Abschnitten gezeigt werden.

Nehmen wir zunächst einmal an, die Last 1 t stehe auf dem Querträger 0. Da dann der Zweigelenkbogen noch unbelastet ist, so wird $M_m = 0$. Nunmehr möge die Last 1 t im Querträger 1 angreifen. Infolge dieser Laststellung wird $M_m = B_1 \cdot x'_m - H_1 \cdot y_m$ (von der rechten Seite aus berechnet), worin B_1 und H_1 die Stützenwiderstände des rechten Auflagers infolge der im Punkt 1 wirkenden Last 1 t sind. **Der Bogen selbst ist als gewichtslos anzunehmen,** da lediglich der Einfluß der Last 1 t auf das Moment M_m gesucht ist. Wir setzen den gefundenen Wert $B_1 \cdot x'_m - H_1 \cdot y_m = \eta_1$ und tragen ihn senkrecht unter der Last, d. h. unter dem Querträger 1 in irgend einem Maßstab von der Wagerechten $a—b$ aus als Ordinate auf, wobei angenommen werde, daß sich η_1 positiv ergeben hat. Die Wagerechte $a—b$ wollen wir in Zukunft die Nullgerade nennen.

Dieses Verfahren wiederholen wir jetzt für eine Reihe weiterer Laststellungen, wobei sich im allgemeinen teils positive, teils negative Werte η ergeben werden. So sei z. B. infolge der Last 1 t im Punkt 4 $M_m = A_4 \cdot x_m - H_4 \cdot y_m = -\eta_4$ (von der linken Seite aus berechnet). Wenn wir die positiven Werte η nach unten auftragen, müssen die negativen Werte nach der entgegengesetzten Seite, also nach oben aufgetragen werden. η_4 muß daher senkrecht unter dem Punkt 4 oberhalb der Nullgeraden liegen.

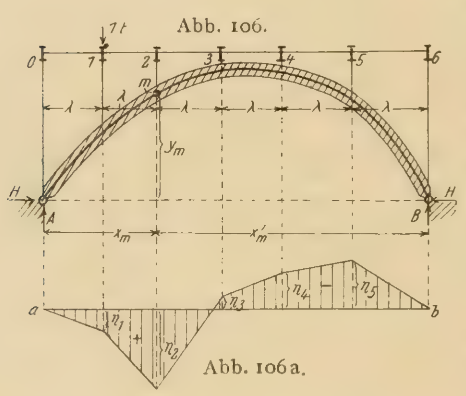


Abb. 106.

Abb. 106a.

Verbindet man dann die Endpunkte der Ordinaten η miteinander, so entsteht ein Polygon, welches die Einflußlinie für das Moment M_m genannt wird. Die von dem Polygon und der Nullgeraden eingeschlossene Fläche heißt die Einflußfläche für das Moment M_m (Abb. 106a).

Genau so wird bei der Berechnung der Einflußlinie für irgend eine andere statische Größe, z. B. eine Querkraft, eine Auflagerkraft oder beim Fachwerk für eine Stabkraft verfahren.

Wirkt nun an Stelle der Last 1 t in irgend einem Punkt die Last P t, so ist der Einfluß auf das Moment M_m Pmal so groß, also $P \cdot \eta$. Wirken mehrere Lasten P gleichzeitig, so ist nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen $M_m = \Sigma P \cdot \eta$.

Die Einflußlinie ist ein vorzügliches Mittel zur Bestimmung der ungünstigsten Stellung eines Lastenzuges.

Das größte **positive** Moment **(Max M_m)** entsteht z. B., wenn der Lastenzug nur über dem positiven Teil der Einflußlinie aufgestellt wird, und zwar so, daß der Wert $\Sigma P \cdot \eta$ ein Maximum wird (Abb. 107). Das ist offenbar der Fall, wenn eine der schwersten Lasten über der Spitze der Einflußlinie steht. Stellungen, bei denen dies nicht der Fall ist, wie z. B. bei der Stellung Ia, brauchen bei Bestimmung des Größtwertes $\Sigma P \cdot \eta$ nicht berücksichtigt zu werden, da sie unbedingt einen kleineren Wert $\Sigma P \cdot \eta$ liefern.

Den Größtwert erhält man dann, wenn man für die in Betracht kommenden Lastenstellungen (Stellungen I, II und III in Abb. 107) die zugehörigen Werte $\Sigma P \cdot \eta$ ermittelt und miteinander vergleicht.

Zur Bestimmung des größten **negativen** Moments **(Min M_m)** stelle man den Lastenzug nur über der negativen Einflußfläche auf, berechne für verschiedene Stellungen die entsprechenden Werte $\Sigma P \cdot \eta$ und stelle durch Vergleich den Größtwert fest. Hat die negative Einflußfläche wie in Abb. 107a keine Spitze, so ist natürlich die Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung zeitraubender wie in dem ersten Falle, da es dann nicht so leicht zu übersehen ist, welche Stellung als die ungünstigste in Frage kommen kann.

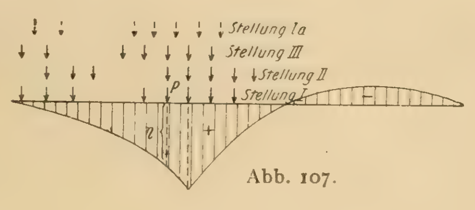


Abb. 107.

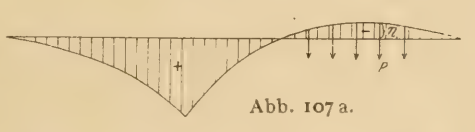


Abb. 107a.

Die Werte Max M_m und Min M_m nennt man die **Grenzwerte** von M_m.

Handelt es sich um die Bestimmung der Einflußlinie für irgend eine andere statische Größe, z. B. eine Querkraft, einen Auflagerdruck oder eine Stabspannkraft, so ist in entsprechender Weise zu verfahren.

Werden die äußeren Lasten durch Querträger auf die Hauptträger übertragen, so brauchen die Ordinaten η der Einflußlinie nur für in den Querträgern angreifende Lasten 1 t ermittelt zu werden, da die Einflußlinie zwischen zwei Querträgern geradlinig verläuft, wie nachstehende Entwicklung zeigt (Abb. 108):

Abb. 108.

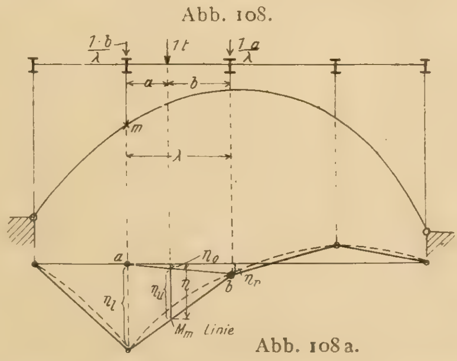


Abb. 108a.

Angenommen, die Last 1 t steht zwischen zwei Querträgern. Wir ersetzen sie durch ihre auf die benachbarten Querträger entfallenden Seitenkräfte $\frac{1 \cdot b}{\lambda}$ (links) und $\frac{1 \cdot a}{\lambda}$ (rechts).

Es ist dann

$$M_m = \Sigma P \cdot \eta = \frac{1 \cdot b}{\lambda} \cdot \eta_l + \frac{1 \cdot a}{\lambda} \cdot \eta_r,$$

wenn η_l und η_r die senkrecht unter diesen Lasten liegenden Ordinaten der Einflußlinie sind (Abb. 108a). Die Gerade $a-b$ schneidet nun von der Senkrechten durch die Last 1 t die Strecken η_o und η_u ab, und es bestehen die Proportionen

$$\frac{\eta_o}{\eta_r} = \frac{a}{\lambda} \text{ und } \frac{\eta_u}{\eta_l} = \frac{b}{\lambda}.$$

Hieraus ergibt sich $\qquad \eta_o = \frac{a}{\lambda} \cdot \eta_r$ und $\eta_u = \frac{b}{\lambda} \cdot \eta_l$.

Es ist daher $\qquad M_m = 1 \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot \eta_l + 1 \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \eta_r = 1\,(\eta_u + \eta_o).$

Verbindet man also die Endpunkte der unter den Querträgern liegenden Ordinaten der Einflußlinie geradlinig miteinander und bezeichnet die Ordinaten $\eta_o + \eta_u$ zwischen dieser Geraden und der Nullgeraden mit η, so gilt auch für eine im Felde stehende Last wie für in den Querträgern stehende Lasten die Beziehung $M_m = 1 \cdot \eta$.

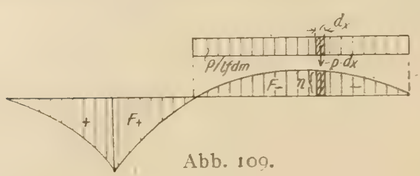


Abb. 109.

Wirkt an Stelle der Einzellasten eine gleichmäßig verteilte Verkehrslast p für eine Längeneinheit (Abb. 109), so erhält man z. B. für Min M_m, wenn man die gleichmäßig verteilte Belastung durch unendlich viele Einzellasten $p \cdot dx$ ersetzt, den Wert Min $M_m = -\int p \cdot dx \cdot \eta$ (allgemein $= \Sigma P \cdot \eta$; an Stelle der Lasten P sind hier die Lasten $p \cdot dx$ getreten und an Stelle der Summe wegen der unendlich vielen Lasten das Integral). Da p eine Konstante ist, so wird Min $M_m = -p \cdot \int \eta \cdot dx$. $\int \eta \cdot dx$ ist aber der Flächeninhalt des negativen Teils der Einflußfläche $= F_-$, so daß Min $M_m = -p \cdot F_-$ wird.

Entsprechend erhält man durch Belastung des positiven Teils der Einflußlinie Max $M_m = +p \cdot F_+$, worin F_- den Flächeninhalt des positiven Teils der Einflußfläche bedeutet. Faßt man z. B. das Eigengewicht als gleichmäßig verteilte Belastung g je Längeneinheit auf, so erhält man, da das Eigengewicht über der ganzen Einflußlinie wirkt,

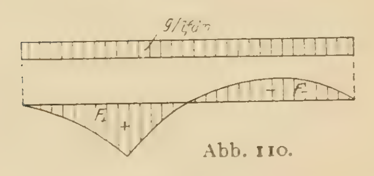


Abb. 110.

$$M_{mg} = g \cdot F_+ - g \cdot F_- = g\,(F_+ - F_-)$$
(Abb. 110).

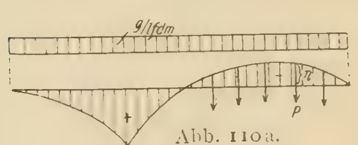


Abb. 110a.

Abb. 110b.

Abb. 110c.

Ist ferner Min M_m infolge Eigengewichts und eines Lastenzuges gesucht, so wirkt die Belastung g/lfd. m über der ganzen Einflußlinie, während der Lastenzug nur über ihrem negativen Teil aufzustellen ist, und es wird alsdann

Min $M_m = g\,(F_+ - F_-) - \Sigma P \cdot \eta$ (Abb. 110a).

Ist z. B. Max M_m infolge gleichmäßig verteilter Verkehrslast und Eigengewicht gesucht, so bringen wir die Verkehrslast nur über dem positiven Teil der Einflußlinie, das Eigengewicht aber über der ganzen Einflußlinie an (Abb. 110b). Mit $p + g = q$ wird sodann

$$\text{Max } M_m = q \cdot F_+ - g \cdot F_-.$$

Entsprechend findet man

$$\text{Min } M_m = -q \cdot F_- + g \cdot F_+.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man

$$\text{Max } M_m + \text{Min } M_m = q\,(F_+ - F_-) + g\,(F_+ - F_-) = (F_+ - F_-) \cdot (q + g).$$

Hat man nun M_{mg} in der Form $M_{mg} = g \cdot C_o$ dargestellt, wo C_o den Wert bedeutet, den M_{mg} im Fall $g = 1$ annehmen würde, so findet man

$$\textbf{Max } M_m + \textbf{Min } M_m = (q + g)\,C_o,$$

denn der Einfluß der gleichmäßig verteilten Belastung $g = 1$ ist dann

$$= 1\,(F_+ - F_-) = C_o.$$

Ist z. B. die Bestimmung von $\text{Min}\, M_m$ die einfachere, so berechnet man

$$\textbf{Min}\ \boldsymbol{M_m} = g\,(F_+ - F_-) - p \cdot F_- = \boldsymbol{g \cdot C_o - p \cdot F_-}.$$

Man kann dann sofort anschreiben

$$\textbf{Max}\ \boldsymbol{M_m = q \cdot C_o + p \cdot F_-}.$$

Zur Probe addieren wir die beiden Gleichungen und erhalten

$$\text{Max}\, M_m + \text{Min}\, M_m = (q + g)\, C_o,$$

was mit der oben aufgestellten Gleichung übereinstimmt.

Gestaltet sich die Berechnung von $\text{Max}\, M_m$ einfacher, so bilden wir

$$\textbf{Max}\ \boldsymbol{M_m} = p \cdot F_+ + g\,(F_+ - F_-) = \boldsymbol{p \cdot F_+ + g \cdot C_o}.$$

Es muß dann sein

$$\textbf{Min}\ \boldsymbol{M_m = q \cdot C_o - p \cdot F_+}.$$

$$\text{Probe: } \text{Max}\, M_m + \text{Min}\, M_m = (g + q)\, C_o.$$

Der Wert $C_o = M_m$ infolge $g = 1$ kann häufig schneller ohne Zuhilfenahme der Einflußlinie gefunden werden. Auch in diesem Fall gelten natürlich die angeschriebenen Gleichungen. Ist daher der eine Grenzwert auf irgend eine Weise gefunden, so kann der andere ohne weiteres angeschrieben werden.

Man nennt diese von Müller-Breslau aufgestellte Regel die Grenzwertregel. Wir werden in unseren späteren Untersuchungen bei Aufsuchung von Grenzwerten mehrfach hierauf zurückkommen.

2. Anwendung auf den Balken auf zwei Stützen.

a) Die Einflußlinie für den Auflagerdruck A (Abb. 111).

Steht die Last 1 t im beliebigen Abstand ξ vom rechten Auflager, so ergibt sich A durch eine Momentengleichung in bezug auf den rechten Auflagerpunkt $= \frac{1 \cdot \xi}{l}$. Dieser Wert muß also senkrecht unter der Last als Ordinate η aufgetragen werden. Die Gleichung der Einflußlinie lautet daher $\eta = 1 \cdot \frac{\xi}{l}$. Das ist die Gleichung einer Geraden, die von der Senkrechten durch das linke Auflager die Ordinate 1 abschneidet, während ihre Ordinate unter dem rechten Auflager $= 0$ sein muß. Denn für $\xi = l$ wird $A = \frac{1 \cdot l}{l} = +1$, und für $\xi = 0$ ergibt sich $A = 0$.

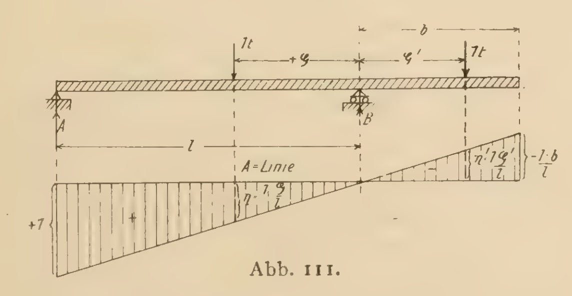


Abb. 111.

Steht dann die Last 1 t auf dem Kragarm im Abstand ξ' vom rechten Auflager, so wird $A = -\frac{1 \cdot \xi'}{l}$. Senkrecht unter der Last muß daher die Ordinate der A-Linie $= -\frac{1 \cdot \xi'}{l}$ sein. Die Gleichung des dem Kragarm ent-

sprechenden Teiles der Einflußlinie lautet daher $\eta' = -\frac{1 \cdot \xi'}{l}$. Das ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden, die bestimmt ist durch die Bedingungen, daß für $\xi' = 0$ $\eta = 0$ und für $\xi' = b$ $\eta = -\frac{1 \cdot b}{l}$ werden muß. Man erkennt leicht, daß die Ordinaten $+1$, η, η' und $-\frac{1 \cdot b}{l}$ auf einer Geraden liegen müssen. Da der Balken als starre Scheibe aufgefaßt werden darf (vgl. Abschnitt III, Seite 61), so folgt daraus der wichtige Satz:

Zu jeder statisch bestimmt gelagerten starren Scheibe gehört eine Gerade als Einflußlinie.

Dieser wichtige Satz wird weiter unten bei Besprechung der kinematischen Theorie des Fachwerks noch schärfer bewiesen werden.

b) Die Einflußlinie für das Moment M_m (Abb. 112).

Wir führen einen Schnitt durch m und bringen als Ersatz das dort wirkende Moment M_m der inneren Kräfte an, wodurch am Gleichgewichtszustand des Balkens nichts geändert ist. Dadurch zerfällt der Balken in zwei starre Scheiben. Jeder dieser Scheiben muß eine Gerade als Einflußlinie ent-

Abb. 112. Abb. 113.

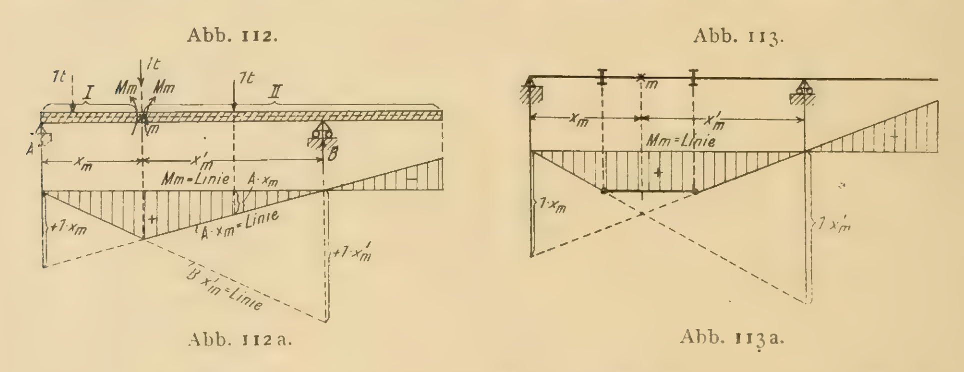


Abb. 112a. Abb. 113a.

sprechen. Nimmt man zunächst an, daß die wandernde Last 1 t auf der Scheibe II steht, so wird, da das Moment der äußeren Kräfte gleich dem Moment der inneren Kräfte sein muß, $M_m = + A \cdot x_m$ (vom links abgetrennten Teil aus berechnet). Zu der Scheibe II gehört daher die $A \cdot x_m$-Linie als Einflußlinie, d. i. eine Gerade, deren Verlängerung von der Senkrechten durch das Auflager A die Ordinate $1 \cdot x_m$ abschneidet (Abb 112a).

Steht dann die Last 1 t auf der Scheibe I, so ist $M_m = B \cdot x'_m$ (vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet). Zur Scheibe I gehört also die $B \cdot x'_m$-Linie als Einflußlinie, d. i. eine Gerade, deren Verlängerung von der Senkrechten durch das Auflager B die Ordinate $1 \cdot x'_m$ abschneidet. Unter m müssen beide Geraden sich schneiden. Denn wenn die Last 1 t gerade in m steht, so ist M_m sowohl $= A \cdot x_m$ (vom linken Teil aus berechnet) als auch $= B \cdot x'_m$ (vom rechten Teil aus berechnet). Die Ordinate der Einflußlinie unter m muß daher sowohl der $A \cdot x_m$-Linie als auch der $B \cdot x'_m$-Linie angehören, und das ist nur möglich, wenn die beiden Linien sich unter m schneiden.

Liegt die Schnittstelle m zwischen zwei Querträgern (Abb. 113), so zeichne man zunächst die Einflußlinie wie in Abb. 112a und berücksichtige dann noch, daß zwischen den beiden Querträgern die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß (Abb. 113a).

c) Die Einflußlinie für die Querkraft Q_m (Abb. 114).

Steht die Last 1 t rechts von m, also auf der Scheibe II, so wird die Querkraft $Q_m = + A$ (vom links abgetrennten Teil aus berechnet). Zu der Scheibe II gehört also die positive A-Linie als Einflußlinie, d. i. eine Gerade

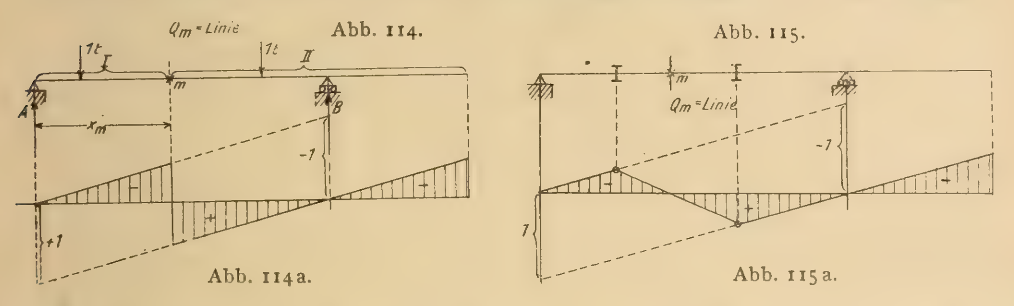


Abb. 114. Abb. 115.

Abb. 114a. Abb. 115a.

mit der Ordinate $+1$ unter dem Auflager A. Steht dann die Last 1 t links von m, also auf der Scheibe I, so wird $Q_m = - B$ (vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet. Bezüglich des Vorzeichens der Querkräfte vgl. auch Seite 35). Zu der Scheibe I gehört also die mit -1 multiplizierte B-Linie als Einflußlinie, d. i. eine Gerade mit der Ordinate -1 unter dem Auflager B. Dadurch entsteht die in Abb. 114a dargestellte Einflußlinie. Für den Fall, daß die Schnittstelle m zwischen zwei Querträgern liegt, ist wieder zu beachten, daß die Einflußlinie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verlaufen muß (vgl. Abb. 115).

d) Einflußlinien für Momente und Querkräfte für im Kragarm liegende Querschnitte.

Es handle sich um einen im Abstand x_m vom rechten freien Ende gelegenen Querschnitt (Abb. 116). Steht die Last 1 t links vom Schnitt, also auf der Scheibe I, so werden M_m und $Q_m = 0$, wie man sofort erkennt, wenn man M_m und Q_m vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet, da dann rechts vom Schnitt keine Kraft wirkt. Unter der Scheibe I müssen daher

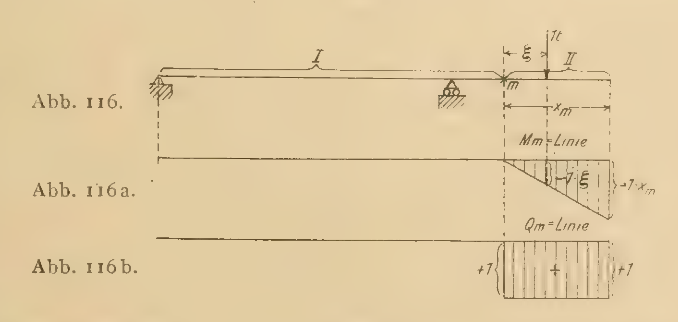


Abb. 116.

Abb. 116a.

Abb. 116b.

die Ordinaten der Einflußlinien für M_m und Q_m gleich Null sein. Steht dann die Last 1 t im Abstand ξ rechts von m, so ist $M_m = - 1 \cdot \xi$ und $Q_m = + 1$. Das sind Gleichungen von Geraden, durch welche die Einflußlinien für M_m und Q_m bestimmt sind. Sie haben die in den Abb. 116a u. 116b dargestellte Form. Man beachte dabei, daß für die in m stehende Last 1 t $M_m = 0$ und $Q_m = + 1$ wird.

Liegt der Querschnitt m zwischen zwei Querträgern (Abb. 117), so ist wieder zu beachten, daß die Einflußlinie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verlaufen muß (Abb. 117a u. 117b).

Abb. 117.

Abb. 117a.

Abb. 117b.

e) Einflußlinien für den Balken auf zwei Stützen mit Schleppträger.

Nach dem Vorangegangenen ist es leicht, auch die Richtigkeit der Einflußlinien für A, B, M_m und Q_m des in Abb. 118 dargestellten Balkens zu erkennen.

Abb. 118.

Abb. 118a.

Abb. 118b.

Abb. 118c.

Abb. 118d.

f) Der als Balken auf zwei Stützen gelagerte vollwandige Bogen mit schräg beweglichem Auflager (Abb. 119).

Zerlegt man den normal zur Gleitbahn des beweglichen Auflagers wirkenden Auflagerdruck B nach $B \cos \alpha$ (senkrecht) und $B \sin \alpha$ (wagerecht), so wird infolge einer im Abstand ξ vom linken Auflager wirkenden Last 1 t

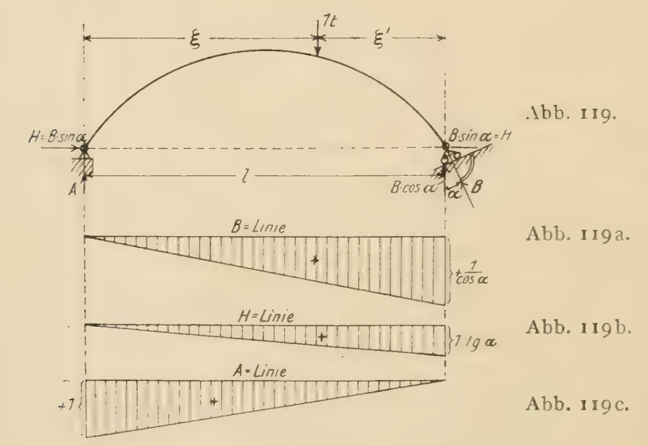


Abb. 119.

Abb. 119a.

Abb. 119b.

Abb. 119c.

$$B \cos \alpha = \frac{1 \cdot \xi}{l},$$

also
$$B = \frac{1 \cdot \xi}{l \cos \alpha}.$$

Die B-Linie ist daher eine Gerade, die von der rechten Auflagersenkrechten die Ordinate $\frac{1}{\cos \alpha}$ abschneidet (Abb. 119a). Der wagerechte Schub des Bogens ist $B \sin \alpha$. Die Einflußlinie für den wagerechte Schub ist daher die $B \cdot \sin \alpha$-

Linie, d. h. eine Gerade mit der Ordinate $\frac{1 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \cdot \mathrm{tg}\, \alpha$ unter dem rechten Auflager (Abb. 119b).

A wird infolge der im Abstand ξ' vom rechten Auflager wirkenden Last $1\,t = \frac{1 \cdot \xi'}{l}$. Der Auflagerdruck A ist also gleich dem Auflagerdruck A eines geraden Balkens auf zwei Stützen von der Spannweite l, die A-Linie daher eine Gerade mit der Ordinate $+1$ unter dem linken Auflager (Abb. 119c).

Infolge beliebiger Lasten P wird $M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi_m - H \cdot y_m$. Der Wert $A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi_m$ ist das Moment für den Punkt m eines geraden Balkens (Abb. 120b), da auch A, wie soeben nachgewiesen, gleich dem Auflagerdruck eines geraden Balkens ist. Setzen wir dieses Moment $= M_{om}$, so wird

$$\boldsymbol{M_m = M_{om} - H \cdot y_m}.$$

Man erhält daher die M_m-Linie, wenn man von der M_{om}-Linie die $H \cdot y_m$-Linie abzieht (Abb. 120c).

Abb. 120.

Abb. 120a.

Abb. 120b.

Abb. 120c.

Abb. 120d.

Abb. 120e.

Der Nullpunkt der Einflußlinie liegt unter dem Schnittpunkt E der Verbindungslinie des festen Auflagergelenks mit m und der Richtung von B. Steht nämlich die Last 1 t gerade in E und berechnet man das Moment M_m für diese Laststellung vom links abgetrennten Teil aus (Abb. 120a), so wird $M_m = 0$, da die einzige am links abgetrennten Teil wirkende Kraft K_l durch m geht, ihr Hebelarm für m also $= 0$ ist. Trägt man jetzt die Ordinaten η_1 und η_2 der Einflußlinie von einer Wagerechten ab, so erhält man die in Abb. 120d

dargestellte Form. Der zwischen a und e gelegene Teil der Einflußlinie hat dabei genau die Form der M_m-Linie für einen einfachen Balken von der Spannweite $a—e$ (Abb. 120e). Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion: Man ermittele zunächst den Nullpunkt E, zeichne den einfachen Balken $a—e$ und die M_m-Linie für diesen Balken und vervollständige dann die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben.[1]) Hat der Balken ein in wagerechter Richtung bewegliches Auflager, so liegt E senkrecht über diesem Auflager. In diesem Falle stimmen daher sämtliche Einflußlinien mit den entsprechenden Einflußlinien eines geraden Balkens von der Spannweite l überein.

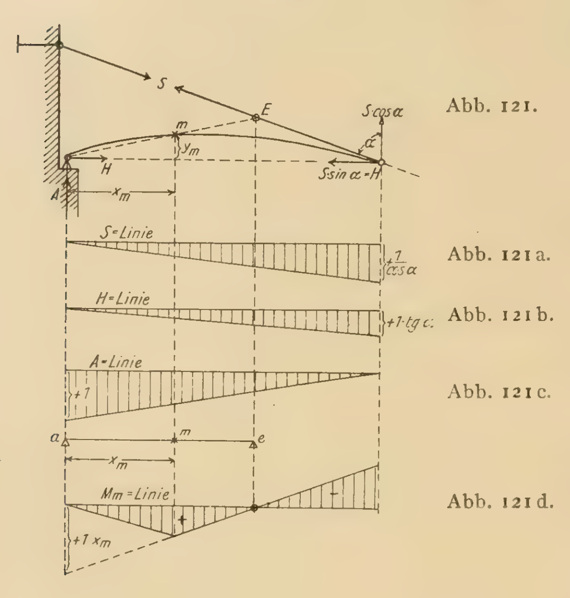


Abb. 121. Abb. 121a. Abb. 121b. Abb. 121c. Abb. 121d.

Das in Abb. 121 dargestellte System verhält sich statisch gerade so wie der Balken mit schräg beweglichem Auflager. Den Auflagerdruck B des Balkens vertritt hier die Stabspannkraft S. Die Einflußlinien für S, H, A und M_m stimmen daher überein mit den für den Balken ermittelten Einflußlinien für B, H, A und M_m (Abb. 121a bis 121d).

§ 7. Der Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

Es sei vorausgeschickt, daß für die Berechnung aller Fachwerksysteme angenommen wird, daß die Stäbe durch Gelenkbolzen miteinander verbunden sind und daß ausschließlich diese Gelenkpunkte als Belastungspunkte gewählt werden. Dadurch können in jedem Stabe nur Zug- oder Druckspannungen entstehen. Denn wenn man sich einen Stab durchschnitten denkt und an jeder Schnittstelle eine Kraft hinzufügt, welche den früheren Gleichgewichtszustand wieder herstellt, so fällt diese Kraft stets mit der Längenrichtung des Stabes zusammen, da sie andernfalls den Stab um den Gelenkpunkt drehen würde. In Wirklichkeit werden in den meisten Fällen (wenigstens in den europäischen Staaten) die Fachwerkstäbe mit den Knotenblechen fest vernietet, so daß eine Drehung der Stäbe um die Knotenpunkte nicht möglich ist, die Stäbe sich also verbiegen müssen, wodurch Zusatzspannungen („Nebenspannungen") entstehen, die aber in der Regel vernachlässigt werden dürfen.

Ferner seien zunächst senkrechte Kräfte P vorausgesetzt, die also bei wagerecht beweglichen Auflagern auch nur senkrechte Auflagerdrücke A und B hervorrufen. Der Einfluß beliebig schräg gerichteter Kräfte wird weiter unten gezeigt werden.

[1]) Nach Müller-Breslaus für den Dreigelenkbogen benutzten Methode des stellvertretenden Balkens. Graph. Statik, Bd. I, 5. Aufl., S. 222.

1. Der Parallelträger.

A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte (Abb. 122).

1. Berechnung der Spannkräfte in den Gurtstäben.

Zur Berechnung von O_m benutzen wir das Rittersche Schnittverfahren:[1] Wir zerlegen durch einen Schnitt, der außer dem fraglichen Stab O_m nur noch zwei andere Stäbe mit unbekannter Stabkraft trifft, das System in zwei Teile (Abb. 122) und ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte, die vorläufig als Zugkräfte eingeführt werden und nunmehr zu den äußeren Kräften zählen. Dadurch ist am Gleichgewichts-

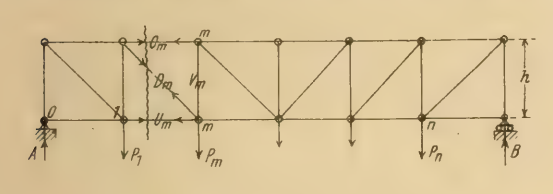


Abb. 122.

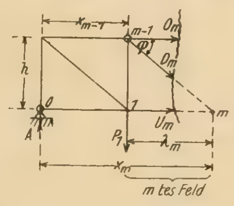


Abb. 123.

zustand nichts geändert, da die beiden Teile, jeder für sich, wieder im Gleichgewicht sind. Sodann untersuchen wir den Gleichgewichtszustand des einen abgetrennten Teils, z. B. des linken (Abb. 123). (Es empfiehlt sich, den Teil zu wählen, an dem die wenigsten Kräfte angreifen, um die Rechnung möglichst zu vereinfachen.)

Um nun eine Gleichung zu erhalten, in der nur die gesuchte Spannkraft O_m als Unbekannte enthalten ist, benutzen wir die Gleichgewichtsbedingung: Die Summe der Momente in bezug auf den Schnittpunkt der außer O_m vom Schnitt getroffenen Stäbe, also in bezug auf den Punkt m muß $= 0$ sein. Dann schneiden D_m und U_m den Momentendrehpunkt, ihre Momente sind also $= 0$, da ihre Hebelarme $= 0$ sind. Die Gleichung lautet daher:

$$O_m \cdot h + A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m = 0$$

$$O_m = -\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m}{h}.$$

$A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m$ ist hierin das Biegungs- oder Angriffsmoment M_m für den Punkt m, so daß wir erhalten

$$\boldsymbol{O_m = -\frac{M_m}{h}}.$$

Da wir O_m vorläufig als Zugkraft positiv eingeführt hatten, die Rechnung aber ein negatives Vorzeichen ergibt, so ist O_m keine Zug-, sondern eine Druckkraft.

Zur Berechnung von U_m benutzen wir die Momentengleichung in bezug auf den Punkt $m - 1$:

$$U_m \cdot h - A \cdot x_{m-1} = 0$$

$$\boldsymbol{U_m} = + \frac{A \cdot x_{m-1}}{h} = + \boldsymbol{\frac{M_{m-1}}{h}} \text{ (Zug).}$$

[1]) A. Ritter, Eiserne Dach- und Brückenkonstruktionen. Leipzig. A. Kröner.

Da die Zeiger bei anderer Benennung leicht verwechselt werden, empfiehlt sich folgende Gedächtnisregel:

$$\text{Gurtspannkraft} = \frac{\text{Moment für den dem Stabe gegenüberliegenden Knotenpunkt}}{\text{Hebelarm}}.$$

Der Obergurt wird gedrückt, der Untergurt gezogen.

2. Berechnung der Spannkräfte in den Füllungsstäben.

a) Die Diagonalen.

Das Rittersche Schnittverfahren würde hier nicht zum Ziele führen; denn zur Berechnung von D_m müßte die Momentengleichung in bezug auf den Schnittpunkt von O_m und U_m angesetzt werden, die sich erst im Unendlichen schneiden. Wir benutzen daher eine andere Gleichgewichtsbedingung, nämlich: Die Summe aller senkrechten Kräfte muß $= 0$ sein ($\Sigma V = 0$). Dann fallen O_m und U_m aus der Gleichung heraus, da sie keinen Beitrag zu den senkrechten Kräften liefern, so daß in der Gleichung nur die eine Unbekannte D_m enthalten ist. Demgemäß muß sein

$$D_m \cdot \sin\varphi + P_1 - A = 0 \text{ (Abb. 123)}; \quad D_m = + \frac{A - P_1}{\sin\varphi}.$$

$A - P_1$ ist aber die Querkraft für das Schnittfeld, also für das $m$te Feld, d. h. $= Q_m$, so daß wir erhalten

$$\boldsymbol{D_m = + \frac{Q_m}{\sin\varphi}}.$$

D_m wird eine Zugkraft, wenn Q_m positiv, und eine Druckkraft, wenn Q_m negativ ist.

b) Die Vertikalen.

Für die Berechnung der Spannkräfte in den Gurtstäben und den Diagonalen ist es gleichgültig, ob die Fahrbahn unten oder oben liegt, d. h. ob die Kräfte P in den Knotenpunkten des Unter- oder Obergurts angreifen. Denn die Gurtspannkräfte sind von den Biegungsmomenten abhängig, die bei senkrechten Kräften P für irgend einen Punkt m für beide Fälle gleich groß ausfallen (die Hebelarme der senkrechten Kräfte sind ja die gleichen). Ebenso sind die Diagonalspannkräfte von den Querkräften für ein und dasselbe Schnittfeld abhängig, die, wie man aus den Abb 124 u. 124a erkennen kann, ebenso groß bei unten wie bei oben angreifenden Kräften P werden.

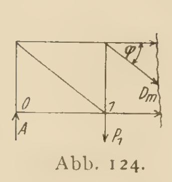


Abb. 124.

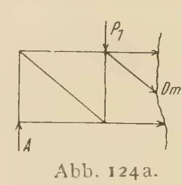


Abb. 124a.

Abb. 125.

Abb. 125a.

Bei der Berechnung der Spannkräfte in den Vertikalen muß man jedoch die beiden Belastungsfälle besonders behanden, da hier die Lage der Fahrbahn von Einfluß auf die Spannkräfte ist, wie aus nachstehenden Untersuchungen hervorgeht.

α) Die Fahrbahn liege unten (Abb. 125).

Wir führen den Ritterschen Schnitt, der außer der gesuchten Spannkraft V_m nur noch zwei andere unbekannte Stabkräfte trifft, und untersuchen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils (Abb. 125a). Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ liefert dann die Gleichung:

$$A + V_m - P_1 - P_m = 0; \qquad V_m = -(A - P_1 - P_m).$$

$A - P_1 - P_m$ ist die Querkraft für das $(m+1)$te Feld, d. h. $= Q_{m+1}$, so daß

$$\boldsymbol{V_m = -Q_{m+1}}.$$

V_m wird eine Druckkraft bei positivem und eine Zugkraft bei negativem Q_{m+1}.

β) Die Fahrbahn liege oben (Abb. 126).

Nach Führung des Ritterschen Schnittes setzen wir für den links abgetrennten Teil (Abb. 126a) wieder die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an und erhalten

$$V_m + A - P_1 = 0;$$
$$V_m = -(A - P_1).$$

$A - P_1$ ist aber die Querkraft für das $m$te Feld $= Q_m$, so daß

$$\boldsymbol{V_m = -Q_m}.$$

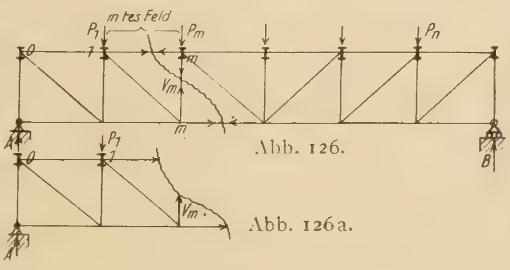


Abb. 126.

Abb. 126a.

Auch die Formeln für die Spannkräfte in den Diagonalen und Vertikalen merkt man sich zweckmäßig, um von den Zeigern unabhängig zu sein, folgendermaßen:

$$D = \frac{Q}{\sin\varphi}; \quad V = -Q.$$

Hierin ist unter Q jedesmal die Querkraft für das Schnittfeld zu verstehen, d. h. für das Feld, welches von den Querträgern begrenzt ist, zwischen denen der Rittersche Schnitt hindurchläuft. Diese Regel gilt dann ganz allgemein sowohl für unten als auch für oben liegende Fahrbahn.

Ausnahmen bestehen für die Stäbe V_0 und V_t. (Abb. 127).

1. Unten liegende Fahrbahn. Zur Berechnung von V_0 schneiden wir den Knoten O heraus, ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte und benutzen die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$. Man erhält $V_0 + A = 0$, $\boldsymbol{V_0 = -A}$ (Druck).

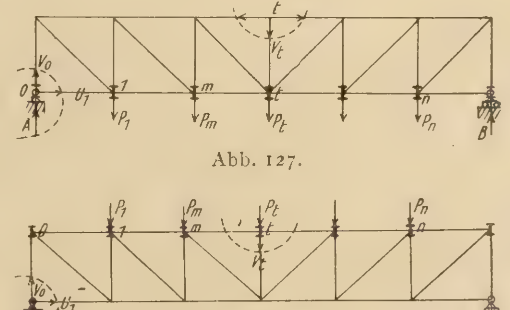


Abb. 127.

Abb. 128.

Zur Berechnung von V_t schneiden wir den oberen Knoten t heraus und benutzen für den abgetrennten Knoten dieselbe Gleichgewichtsbedingung. So erhält man $\boldsymbol{V_t = 0}$. Der Stab bleibt also spannungslos infolge der Lasten P.

2. Bei oben liegender Fahrbahn (Abb. 128) ergibt sich unter Benutzung derselben Gleichgewichtsbedingung:

$$V_o + A = 0; \qquad \boldsymbol{V_o = -A} \text{ (Druck)},$$
$$V_t + P_t = 0; \qquad \boldsymbol{V_t = -P_t} \text{ (Druck)}$$

V_t ist hier also nur von der Knotenlast abhängig.

Ferner ist noch $U_1 = + \frac{M_o}{h}$. Da aber $M_o = 0$ ist, so wird $U_1 = 0$ (für Fahrbahn oben und Fahrbahn unten).

B. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte mit Hilfe von Einflußlinien.

Zur Berechnung der Einflußlinien benutzen wir die im vorigen Abschnitt abgeleiteten allgemeinen Formeln. So ist $O_m = -\frac{M_m}{h}$. Die O_m-Linie hat also die Form der M_m-Linie, nur muß unter dem linken Auflager statt der Ordinate $+1 \cdot x_m$ die Ordinate $-\frac{1 \cdot x_m}{h}$ aufgetragen werden (Abb. 129a). Sinngemäß ergibt sich die Einflußlinie für U_m aus der Formel $U_m = + \frac{M_{m-1}}{h}$ (Abb. 129b).

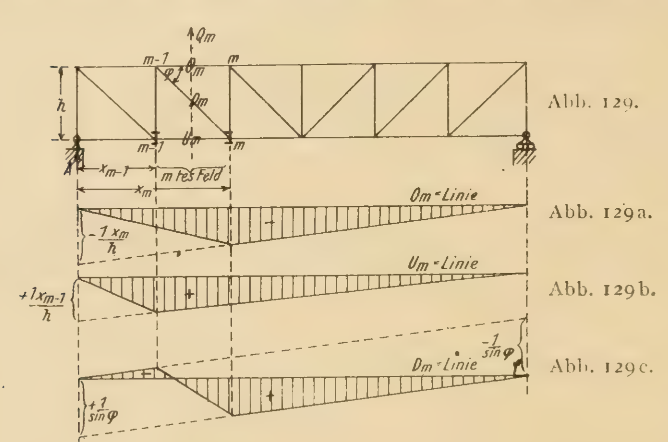


Abb. 129.
Abb. 129a.
Abb. 129b.
Abb. 129c.

Da $D_m = + \frac{Q_m}{\sin\varphi}$, so hat die D_m-Linie die Form der Q_m-Linie mit den Ordinaten $+\frac{1}{\sin\varphi}$ bezw. $-\frac{1}{\sin\varphi}$ unter dem linken bezw. rechten Auflager (Abb. 129c). Zu beachten ist dabei, daß zwischen den beiden Querträgern des Schnittfeldes, für welches die Querkraft Q_m in Ansatz zu bringen ist, die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß (vergl. auch Seite 83 u. Abb. 115). Die Lage der Fahrbahn ist für diese Einflußlinien gleichgültig.

Die Einflußlinie für V_m bei unten liegender Fahrbahn wird erhalten mittels der Formel $V_m = - Q_{m+1}$.

Abb. 130. Abb. 131.

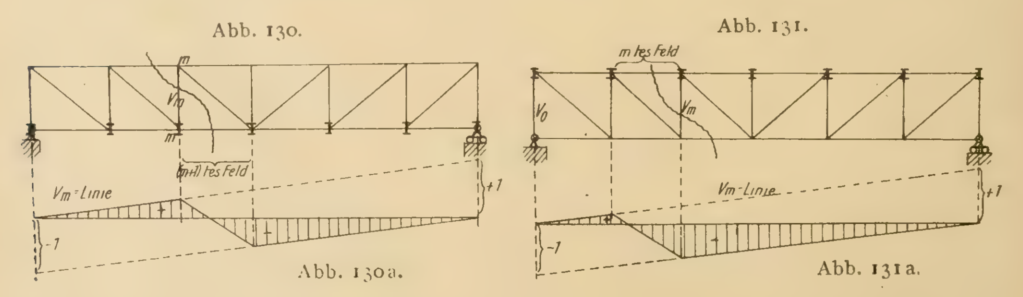


Abb. 130a. Abb. 131a.

Die V_m-Linie ist also die Q_{m+1}-Linie mit umgekehrten Vorzeichen. Sie muß zwischen den beiden Querträgern des $(m+1)$ten Feldes, für welches die Querkraft in Ansatz zu bringen ist, geradlinig verlaufen (Abb. 130a).

Bei oben liegender Fahrbahn erhält man die Einflußlinie für V_m mittels der Formel $V_m = - Q_m$. Die V_m-Linie ist also die Q_m-Linie mit umgekehrten Vorzeichen. Hier muß sie zwischen den beiden Querträgern des *m*ten Feldes geradlinig verlaufen (Abb. 131a).

Für die V_o- und V_t-Linie bestehen wieder Ausnahmen, wie aus den auf Seite 93 u. 94 gemachten Ausführungen hervorgeht. Liegt die Fahrbahn unten, so ist infolge der über dem linken Auflager stehenden Last 1 *t* $V_o = 0$. Schneidet man nämlich den Knoten o heraus und benutzt für den abgetrennten Knoten die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$, so erhält man $V_o + A - 1 = 0$ (Abb. 132). Da nun die Last 1 *t* in o den Auflagerdruck $A = 1\ t$ hervorruft, so folgt $V_o = 1 - A = 1 - 1 = 0$. Steht dann die Last 1 *t* im Querträger 1 bezw. rechts davon, so muß sein $V_o + A = 0$, so daß $V_o = - A$. Für diese Laststellungen fällt daher die V_o-Linie mit der $-A$-Linie zusammen. Zwischen den Querträgern o und 1 muß die Einflußlinie geradlinig verlaufen. Daraus ergibt sich die in Abb. 132a dargestellte Form der Einflußlinie. Die V_t-Linie fällt mit der Nullgeraden zusammen, da V_t bei unten liegender Fahrbahn für alle Laststellungen $= 0$ ist.

Abb. 132.

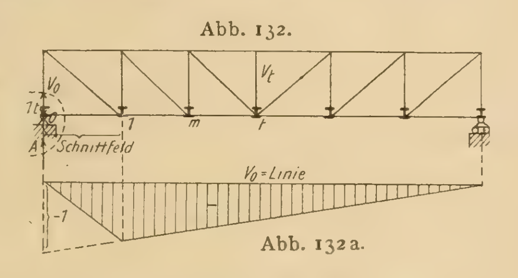


Abb. 132a.

Bei oben liegender Fahrbahn ist dagegen für alle möglichen Laststellungen, auch für die in dem Querträger *O* wirkende Last 1 t $V_o = - A$. Denn für den abgetrennten Auflagerknoten (Abb. 133) gilt die Gleichgewichtsbedingung $V_o + A = 0$, also $V_o = - A$. Die Einflußlinie hat daher die in Abb. 133a dargestellte Form.

V_t ist nur abhängig von der Knotenlast, wie auf Seite 94 nachgewiesen wurde. Steht daher die Last 1 t über dem Knoten *t*, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für den abgetrennten Knoten $V_t + 1 = 0$, also $V_t = - 1$. Senkrecht unter der Last muß daher die Ordinate der Einflußlinie $= - 1$ sein. Lasten links vom Knoten *l* und rechts vom Knoten *r* haben keinen Einfluß auf V_t. Daher ergibt sich für die V_t-Linie die in Abb. 133b dargestellte Form.

Abb. 133.

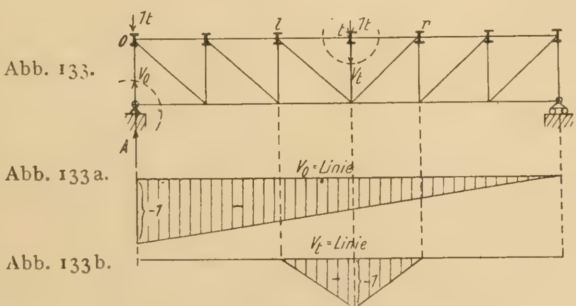


Abb. 133a.

Abb. 133b.

Mit Hilfe der Einflußlinien lassen sich nun leicht die Größtwerte der Spannkräfte nach dem auf Seite 83 u. 84 beschriebenen allgemeinen Verfahren ermitteln. Gesucht sei z. B. die größte Spannkraft in O_m infolge eines Lastenzuges (Abb. 134). Der Lastenzug muß alsdann so aufgestellt werden, daß ein Größtwert $\Sigma P \cdot \eta$ entsteht. Diese ungünstigste Lastenstellung muß durch Probieren gefunden werden, wobei immer eine schwere Last (Lokomotivlast) über die Spitze der Einflußlinie zu stellen ist. Alsdann wird

Min $O_m = -20(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5) - 15(\eta_6 + \eta_7 + \eta_8)$ (Abb. 134a).
(Wir schreiben Min O_m, da es sich um eine Druckkraft handelt.)

Wird z. B. **Min V_m** gesucht (Abb. 135), so finden wir die ungünstigste Lastenstellung ebenfalls wieder durch Probieren. Wir stellen den Lastenzug über dem negativen Teil der Einflußlinie zunächst in der „Grundstellung"

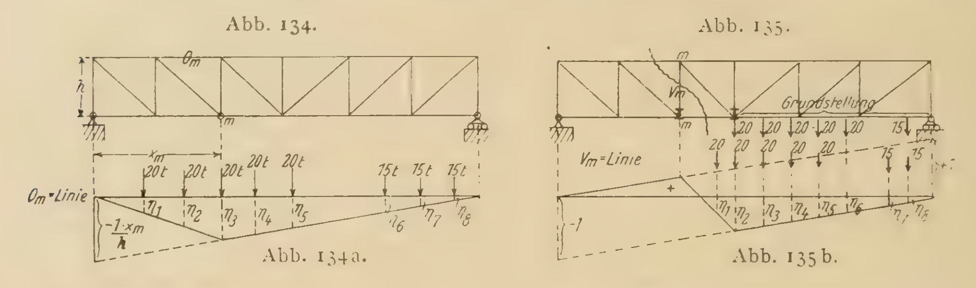


Abb. 134. Abb. 134a. Abb. 135. Abb. 135b.

auf, d. h. derart, daß die erste Last über dem Querträger des Schnittfeldes steht, da immer eine schwere Last über der Spitze der Einflußlinie stehen muß. Für diese Stellung findet man

$$\Sigma P \cdot \eta = -20(\eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5 + \eta_6) - 15 \cdot \eta_8 \text{ (Abb. 135b).}$$

Dann stellen wir die erste Last in das Feld hinein, so daß die zweite über dem Querträger steht, und finden

$$\Sigma P \cdot \eta = -20(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 + \eta_5) - 15(\eta_7 + \eta_8).$$

Erforderlichenfalls muß man noch eine weitere Last in das Feld hineinschieben (vorausgesetzt, daß sie noch über der negativen Beitragsstrecke der Einflußlinie steht) und auch für diese Lastenstellung den Wert $\Sigma P \cdot \eta$ bilden.

Der Größtwert $\Sigma P \cdot \eta$ wird dann für Min V_m gewählt. Offenbar ist dieses Verfahren sehr zeitraubend. Im folgenden Kapitel sollen daher zweckmäßigere Methoden angegeben werden.

C. Die zweckmäßigsten Methoden zur Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge eines Lastenzuges.

1. Berechnung der Größtspannkräfte in den Gurtstäben.

Da die Einflußlinien für die Gurtspannkräfte nur ein Vorzeichen haben, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, so ist volle Belastung des Balkens die ungünstigste. Da ferner

$$M_m = -\frac{M_m}{h} \text{ und } U_m = +\frac{M_{m-1}}{h}$$

ist, so braucht man nur die größten Biegungsmomente M_m bezw. M_{m-1} infolge voller Belastung angeben zu können, womit dann die Größwerte für O_m und U_m bestimmt sind. Diese Berechnung der größten Biegungsmomente führe man durch nach einem der in § 6, 2, c), Seite 76 u. f. angegebenen drei Verfahren, womit die vorliegende Aufgabe gelöst ist.

2. Berechnung der Größtspannkräfte in den Füllungsstäben.

Die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Füllungsstäben haben zweierlei Vorzeichen, so daß die ungünstigste Lastenstellung nicht bei voller

sondern bei teilweiser Belastung stattfindet. Bei Berechnung der größten Zugspannkräfte darf die Verkehrslast nur über dem positiven, bei Berechnung der größten Druckspannkräfte nur über dem negativen Teil der Einflußlinie stehen, wobei die ungünstigste Lastenstellung durch Probieren gefunden wird. Zur Vermeidung dieser zeitraubenden Arbeit sei nachfolgend ein Kriterium hergeleitet, das eine schnelle Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung ermöglicht.

Da die Spannkräfte in den Füllungsstäben von den größten Querkräften abhängig sind $\left(D = \frac{Q}{\sin\varphi};\ V = -Q\right)$, so muß ein Kriterium hergeleitet werden, aus dem man die ungünstigste Lastenstellung für die größte positive oder negative Querkraft erkennen kann. Gesucht sei z. B. diejenige Lastenstellung, die Max Q, d. h. die größte positive Querkraft für das in Abb. 136 eingezeichnete Schnittfeld hervorruft. Damit Max Q entsteht, müssen die Lasten rechts vom Schnittfeld aufgestellt werden (vergl. Abb. 115a, Seite 87). Es ist nur die Frage, ob der Lastenzug in der Grundstellung stehen muß, oder ob eine oder mehrere Lasten in das Schnittfeld zu stellen sind. Unter allen Umständen muß, wie bereits früher festgestellt wurde, eine schwere Last (Lokomotivlast) über dem Querträger des Schnittfeldes stehen.

Abb. 136.

Wir nehmen zunächst einmal an, es stehen r-Lasten (P_1 bis P_r) im Schnittfeld, und zwar so, daß sich P_r gerade über dem Querträger befindet (Abb. 137). Die Mittelkraft dieser r-Lasten einschl. der über dem Querträger stehenden Last P_r sei $= \sum_1^r P$, die Mittelkraft aller auf dem Balken stehenden Lasten $= \sum_1^n P$. Innerhalb des Feldes selbst ist dann die Mittelkraft $= \sum_1^{r-1} P$, die auf die benachbarten Querträger die Lasten $\sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $\sum_1^{r-1} P \cdot \frac{a}{\lambda}$ überträgt. Da der Auflagerdruck $A = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l}$ ist, so wird die Querkraft

Abb. 137.

$$Q = A - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda} = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda}.$$

Rückt man jetzt den Lastenzug um das unendlich kleine Stück dx nach links, so ändern sich c und b um dasselbe dx. Auf den linken Querträger entfällt dann die Last

$$\sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b + dx}{\lambda} + P_r \cdot \frac{dx}{\lambda},$$

weil auch noch die Last P_r in das Feld getreten ist und nunmehr den Abstand dx vom rechten Querträger hat. Der Auflagerdruck A wird $= \sum_1^n P \cdot \frac{c + dx}{l}$ und die Querkraft Q ändert sich um ihr Differential. Somit erhält man

$$Q + dQ = \sum_1^n P \cdot \frac{c + dx}{l} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b + dx}{\lambda} - P_r \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda} + \sum_1^n P \cdot \frac{dx}{l} - \left(\sum_1^{r-1} P \cdot \frac{dx}{\lambda} + P_r \cdot \frac{dx}{\lambda} \right).$$

Hierin ist

$$\sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda} = Q \quad \text{und} \quad \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{dx}{\lambda} + P_r \cdot \frac{dx}{\lambda}$$

$$= \frac{dx}{\lambda} \left(\sum_1^{r-1} P + P_r \right) = \sum_1^r P \cdot \frac{dx}{\lambda}.$$

Es wird daher $$Q + dQ = Q + \sum_1^n P \cdot \frac{dx}{l} - \sum_1^r P \cdot \frac{dx}{\lambda},$$

woraus $$dQ = \sum_1^n P \cdot \frac{dx}{l} - \sum_1^r P \cdot \frac{dx}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{\sum_1^n P}{l} - \frac{\sum_1^r P}{\lambda}.$$

Trägt man jetzt für eine Reihe von Stellungen des Lastenzuges die entsprechenden Querkräfte für das Schnittfeld $Q_I = A_I$, $Q_{II} = A_{II}$, $Q_{III} = A_{III}$ usw. jedesmal über der ersten Last des Lastenzuges als Ordinaten auf und verbindet ihre Endpunkte miteinander, so entsteht die Querkraftkurve für das Schnittfeld. $\frac{dQ}{dx}$ ist dann $= \operatorname{tg} \alpha$ (Abb. 138). Diese Kurve steigt an, d. h. die Querkräfte für das Schnittfeld wachsen, solange $\frac{dQ}{dx}$ positiv ist. Dort,

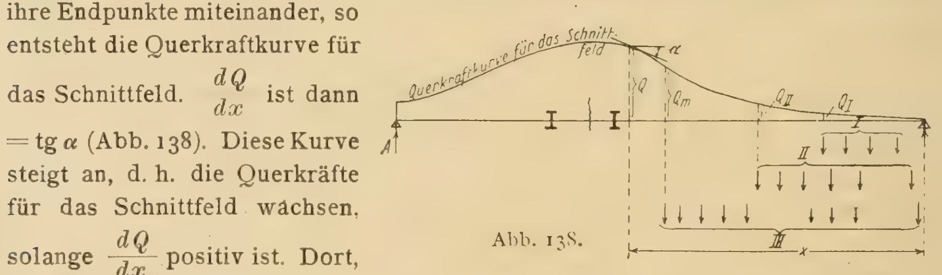


Abb. 138.

wo $\frac{dQ}{dx}$ negativ wird, beginnt der absteigende Zweig der Kurve, dort werden also die Querkräfte kleiner. Die Bedingung für das Wachsen der Querkräfte lautet daher: $\frac{dQ}{dx}$ muß positiv sein. Da nun

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\sum_1^n P}{l} - \frac{\sum_1^r P}{\lambda}$$

ist, so ist klar, daß $\frac{dQ}{dx}$ positiv wird, wenn

$$\frac{\sum_1^n P}{l} > \frac{\sum_1^r P}{\lambda} \quad \text{oder wenn} \quad \sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{\lambda}.$$

Demgemäß hat man zur Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung folgendermaßen zu verfahren:

Man stelle zunächst die erste Last P_1 über den Querträger, bilde $\sum\limits_1^n P$ und $P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$. Würde jetzt $\sum\limits_1^n P < P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$ sein, so würde beim Vorschieben des Lastenzuges um dx $\frac{dQ}{dx}$ negativ werden, die Querkraftkurve sich also im Abstande dx vom Querträger bereits nach abwärts neigen. In diesem Falle wäre daher die **Grundstellung** die ungünstigste Lastenstellung.

Wird dagegen $\sum\limits_1^n P > P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$, so befindet sich die Querkraftkurve im Abstande dx vom Querträger im aufsteigenden Ast, die Querkraft wächst also noch. Wir schieben daher den Lastenzug noch weiter vor, so daß P_1 im Felde und P_2 über dem Querträger steht. Ergibt sich dann auch für diese Lastenstellung

$$\sum_1^n P > (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda},$$

so muß der Lastenzug noch um eine weitere Last vorgeschoben werden, so daß P_1 und P_2 im Felde stehen, P_3 über dem Querträger. Nunmehr bilde man auch für diese Lastenstellung $\sum\limits_1^n P$ und $(P_1 + P_2 + P_3)\frac{l}{\lambda}$. Ergibt sich dann

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2 + P_3)\frac{l}{\lambda},$$

so würde das bedeuten, daß beim weiteren Vorschieben um dx über diese Stellung hinaus die Querkraft kleiner werden würde. Ein weiteres Vorschieben kommt daher nicht in Frage, so daß P_1 und P_2 im Felde, P_3 über dem Querträger stehen müßte.

Dieses Verfahren führt erheblich schneller zum Ziele als die probeweise Ermittlung des Größtwertes $\Sigma P \cdot \eta$ mit Hilfe der Einflußlinie.

Nach Ermittlung der ungünstigsten Lastenstellung kann dann leicht die Bestimmung der betreffenden Größtspannkraft durchgeführt werden, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a) Rechnerisches Verfahren.

α) Gesucht sei D_{max}, also die größte Zugkraft in der Diagonalen (Abb. 139).

Damit Zug in der Diagonalen entsteht, muß der Lastenzug von der rechten Seite her auffahren (vergl. Abb. 129c). Zwecks Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung stellen wir den Lastenzug zunächst in die Grundstellung, bilden $\sum\limits_1^n P$ und $P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$. Nach Einsetzen der Zahlenwerte möge sich ergeben haben $\sum\limits_1^n P > P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$.

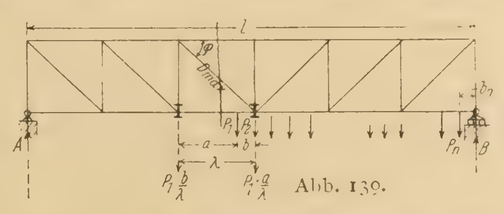


Abb. 139.

Nunmehr schieben wir den ganzen Lastenzug um einen Radstand nach links vor, so daß P_2 über dem Querträger steht, bilden für diese Lastenstellung ebenfalls $\sum\limits_1^n P$ und $(P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda}$. Ergibt sich dann

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2)\,\frac{l}{\lambda},$$

so darf der Zug über diese zweite Stellung nicht vorgeschoben werden. Die in Abb. 139 eingezeichnete Lastenstellung ist daher für $D_{\max}$ maßgebend.

Jetzt ersetzen wir P_1 durch die auf die Querträger des Schnittfeldes entfallenden Seitenkräfte $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$. Dann ist

$$D_{\max} = \frac{Q_{\max}}{\sin\varphi}; \qquad Q_{\max} = +A - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$$

(vom links abgetrennten Teil aus berechnet, weil an diesem die wenigsten Kräfte angreifen). A wird zweckmäßig mit Hilfe der Brückenbautabelle berechnet mittels der Formel

$$A = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}$$

(vergl. § 6, 2; α, Seite 71 und 72), so daß

$$D_{\max} = \frac{\dfrac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} - P_1 \cdot \dfrac{b}{\lambda}}{\sin\varphi},$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

Die Spannkraft in der Diagonalen infolge Eigengewichts wird ebenfalls am schnellsten mittels der Formel

$$D_g = \frac{Q_g}{\sin\varphi}$$

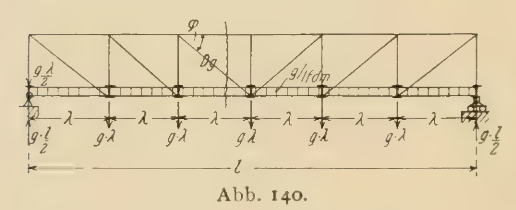


Abb. 140.

gefunden.

Die gleichmäßig verteilte Belastung g je Längeneinheit wird auf die Querträger verteilt (Abb. 140). Dann wird

$$Q_g = \frac{g \cdot l}{2} - \frac{g \cdot \lambda}{2} - g \cdot \lambda - g \cdot \lambda$$

(vom links abgetrennten Teil aus berechnet)

$$= g\left(\frac{l}{2} - \frac{\lambda}{2} - \lambda - \lambda\right) = \frac{g}{2}\,(l - 5\,\lambda),$$

so daß

$$D_g = \frac{g}{2\sin\varphi}\,(l - 5\,\lambda).$$

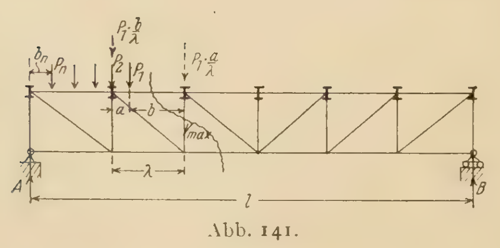


Abb. 141.

Die Gesamtspannkraft in der Diagonalen ist sodann $= D_{\max} + D_g$.

β) Gesucht sei $V_{\max}$, d. h. die größte Zugkraft in der Vertikalen (Abb. 141).

Damit Zug in der Vertikalen entsteht, muß der Lastenzug von der linken Seite her auffahren (vergl. Abb. 131 a). Wir nehmen an, die Zahlenrechnung habe ergeben

$$\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{l}{\lambda} \text{ (bei Grundstellung) und } \sum_1^n P < (P_1 + P_2)\,\frac{l}{\lambda}$$

(wenn P_1 im Felde und P_2 über dem Querträger steht). Dann ist die letztere Lastenstellung die ungünstigste.

Nunmehr benutzen wir die Formel $V_{max} = -Q_{max}$ und berechnen Q_{max} zweckmäßig am rechts abgetrennten Teil (weil dort die wenigsten Kräfte wirken). Auf die benachbarten Querträger entfallen von der im Felde wirkenden Kraft P_1 her die Drücke $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$, so daß

$$Q_{max} = -B + P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$$

(man beachte die Vorzeichen, siehe auch Seite 35, b). Hierin ist

$$B = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}.$$

Daher $$V_{max} = -Q_{max} = +\frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} - P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$$

(Zug, da das erste Glied größer ist als das zweite).

Ferner ist $V_g = -Q_g$, worin Q_g, vom links abgetrennten Teil aus berechnet,

$$= \frac{g \cdot l}{2} - g \cdot \frac{\lambda}{2} - g \cdot \lambda$$

$$= \frac{g}{2}(l - 3\lambda) \text{ (Abb. 142).}$$

Daher

$$V_g = -Q_g = -\frac{g}{2}(l - 3\lambda).$$

Abb. 142.

Die Gesamtkraft V ist dann

$$= V_{max} + V_g = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} - \frac{P_1 \cdot a}{\lambda} - \frac{g}{2}(l - 3\lambda).$$

b) Zeichnerisches Verfahren. (Abb. 143.)

α) Gesucht sei D_{max} infolge eines Lastenzuges und Eigengewichts g je Längeneinheit.

Abb. 143.

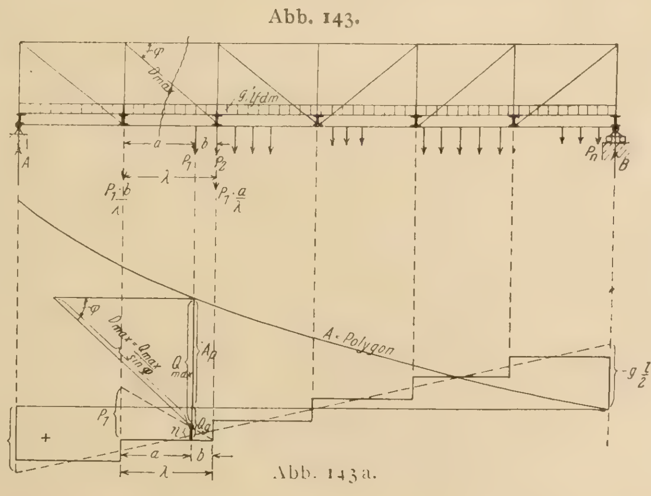


Abb. 143a.

Die Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung erfolgt wie bisher. Angenommen, die Zahlenrechnung ergibt

$$\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{l}{\lambda}$$

und

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2)\frac{l}{\lambda},$$

so muß P_1 im Felde und P_2 über dem Querträger stehen.

P_1 werde wieder ersetzt durch die auf die Querträger des Schnittfeldes entfallenden Seitendrücke $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$. Dann ist

$$D_{\max} = \frac{Q_{\max}}{\sin \varphi};$$

$$Q_{\max} = \underbrace{Q_P}_{\substack{\text{infolge}\\ \text{Verkehrs-}\\ \text{last}}} + \underbrace{Q_g}_{\substack{\text{infolge}\\ \text{Eigen-}\\ \text{gewicht}}} = \underbrace{A_P - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}}_{Q_P} + Q_g = A_P + Q_g - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}.$$

Den Wert A_P entnehmen wir senkrecht unter der Last P_1 aus dem A-Polygon (vergl. § 6, 2, β, Seite 73), Q_g aus der Querkraftfläche infolge Eigengewichts (vergl. § 6, 1, β, Abb. 96, Seite 69). Den Wert $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ finden wir zeichnerisch, indem wir senkrecht unter $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ die Kraft P_1 auftragen (in dem Maßstabe, in dem das A-Polygon und die Querkraftfläche gezeichnet wurde) und die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks zeichnen, dessen Katheten P_1 und λ sind. Dann schneidet die Hypotenuse von der Verlängerung der im Felde stehenden Last P_1 die Strecke $\eta = P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ ab, denn es besteht die Proportion $\frac{\eta}{P_1} = \frac{b}{\lambda}$, woraus $\eta = P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ (Abb. 143a).

Nunmehr kann man die Strecke

$$Q_{\max} = A_P + Q_g - P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$$

aus der Zeichnung abgreifen. Da $D_{\max} = \frac{Q_{\max}}{\sin \varphi}$ ist, so bilde man den Wert $\frac{Q_{\max}}{\sin \varphi}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete $= Q_{\max}$ und dessen andere Kathete mit der Hypotenuse den Winkel φ einschließt. Man ziehe also durch den Anfangspunkt der Strecke $Q_{\max}$ eine Parallele zu D, durch den Endpunkt eine Parallele zu dem Obergurtstabe. Dann schließen die beiden Parallelen den Winkel φ miteinander ein. In dem so gebildeten rechtwinkligen Dreieck ist nunmehr $\sin \varphi = \frac{Q_{\max}}{D}$, mithin $D = \frac{Q_{\max}}{\sin \varphi}$.

β) Gesucht sei $V_{\max}$ infolge eines Lastenzuges und Eigengewichts g/lfd. m (Abb. 144). Angenommen, es habe sich ergeben

$$\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{l}{\lambda},$$

ferner

$$\sum_1^n P > (P_1 + P_2) \frac{l}{\lambda},$$

aber

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2 + P_3) \frac{l}{\lambda}.$$

Dann müssen P_1 und P_2 im Schnittfelde stehen, P_3 über dem Querträger. Die Mittelkraft von P_1 und P_2 sei wieder ersetzt durch die beiden Seitenkräfte $(P_1 + P_2) \frac{b}{\lambda}$ und $(P_1 + P_2) \frac{a}{\lambda}$.

Wir benutzen die Formel $V_{max} = -Q = -(Q_P + Q_g)$. Q_P wird jetzt zweckmäßig vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet, da dort die wenigsten Kräfte stehen.

Es wird
$$Q_P = -B_P + (P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda},$$

so daß
$$V_{max} = +B_P - Q_g - (P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}.$$

B_P wird aus dem B-Polygon senkrecht unter der ersten Last P_1 abgegriffen (Abb. 144a). Der Wert $(P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}$ ist wieder wie im vorigen Beispiel durch Konstruktion gefunden und durch die Strecke η dargestellt. Trägt man nämlich $P_1 + P_2$ unter der Kraft $(P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}$ als Ordinate auf und zieht die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks von den Katheten $P_1 + P_2$ und λ, so schneidet diese von der Senkrechten durch P_1 die Strecke η ab und es besteht die Proportion $\frac{\eta}{P_1 + P_2} = \frac{a}{\lambda}$, woraus $\eta = (P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}$. Die Querkraftfläche infolge Eigengewichts ist hier so gelegt, daß Q_g von B_P abgezogen werden kann, wie es die für V_{max} aufgestellte Formel verlangt.

Abb. 144.

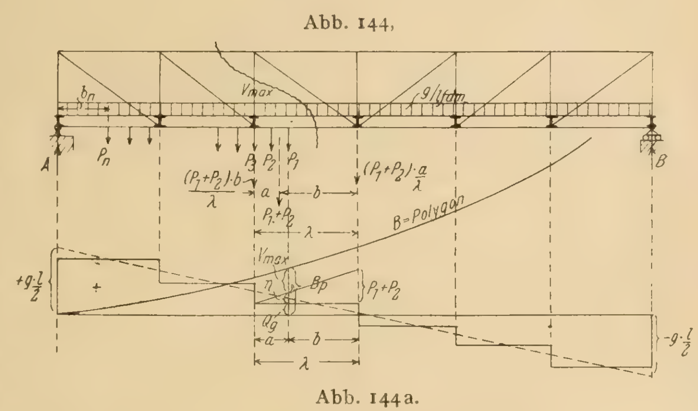


Abb. 144a.

Nunmehr kann V_{max} aus der Zeichnung (Abb. 144a) abgegriffen werden.

D. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge gleichmäßig verteilter Verkehrsbelastung p je Längeneinheit (Menschengedränge).

1. Rechnerisches Verfahren.

Damit D_{max}, also der größte Zug in der Diagonalen, entsteht, muß die Verkehrslast rechts vom Schnittfeld aufgestellt werden (Abb. 145). Wollte man nun genau verfahren, so müßte die ganze positive Beitragsstrecke der Einflußlinie mit der Verkehrslast belastet werden (Abb. 145a). Es wäre dann $D_{max} = +p \cdot F_+$, worin F_+ der Flächeninhalt des positiven Teils der Einflußfläche ist (vergl. § 6, 2, B, Seite 84). Man begeht aber nur einen unwesentlichen Fehler, wenn man Grundstellung

Abb. 145.

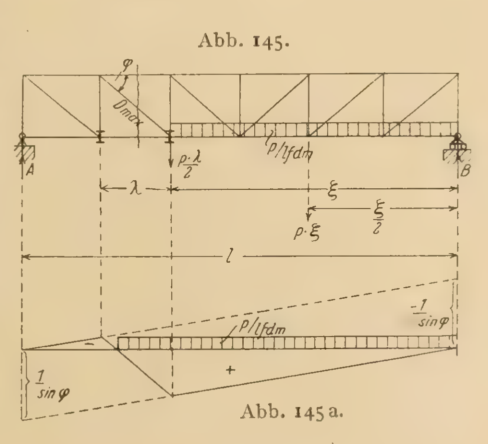


Abb. 145a.

annimmt und an der Spitze der Belastung eine Einzellast $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ anbringt. Das Ergebnis weicht dann nur ganz unwesentlich von dem genauen ab und hat dafür den Vorzug größerer Einfachheit. Für diese Lastenstellung benutzen wir die für D aufgestellte Formel $D_{max} = \frac{Q_{max}}{\sin \varphi}$, worin

$$Q_{max} = A = \frac{p \cdot \xi \cdot \frac{\xi}{2}}{l} + \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{\xi}{l} = \frac{p \cdot \xi}{2\,l}(\xi + \lambda).$$

Folglich
$$D_{max} = \frac{p \cdot \xi}{2 \cdot l \cdot \sin \varphi}(\xi + \lambda).$$

D infolge Eigengewichts wird wieder wie unter C, a, Seite 100 ermittelt.

2. Zeichnerisches Verfahren (Abb. 146).

$$D = \frac{Q_{max}}{\sin \varphi} = \frac{A}{\sin \varphi}; \; A = A \text{ infolge } p + A \text{ infolge } \frac{p \cdot \lambda}{2}.$$

A infolge p entnehmen wir senkrecht unter dem Kopf der Belastung der A-Parabel (vergl. § 6, 2, 2, Seite 80).

$$A \text{ infolge } \frac{p \cdot \lambda}{2} \text{ ist } = \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{\xi}{l}.$$

Trägt man unter dem Auflager A den Wert $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ als Ordinate auf (in dem Maßstabe, in dem die A-Parabel gezeichnet ist) und zeichnet das rechtwinklige Dreieck mit den beiden Katheten $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ und l, so gilt die Proportion

$$\frac{\eta}{\frac{p \cdot \lambda}{2}} = \frac{\xi}{l};$$

daher

$$\eta = \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{\xi}{l} = \text{A infolge } \frac{p \cdot \lambda}{2}.$$

Abb. 146.

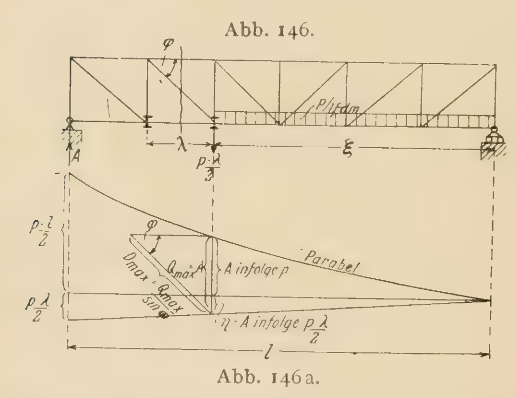


Abb. 146a.

Damit ist $A = Q_{max}$ bestimmt als Summe von A infolge p und A infolge $\frac{p \cdot \lambda}{2}$. Die Strecke $D = \frac{Q_{max}}{\sin \varphi}$ erhält man dann wieder als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathete Q_{max} und dem Dreieckswinkel φ (Abb. 146a)

Will man gleichzeitig das Eigengewicht berücksichtigen, so muß man zu der Strecke $Q_{max} = A$ noch Q_g hinzufügen.

Ebenso ist bei der Berechnung der Spannkräfte in den Vertikalen zu verfahren unter Benutzung der Formel $V = -Q$.

Vielfach bereitet es dem Anfänger Schwierigkeiten, schnell zu entscheiden, an welcher Seite des Schnittfeldes der Lastenzug aufgestellt werden muß, damit

in dem fraglichen Stab ein Zug bezw. Druck entsteht. Es sei daher nachfolgend ein Verfahren angegeben, welches schnell zum Ziele führt. Will man z. B. wissen, welchen Einfluß eine rechts vom Schnittfeld aufgestellte Last auf die Diagonale D hat (Abb. 147), so setze man an dem unbelasteten abgetrennten Teil die Gleich-

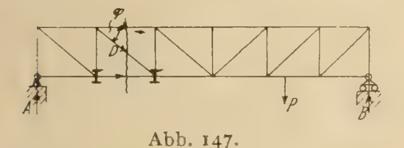


Abb. 147.

Abb. 148.

gewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an, nachdem vorher die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte (vorläufig als Zugkräfte eingeführt) ersetzt sind. Man erhält dann $A - D \sin \varphi = 0$; daher $D = + \frac{A}{\sin \varphi}$ (Zug). Daraus folgt, daß alle rechts vom Schnittfeld stehenden Lasten Zug, alle links vom Schnittfeld stehenden Lasten daher Druck in der Diagonalen hervorbringen.

Ebenso verfährt man bei einer Vertikalen (Abb. 148). Für eine rechts vom Schnittfeld stehende Last P muß am unbelasteten, also links abgetrennten Teil die Summe aller senkrechten Kräfte $= 0$ sein, so daß $V + A = 0$ und $V = - A$ (Druck).

Alle rechts vom Schnittfeld stehenden Lasten bringen daher Druck, alle links vom Schnittfeld stehenden Zug in der Vertikalen hervor.

Endlich sei noch die Spannkraft V_t infolge eines Lastenzuges in der mittelsten Vertikalen bei oben liegender Fahrbahn gesucht (Abb. 149). Die Feldweiten mögen derartig bemessen sein, daß über den mittelsten beiden Feldern gerade eine Lokomotive stehen kann.

Abb. 149.

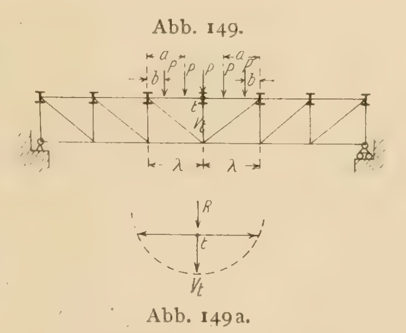


Abb. 149a.

Nach Seite 94 ist V_t nur von der Knotenlast abhängig. Auf den Knoten t entfällt nun von der Lokomotivbelastung

$$R = P + 2 P \cdot \frac{a}{\lambda} + 2 P \cdot \frac{b}{\lambda}.$$

Trennen wir jetzt den Knoten t heraus (Abb. 149a), ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte und benutzen die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$, so muß sein

$$V_t + R = 0; \qquad V_t = - R = - \left(P + 2 P \cdot \frac{a}{\lambda} + 2 P \cdot \frac{b}{\lambda} \right) \text{(Druck).}$$

2. Der Parallelträger mit K-förmig angeordneten Füllungsstäben.

Er findet besonders häufig bei Windverbänden Anwendung, seltener bei Hauptträgern. Es ist zu beachten, daß die Schnittpunkte der Diagonalen mit der Vertikalen als Knotenpunkte aufzufassen sind.

A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte.

1. Berechnung der Spannkräfte in den Gurtstäben (Abb. 150).

Zur Berechnung von O_m führen wir den Schnitt I—I und untersuchen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils, nachdem vorher die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte ersetzt sind. Die Gleichgewichtsbedingung: „Summe der Momente in bezug auf den unteren Knotenpunkt $m-1 = 0$" liefert sodann die Gleichung

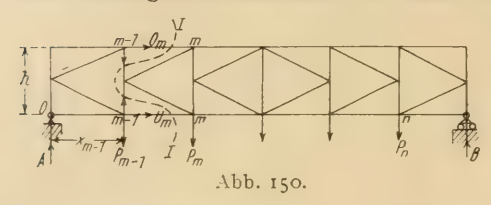


Abb. 150.

$$O_m \cdot h + A \cdot x_{m-1} = 0; \quad O_m = -\frac{A \cdot x_{m-1}}{h} = -\frac{M_{m-1}}{h} \text{ (Druck)}.$$

Mit Hilfe der Bedingung $\Sigma H = 0$ erhält man

$$U_m + O_m = 0; \quad U_m = -O_m = +\frac{M_{m-1}}{h} \text{ (Zug)}.$$

2. Berechnung der Spannkräfte in den Füllungsstäben (Abb. 151).

Wir schneiden den Knoten k heraus und benutzen am abgetrennten Knoten die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma H = 0$:

Abb. 151.

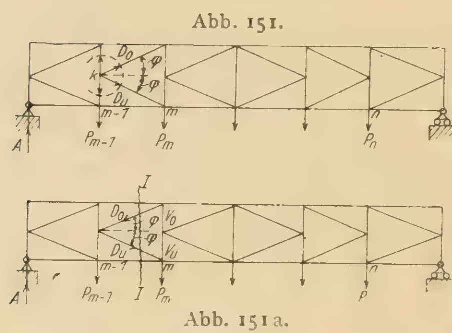


Abb. 151a.

$$D_o \cdot \cos\varphi + D_u \cdot \cos\varphi = 0.$$

$$D_u = -D_o.$$

Die Gleichung besagt, daß eine von den beiden Diagonalspannkräften eine Zugkraft, die andere eine Druckkraft ist und daß beide gleich groß sind.

Um zu entscheiden, welche Diagonale gezogen und welche gedrückt wird, führen wir den Schnitt I—I (Abb. 151a) und untersuchen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils. Dabei sei D_u vorläufig als Zugkraft eingeführt. Dann muß D_o als Druckkraft angebracht werden. Nunmehr benutzen wir die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ und erhalten

$$D_o \cdot \sin\varphi + D_u \cdot \sin\varphi - A + P_{m-1} = 0.$$

Da $D_u = D_o$ (das negative Vorzeichen von D_o ist bereits durch den Druckpfeil in der Gleichgewichtsbedingung berücksichtigt), so ist

Abb. 152.

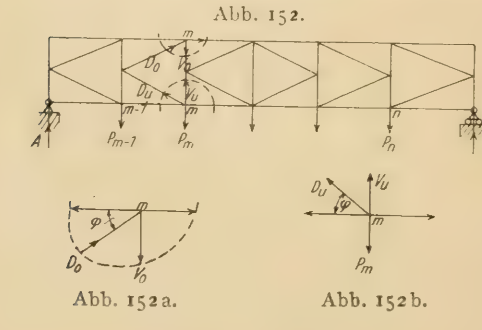


Abb. 152a. Abb. 152b.

$$2 D_u \cdot \sin\varphi = +(A - P_{m-1}) = -Q_m;$$

$$D_u = +\frac{Q_m}{2 \sin\varphi} \text{ (Zug)}.$$

Alsdann ist

$$D_o = -\frac{Q_m}{2 \sin\varphi} \text{ (Druck)}.$$

Das positive Zeichen für D_u besagt, daß die vorläufige Annahme einer Zugkraft für D_u und einer Druckkraft für D_o richtig war.

Zur Berechnung von V_o schneiden wir den oberen Knoten m heraus und untersuchen den Gleichgewichtszustand des abgetrennten Knotens (Abb. 152 u. 152a). D_o ist dabei mit seinem richtigen Pfeil (Druckpfeil) eingeführt, die gesuchte Kraft V_o vorläufig als Zugkraft angenommen.

Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ liefert die Gleichung

$$V_o - D_o \cdot \sin \varphi = 0; \quad V_o = + D_o \cdot \sin \varphi.$$

Mit $D_o = \frac{Q_m}{2 \sin \varphi}$ (absolut genommen, da das negative Vorzeichen von D_o bereits durch den Druckpfeil berücksichtigt ist) wird

$$V_o = + \frac{Q_m}{2 \sin \varphi} \cdot \sin \varphi = + \frac{Q_m}{2}.$$

Zur Berechnung von V_u schneiden wir den unteren Knoten m heraus und setzen für den im Gleichgewicht befindlichen Knotenpunkt $\Sigma V = 0$ (Abb. 152b):

$$V_u + D_u \cdot \sin \varphi - P_m = 0; \quad V_u = P_m - D_u \cdot \sin \varphi = P_m - \frac{Q_m}{2}.$$

Bei obenliegender Fahrbahn bleiben die Formeln für die Spannkräfte in den Gurtstäben und Diagonalen dieselben, während

$$V_o = \frac{Q_m}{2} - P_m \text{ und } V_u = - \frac{Q_m}{2} \text{ wird.}$$

Ausnahmen: O_1, U_1 und V_2 werden $= 0$ (Abb. 153). Setzt man nämlich am abgetrennten Knoten o $\Sigma H = 0$, so ergibt sich $O_1 = 0$. Setzt man ferner $\Sigma V = 0$, so wird $V_2 = 0$.

Mit Hilfe derselben, für den Knoten u angesetzten Gleichgewichtsbedingungen erhält man $U_1 = 0$ und $V_1 = -A$.

Auch für V_t besteht eine Ausnahme. Schneidet man den oberen Knoten t heraus, führt V_t vorläufig als Zugkraft, die Kräfte D_l und D_r mit ihrem richtigen Pfeil (Druckpfeil) ein und setzt $\Sigma V = 0$ (Abb. 153a), so erhält man

$$V_t - D_l \cdot \sin \varphi_l - D_r \cdot \sin \varphi_r = 0,$$

so daß

$$V_t = D_l \cdot \sin \varphi_l + D_r \cdot \sin \varphi_r.$$

Abb. 153.

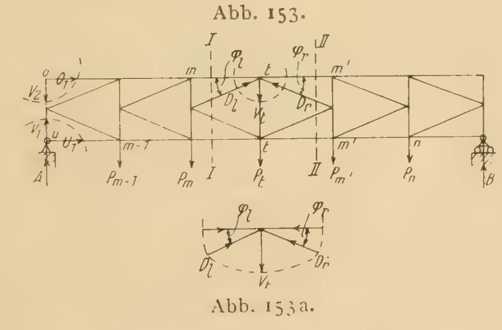


Abb. 153a.

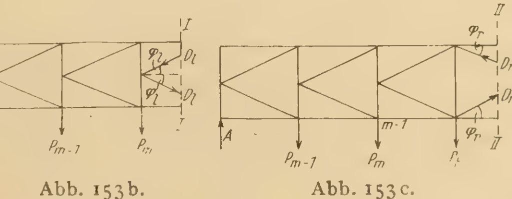


Abb. 153b. Abb. 153c.

Führt man dann den Schnitt I—I (Abb. 153 u. 153b), führt die vom Schnitt getroffenen gleich großen Diagonalspannkräfte mit ihrem richtigen Pfeil ein (die obere mit dem Druck-, die untere mit dem Zugpfeil) und setzt am links abgetrennten Teil $\Sigma V = 0$, so muß sein

$$2 D_l \cdot \sin \varphi_l + P_{m-1} + P_m - A = 0,$$

woraus

$$D_l \cdot \sin \varphi_l = \frac{1}{2} (A - P_{m-1} - P_m).$$

Führt man weiter den Schnitt II—II (Abb. 153 u. 153c), verfährt wie vor und setzt, ebenfalls am links abgetrennten Teil, $\Sigma V = 0$, so erhält man

$$2\,D_r \cdot \sin\varphi_r + A - P_{m-1} - P_m - P_t = 0,$$

woraus
$$D_r \cdot \sin\varphi_r = \frac{1}{2}\,(P_{m-1} + P_m + P_t - A).$$

Setzt man diese Werte in die für V_t aufgestellte Gleichung ein, so folgt

$$V_t = D_l \cdot \sin\varphi_l + D_r \cdot \sin\varphi_r = \frac{1}{2}\,(A - P_{m-1} - P_m)$$
$$+ \frac{1}{2}\,(P_{m-1} + P_m + P_t - A) = \frac{1}{2}\,P_t.$$

V_t ist daher nur von der halben Knotenlast abhängig.

B. Bestimmung der Einflußlinien für die Stabspannkräfte.

Mit Hilfe der hergeleiteten Formeln könnnen die Einflußlinien für die Stabspannkräfte leicht bestimmt werden.

So ist z. B. $V_1 = -A$, die V_1-Linie daher gleich der mit -1 multiplizierten A-Linie (Abb. 154a). Im übrigen vergl. Abb. 132a und die zugehörige Beschreibung auf Seite 95.

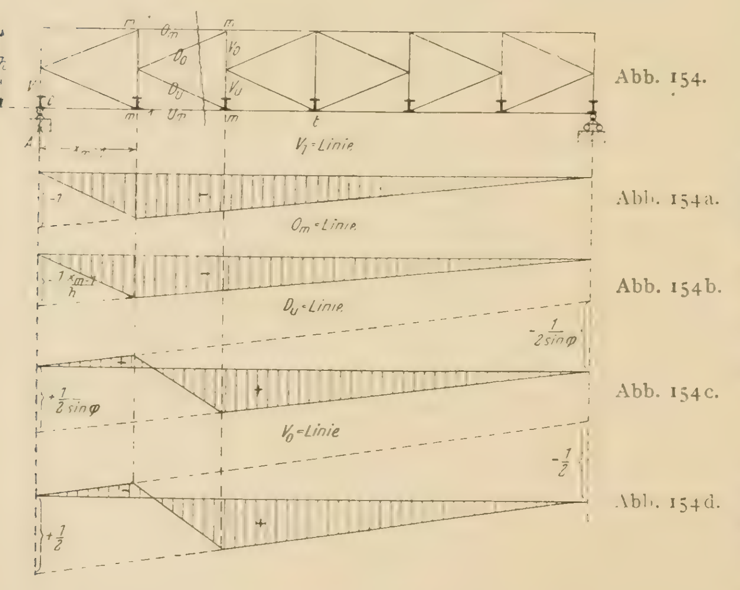


Abb. 154.
Abb. 154a.
Abb. 154b.
Abb. 154c.
Abb. 154d.

Da
$$U_m = +\frac{M_{m-1}}{h}$$
und
$$O_m = -\frac{M_{m-1}}{h},$$
so gilt für beide Spannkräfte die durch h dividierte M_{m-1}-Linie als Einflußlinie. Nur hat die U_m-Linie das positive, die O_m-Linie das negative Vorzeichen (Abb. 154b).

Die D_u-Linie bezw. D_o-Linie erhält man mittels der Formeln

$$D_u = +\frac{Q_m}{2\sin\varphi} \quad \text{und} \quad D_o = -\frac{Q_m}{2\sin\varphi}.$$

Beide Einflußlinien stimmen daher mit der $\frac{Q_m}{2\sin\varphi}$-Linie überein, haben jedoch entgegengesetztes Vorzeichen (Abb. 154c).

Da ferner $V_o = +\frac{Q_m}{2}$, so ist die V_o-Linie gleich der $\frac{Q_m}{2}$-Linie (Abb. 154d)

Zur Berechnung der V_u-Linie benutzen wir die Formel $V_u = P_m - \frac{Q_m}{2}$. Steht also die wandernde Last $P_m = 1\ t$ in m (Abb. 155), so ist $V_u = 1 - \frac{Q_m}{2}$. Senkrecht unter m muß daher die Ordinate der Einflußlinie $= 1 - \frac{Q_m}{2}$ sein. Steht dagegen die Last $1\ t$ links von $m-1$ bezw. rechts von t, so erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ für den abgetrennten Knoten m (Abb. 155b) die Gleichung

$$V_u + D_u \cdot \sin\varphi = 0; \quad V_u = -D_u \cdot \sin\varphi = -\frac{Q_m}{2\sin\varphi} \cdot \sin\varphi = -\frac{Q_m}{2}.$$

Links von $m-1$ bezw. rechts von t ist daher die $\left(-\frac{1}{2} \cdot Q_m\right)$-Linie die Einflußlinie für V_u. Beachtet man dann noch, daß zwischen den Querträgern $m-1$ und m bezw. t und m die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß, so entsteht die in Abb. 155a dargestellte Form der V_u-Linie.

Abb. 155.

Abb. 155a.

Abb. 155b.

Abb. 155c.

Die V_t-Linie erhalten wir mittels der Gleichung $V_t = +\frac{P_t}{2}$. Steht daher die wandernde Last $1\ t$ in t, so ist $P_t = 1\ t$ zu setzen, so daß $V_t = +\frac{1}{2}$. Senkrecht unter t muß mithin die Ordinate der Einflußlinie $= +\frac{1}{2}$ sein. Lasten links von m bezw. rechts von m' haben keinen Einfluß mehr auf V_t, da V_t nur von der Knotenlast abhängig ist. Zwischen den Querträgern m und t bezw. m' und t muß die Einflußlinie geradlinig verlaufen. So entsteht die in Abb. 155c dargestellte Form der V_t-Linie.

3. Der Fachwerkbalken mit gebrochener Gurtung.

A. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte.

1. Berechnung der Spannkräfte in den Gurtstäben (Abb. 156).

Es bezeichne r_m das vom Punkt m auf den gegenüberliegenden Gurtstab O_m gefällte Lot, h_m den senkrechten Abstand des Punktes m von O_m, β_m den Winkel,

den O_m mit der Wagerechten einschließt. Dann ist auch der Winkel, den r_m und h_m miteinander einschließen, $= \beta_m$, da die Schenkel beider Winkel zueinander lotrecht stehen. In dem in Abb. 156 durch Schraffur hervorgehobenen rechtwinkligen Dreieck ist sodann $r_m = h_m \cdot \cos \beta_m$.

Zur Berechnung von O_m führen wir den Ritterschen Schnitt, der außer O_m nur noch zwei andere unbekannte Stabkräfte schneidet, ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte (die vorläufig als Zugkräfte eingeführt werden), untersuchen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils und benutzen die Gleichgewichtsbedingung: „Summe der Momente in bezug auf den Punkt $m = 0$“:

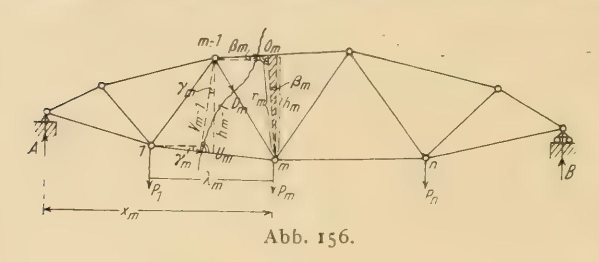


Abb. 156.

$$O_m \cdot r_m + A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m = 0; \quad \boldsymbol{O_m} = -\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m}{r_m} = -\frac{\boldsymbol{M_m}}{\boldsymbol{r_m}} \text{ (Druck).}$$

Mit $r_m = h_m \cdot \cos \beta_m$ können wir auch schreiben

$$\boldsymbol{O_m \cdot \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m}}.$$

Durch Anwendung der Momentengleichung für den Punkt $m - 1$ erhält man dann sinngemäß

$$\boldsymbol{U_m = +\frac{M_{m-1}}{r_{m-1}}} \text{ bezw. } \boldsymbol{U_m \cdot \cos \gamma_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}} \text{ (Zug).}$$

2. Berechnung der Spannkräfte in den Füllungsstäben (Abb. 157)

Zur Berechnung von D_m führen wir den Schnitt I und setzen am links abgetrennten Teil $\Sigma H = 0$:

$$D_m \cdot \cos \varphi_m + O_m \cdot \cos \beta_m + U_m \cdot \cos \gamma_m = 0.$$

Mit $\qquad O_m \cdot \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m}$ und $U_m \cdot \cos \gamma_m = +\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$

wird
$$\boldsymbol{D_m \cdot \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}}.$$

Sinngemäß erhält man mittels des Schnittes II

$$\boldsymbol{D_{m+1} \cdot \cos \varphi_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m+1}}}.$$

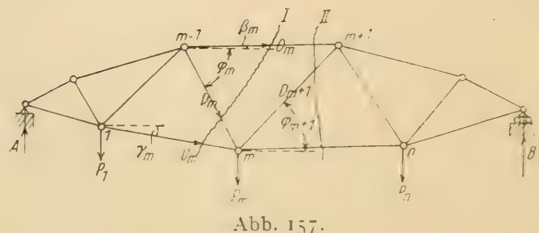


Abb. 157.

Das Moment am Fuß der Diagonale erscheint also jedesmal in dem positiven, das Moment am Kopf in dem negativen Gliede der Formel. Die für die Gurt- und Diagonalspannkräfte hergeleiteten Formeln gelten sowohl für unten wie für oben

liegende Fahrbahn, da für beide Fälle die Spannkräfte von Momenten für dieselben Knotenpunkte abhängen, wie leicht durch sinngemäße Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen nachgeprüft werden kann.

Bei der Berechnung der Spannkräfte in den Vertikalen müssen jedoch für unten bezw. oben liegende Fahrbahn besondere Formeln hergeleitet werden, weil dann obige Voraussetzung nicht mehr zutrifft.

Es sei zunächst unten liegende Fahrbahn angenommen. Wir schneiden dann den Knotenpunkt m der unbelasteten Gurtung heraus (damit P_m nicht in der Gleichung erscheint), ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte, die vorläufig als Zugkräfte eingeführt werden (Abb. 158) und benutzen zur Berechnung von V_m die Gleichgewichtsbedingung: „Summe der Momente in bezug auf den Punkt $m + 1 = 0$." Die Kräfte O_m und O_{m+1} zerlegen wir vorher noch je in eine wagerechte Seitenkraft ($O_m \cdot \cos \beta_m$ und $O_{m+1} \cdot \cos \beta_{m+1}$) und in eine senkrechte. Letztere sowie D_{m+1} fallen dann aus der Gleichgewichtsbedingung heraus, da sie den Momentendrehpunkt schneiden, also den Hebelarm o haben Die Gleichung lautet sodann

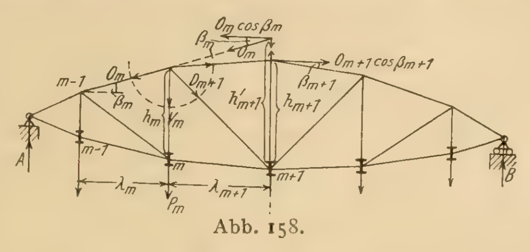


Abb. 158.

$$V_m \cdot \lambda_{m+1} + O_m \cdot \cos \beta_m \cdot h'_{m+1} - O_{m+1} \cdot \cos \beta_{m+1} \cdot h_{m+1} = 0.$$

Mit $$O_m \cdot \cos \beta_m = -\frac{M_m}{h_m} \text{ und } O_{m+1} \cdot \cos \beta_{m+1} = -\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$$

erhält man $$V_m = \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}.$$

Bei oben liegender Fahrbahn (Abb. 159) schneiden wir den unteren, der unbelasteten Gurtung angehörenden Knotenpunkt m heraus und benutzen zur Berechnung von V_m eine Momentengleichung in bezug auf den oberen Punkt $m - 1$, nachdem vorher U_m und U_{m+1} senkrecht unter $m - 1$ je in eine wagerechte Seitenkraft ($U_m \cdot \cos \gamma_m$ und $U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1}$) und in eine senkrechte zerlegt sind. Die Momentengleichung lautet sodann

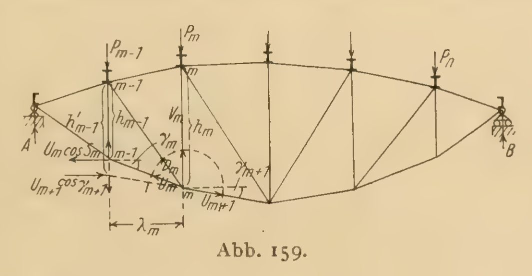


Abb. 159.

$$V_m \cdot \lambda_m + U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1} \cdot h'_{m-1} - U_m \cdot \cos \gamma_m \cdot h_{m-1} = 0.$$

Mit $$U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1} = \frac{M_m}{h_m} \text{ und } U_m \cdot \cos \gamma_m = \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

wird sodann

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Ausnahmen bestehen für V_1 (bei oben liegender Fahrbahn) und für V_t (sowohl bei oben als auch bei unten liegender Fahrbahn) (Abb. 160).

Zur Berechnung von V_1 trennen wir den Knoten 1 heraus und benutzen an dem abgetrennten Knoten die Gleichgewichtsbedingung „Summe der Momente in bezug auf den Punkt o gleich Null“, nachdem vorher U_2 senkrecht unter o in die Seitenkräfte $U_2 \cdot \cos\gamma_2$ und $U_2 \cdot \sin\gamma_2$ zerlegt wurde. Die Gleichung lautet sodann

$$V_1 \cdot \lambda_1 + U_2 \cdot \cos\gamma_2 \cdot y_0 = 0.$$

Mit $U_2 \cdot \cos\gamma_2 = \dfrac{M_1}{h_1}$ wird sodann

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{M_1}{h_1} \cdot \frac{y_0}{\lambda_1}} \text{ (Druck).}$$

Abb. 160.

Um V_t zu finden, schneidet man zweckmäßig den oberen Knoten t heraus, ersetzt die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte und benutzt die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$, wodurch man erhält

$$V_t + O_l \cdot \sin\beta_l + O_r \cdot \sin\beta_r + P_t = 0.$$

Da
$$O_l = -\frac{M_t}{h_t \cdot \cos\beta_l} \text{ und } O_r = -\frac{M_t}{h_t \cdot \cos\beta_r},$$

so wird
$$\boldsymbol{V_t = \frac{M_t}{h_t}(\mathrm{tg}\,\beta_l + \mathrm{tg}\,\beta_r) - P_t.}$$

Bei unten liegender Fahrbahn gilt für V_1 die allgemeine für V_m abgeleitete Formel, während $V_t = \frac{M_t}{h_t}(\mathrm{tg}\,\beta_l + \mathrm{tg}\,\beta_r)$; denn dann wirkt P_t am unteren Knotenpunkt t, kommt also in die wieder für den oberen Knoten aufzustellende Gleichgewichtsbedingung nicht mit hinein, die somit lautet

$$V_t + O_l \cdot \sin\beta_l + O_r \cdot \sin\beta_r = 0,$$

woraus
$$V_t = \frac{M_t}{h_t}(\mathrm{tg}\,\beta_l + \mathrm{tg}\,\beta_r).$$

B. Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte mit Hilfe von Einflußlinien.

Die Einflußlinien für die Gurtspannkräfte können schnell mit Hilfe der allgemeinen Formeln

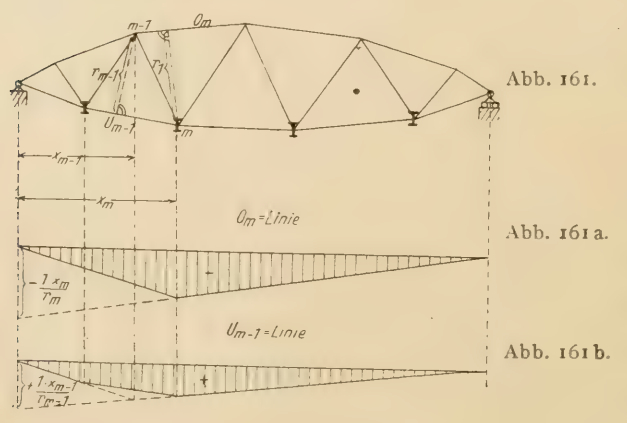


Abb. 161.

Abb. 161 a.

Abb. 161 b.

$$O_m = -\frac{M_m}{r_m}$$

bezw.

$$U_{m-1} = +\frac{M_{m-1}}{r_{m-1}}$$

hergeleitet werden. Die O_m-Linie ist demgemäß die mit $-\frac{1}{r_m}$ multiplizierte M_m-Linie, die U_{m-1}-Linie die mit $+\frac{1}{r_{m-1}}$ multiplizierte M_{m-1}-Linie (Ab-

bild. 161a u. 161b). Bei letzterer beachte man, daß der Punkt $m-1$ zwischen zwei Querträgern liegt, daß also zwischen den beiden Querträgern die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß.

Da die Einflußlinien nur ein Vorzeichen haben, so ist für die Gurtspannkräfte totale Belastung des Balkens die ungünstigste.

Zur Berechnung der Einflußlinien für die Füllungsstäbe sind die hergeleiteten allgemeinen Formeln unbequem, da sie sich aus zwei Gliedern zusammensetzen. Man kann diese Einflußlinien einfacher dadurch herleiten, daß man den Einfluß der wandernden Last 1 t auf die betreffende Stabkraft für verschiedene Laststellungen untersucht, wie nachstehend gezeigt werden soll.

Gesucht sei die Einflußlinie für die von dem Ritterschen Schnitt getroffene Diagonale D, die von rechts nach links ansteigt (Abb. 162). Wir nehmen

Abb. 162.

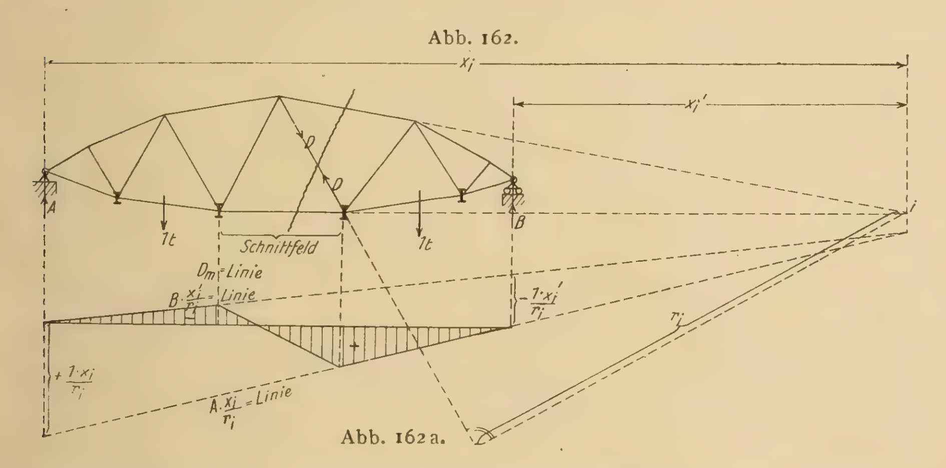


Abb. 162a.

zunächst an, die Last 1 t stehe rechts vom Schnittfeld. Für diese Laststellung berechnen wir die Spannkraft D am bequemsten vom links abgetrennten Teil aus (da dort die wenigsten äußeren Kräfte wirken), und zwar mittels einer Momentengleichung für den Punkt i (den Schnittpunkt der außer D vom Ritterschen Schnitt getroffenen Stäbe). D erhält dabei vorläufig den Zugpfeil. Die Momentengleichung lautet sodann

$$D \cdot r_i - A \cdot x_i = 0; \quad D = + A \cdot \frac{x_i}{r_i}.$$

D. h. für alle rechts vom Schnittfeld wirkenden Lasten ist die mit $\frac{x_i}{r_i}$ multiplizierte A-Linie die Einflußlinie, also eine Gerade, deren Verlängerung von der Senkrechten durch das Auflager A die Strecke $+1 \cdot \frac{x_i}{r_i}$ abschneidet.

Nunmehr nehmen wir an, die Last 1 t wirke links vom Schnittfeld. Bei dieser Laststellung wird D am bequemsten vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet, wiederum mittels einer Momentengleichung für den Punkt i, nachdem D am rechts abgetrennten Teil vorläufig mit dem Zugpfeil versehen ist. Die Gleichung lautet alsdann

$$D \cdot r_i + B \cdot x_i' = 0; \quad D = -\frac{B \cdot x_i'}{r_i}.$$

D. h. für alle links vom Schnittfeld stehenden Lasten ist die mit $-\frac{x_i'}{r_i}$ multiplizierte B-Linie die Einflußlinie, also eine Gerade, deren Verlängerung von der Senkrechten durch das Auflager B die Strecke $-\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ abschneidet. Hatten wir vorher den positiven Wert $\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ nach unten abgetragen, so müssen wir jetzt die negative Strecke $-\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ nach der entgegengesetzten Seite, also nach oben, abtragen. Endlich sind noch die zwischen den beiden Querträgern des Schnittfeldes liegenden Punkte der Einflußlinie geradlinig miteinander zu verbinden. Die so entstandene Einflußlinie ist in Abb. 162a dargestellt. Dabei ist noch zu

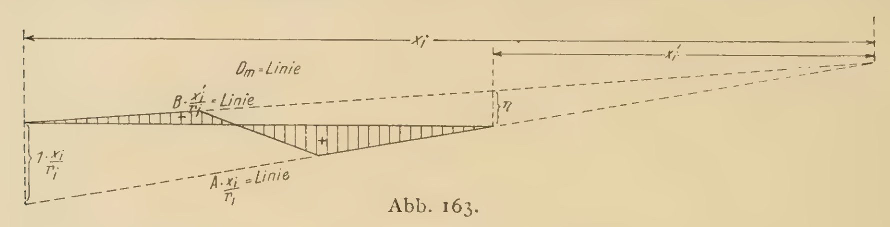


Abb. 163.

beachten, daß sich die $A \cdot \frac{x_i}{r_i}$-Linie und die $-\frac{B \cdot x_i'}{r_i}$-Linie senkrecht unter i schneiden müssen.

Bezeichnen wir nämlich vorläufig die Ordinate $-\frac{x_i'}{r_i}$ mit η (Abb. 163), so gilt, wenn die beiden Geraden sich tatsächlich unter i schneiden, die Proportion

$$\frac{\eta}{\frac{1 \cdot x_i}{r_i}} = \frac{x_i'}{x_i}; \text{ daher } \eta = \frac{x_i'}{x_i} \cdot \frac{x_i}{r_i} = \frac{x_i'}{r_i},$$

wie es nach der vorhin entwickelten Ableitung der D-Linie ja auch sein muß. Man braucht daher nur die Ordinate $\frac{x_i}{r_i}$ aufzutragen, d. h. die $\frac{A \cdot x_i}{r_i}$-Linie zu zeichnen und diese mit der Senkrechten durch i zum Schnitt zu bringen, wodurch auch die $\frac{B \cdot x_i'}{r_i}$-Linie bestimmt ist.

Abb. 164.

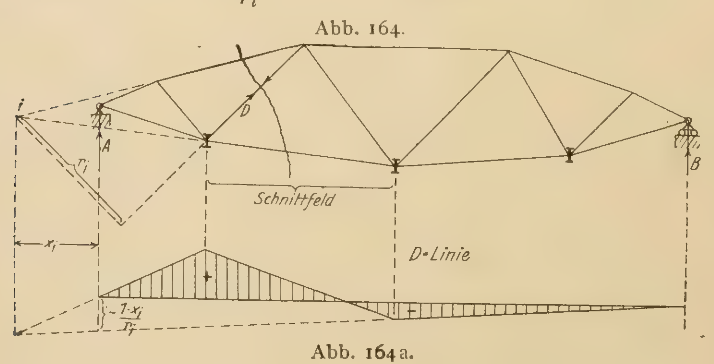


Abb. 164a.

Handelt es sich um eine von links nach rechts ansteigende Diagonale, so sind die Vorzeichen der Einflußlinie umzukehren (Abb. 164 u. 164a).

Liegt der Punkt i innerhalb der Spannweite

(Abb. 165), so hat die Einflußlinie nur ein Vorzeichen, wie nachfolgende Konstruktion zeigt (Abb. 165a).

Man trage die Ordinate $+\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ auf und zeichne die $\frac{A \cdot x_i}{r_i}$-Linie, die für Lasten rechts vom Schnittfeld gilt. Dann bringe man diese zum Schnitt mit der Senkrechten durch i, womit die $\frac{B \cdot x_i'}{r_i}$-Linie bestimmt ist, und verbinde die zwischen den Querträgern des Schnittfeldes liegenden Punkte der Einflußlinie geradlinig miteinander. Das Auftragen der Strecke $+\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ erübrigt sich daher.

Abb. 165.

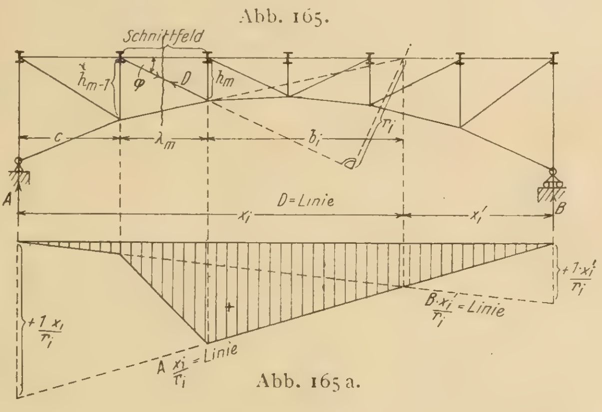


Abb. 165a.

Wenn die beiden vom Schnitt getroffenen Gurtstäbe sehr flach gegeneinander geneigt sind, ist es zweckmäßig, die Lage des Punktes i rechnerisch zu ermitteln, da dann der Punkt i durch Konstruktion nicht genau genug festliegt. So läßt sich z. B. nach Abb. 165 die Proportion aufstellen

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{b_i}{\lambda_m + b_i}, \text{ so daß } b_i = \frac{\lambda_m \cdot h_m}{h_{m-1} - h_m}.$$

x_i ist sodann $\quad = c + \lambda_m + b_i, \quad r_i = (\lambda_m + b_i) \cdot \sin \varphi.$

Liegt der Punkt i außerhalb des Zeichenblattes, so wird man ebenso verfahren, also x_i, x_i' und r_i rechnerisch ermitteln und dann durch Auftragen der Ordinaten $\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ und $-\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ die Einflußlinie festlegen.

Man kann auch die Ordinaten $\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ und $\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ als die Spannkräfte in der fraglichen Diagonalen infolge $A = 1\,t$ bezw. $B = 1\,t$ deuten. Nimmt man nämlich an, daß an Stelle des Auflagerdrucks A ein Auflagerdruck $A = 1\,t$ wirksam ist (etwa infolge irgend einer Last P rechts vom Schnittfeld), und benutzt am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt i (Abb. 165), so erhält man die Gleichung

$$1 \cdot x_i - D \cdot r_i = 0, \text{ woraus } D = \frac{1 \cdot x_i}{r_i} = D_{A=1}.$$

Entsprechend findet man $\frac{1 \cdot x_i'}{r_i} = D_{B=1}$. Wenn dann der Punkt i nicht genügend genau aus der Netzzeichnung bestimmt werden kann bezw. außerhalb des Zeichenblattes liegt, so bestimmt man $D_{A=1}$ und $D_{B=1}$ mit Hilfe Cremonascher Kräftepläne für die Zustände $A = 1\,t$ bezw. $B = 1\,t$ und benutzt dann an Stelle der Ordinaten $\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ und $\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$ die Ordinaten $D_{A=1}$ und $D_{B=1}$. In diesem Falle ist natürlich das Auftragen b e i d e r Ordinaten erforderlich.

Einflußlinien für die Vertikalen. Es handele sich um die von dem Ritterschen Schnitt getroffene Vertikale V (Abb. 166). Die Last 1 t wirke zunächst rechts vom Schnittfeld. Wir setzen für den links abgetrennten Teil die Momentengleichung für den Punkt i an:

$$V \cdot a_i + A \cdot x_i = 0. \quad V = -\frac{A \cdot x_i}{a_i}.$$

Für rechts vom Schnittfeld stehende Lasten ist daher die mit $-\frac{x_i}{a_i}$ multiplizierte A-Linie die Einflußlinie, mithin eine Gerade, deren Verlängerung von der Senkrechten durch das Auflager A die Strecke $-\frac{1 \cdot x_i}{a_i}$ abschneidet (Abb. 166a). Nunmehr wirke die Last 1 t links vom Schnittfeld. Die Momentengleichung für den Punkt i lautet, wenn wir den Gleichgewichtszustand des rechts abgetrennten Teils untersuchen,

$$V \cdot a_i - B \cdot x_i' = 0. \quad V = +\frac{B \cdot x_i'}{a_i}.$$

Für alle links vom Schnittfeld stehenden Lasten ist daher die mit $\frac{x_i'}{a_i}$ multiplizierte B-Linie die Einflußlinie, also eine Gerade, deren Verlängerung

Abb. 166.

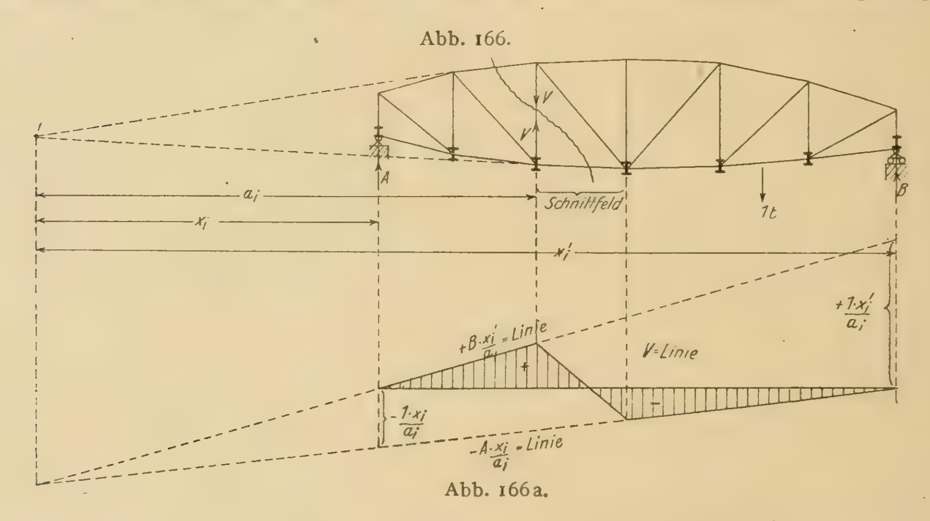


Abb. 166a.

von der Senkrechten durch das Auflager B die Strecke $+\frac{1 \cdot x_i'}{a_i}$ abschneidet. Da wir die negative Ordinate $-\frac{1 \cdot x_i}{a_i}$ nach unten abgetragen haben, müssen wir die positive Ordinate $+\frac{1 \cdot x_i'}{a_i}$ nach oben abtragen. Beide Linien, die $-\frac{A \cdot x_i}{a_i}$-Linie und die $+\frac{B \cdot x_i'}{a_i}$-Linie müssen sich, wie bereits bei den Einflußlinien für die Diagonalen gezeigt wurde, senkrecht unter i schneiden. Auch hier erübrigt sich das Auftragen der Strecke $\frac{1 \cdot x_i'}{a_i}$. Bei flach geneigten Schnittlinien bezw. wenn i aus dem Zeichenblatt herausfällt, ermittele man i

wieder rechnerisch oder bestimme $V_{A=1}$ und $V_{B=1}$. In diesem Fall sind beide Strecken, $\frac{1 \cdot x_i}{a_i}$ und $-\frac{1 \cdot x_i'}{a_i}$ bezw. V_{A-1} und V_{B-1} aufzutragen. Liegt i innerhalb der Spannweite (Abb. 167), so hat die Einflußlinie nur ein Vorzeichen (Abb. 167a).

Abb. 167.

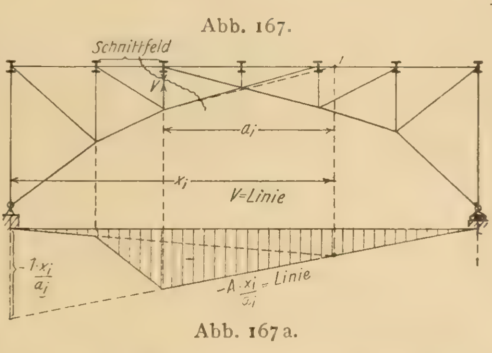


Abb. 167a.

Ausnahmen bestehen für V_o und V_t (Abb. 168). Da $V_o = -A$, so ist die V_o-Linie gleich der mit -1 multiplizierten A-Linie (Abb. 168a). Zu beachten ist dabei, daß die Last 1 t in o $V_o = 0$ hervorbringt und daß zwischen den beiden ersten Querträgern die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß. Vergl. auch Abb. 132a und die zugehörige Beschreibung. Seite 95.

V_t ist bei unten liegender Fahrbahn nach Seite 112 $= M_t \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r}{h_t}$, die V_t-Linie also die mit $\frac{\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r}{h_t}$ multiplizierte M_t-Linie, d. i. ein Dreieck mit der Spitze unter t, dessen eine Seite von der Senkrechten durch das Auflager A die Strecke $x_t \cdot \frac{\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r}{h_t}$ abschneidet (Abb. 168b).

Abb. 168.

Abb. 168a.

Abb. 168b.

Bei oben liegender Fahrbahn (Abb. 169) ist ebenfalls $V_o = -A$. Hier bringt die Last 1 t in o $V_o = -1$ hervor. Die Einflußlinie stimmt daher mit der $-A$-Linie überein (Abb. 169a).

Die V_t-Linie erhält man mit Hilfe der auf Seite 112 hergeleiteten Formel

$$V_t = \frac{M_t}{h_t} (\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r) - P_t.$$

Diese gilt, wenn die Last P_t im Querträger t, also über V_t steht. Für $P_t = 1\, t$ ist dann

$$V_t = \frac{M_t}{h_t} (\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r) - 1.$$

Senkrecht unter der Last muß die Ordinate der Einflußlinie diesen Wert haben. Den Wert $\frac{M_t}{h_t} (\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r)$ erhalten wir dabei aus der mit $\frac{\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r}{h_t}$ multiplizierten M_t-Linie. Davon ist dann 1 t abzuziehen (Abb. 169b).

Steht die Last 1 t links vom Querträger l bezw. rechts vom Querträger r, so wird $V_t = \frac{M_t}{h_t}$ (tg β_l + tg β_r), da sich bei diesen Laststellungen in t keine Last befindet, für V_t daher dieselbe Formel wie bei unten liegender Fahrbahn gilt. Unterhalb o — l und r — n ist daher die mit $\frac{\text{tg}\,\beta_l + \text{tg}\,\beta_r}{h_t}$ multiplizierte M_t-Linie die Einflußlinie. Zu beachten ist dann noch, daß zwischen den Querträgern l und t bezw. r und t die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß.

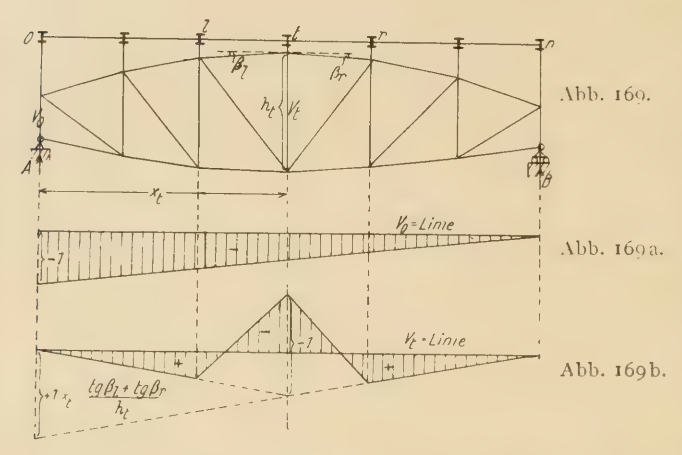


Abb. 169.

Abb. 169a.

Abb. 169b.

Beim Parallelträger war schon ausgeführt, daß die Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte mit Hilfe von Einflußlinien eine sehr zeitraubende Arbeit ist. Dasselbe gilt auch für den Balken mit gebrochener Gurtung. Im folgenden Kapitel sollen daher zweckmäßigere Methoden angegeben werden.

C. Die zweckmäßigsten Methoden zur Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte infolge eines Lastenzuges.

1. Berechnung der Größtspannkräfte in den Gurtstäben.

Da die Einflußlinien für die Gurtspannkräfte nur ein Vorzeichen haben, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, so ist volle Belastung die ungünstigste. Da ferner $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$ bezw. $U_{m-1} = +\frac{M_{m-1}}{r_{m-1}}$ ist, die Gurtspannkräfte also von den größten Biegungsmomenten infolge voller Belastung abhängig sind, so genügt es, auf die im § 6, 2, c, Seite 76 u. ff. angegebenen drei Verfahren zur Berechnung der größten Biegungsmomente für bestimmte Punkte hinzuweisen, womit die vorliegende Aufgabe gelöst ist.

2. Berechnung der Größtspannkräfte in den Füllungsstäben.

Die Einflußlinien für die Spannkräfte in den Füllungsstäben haben (mit Ausnahme des besonders zu behandelnden Falles, daß der Punkt i innerhalb der Spannweite liegt) zweierlei Vorzeichen, so daß die ungünstigste Belastung nicht bei voller, sondern bei teilweiser Belastung stattfindet. Bei Berechnung der größten Zugspannkräfte darf die Verkehrslast nur über dem positiven, bei Berechnung der größten Druckspannkräfte nur über dem negativen Teil der Einflußlinie aufgestellt werden, wobei die ungünstigste Lastenstellung durch Probieren gefunden werden muß. Zur Vermeidung dieser zeitraubenden Arbeit sei im folgenden ähnlich wie beim Parallelträger ein Kriterium hergeleitet, das eine schnelle Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung ermöglicht.

Es handle sich z. B. um die ungünstigste Lastenstellung für D_{max} (Abb. 170). Für die Herleitung des Kriteriums benutzen wir die Einflußlinie für D, d. h., wie besonders hervorgehoben werde, lediglich die äußere Form der Einflußlinie (Abb. 170a), benutzen also nicht die Ordinaten $\frac{1 \cdot x_i}{r_i}$ bezw. $\frac{1 \cdot x_i'}{r_i}$, durch welche die Einflußlinie in ihren genauen Abmessungen festgelegt ist. Da die Einflußlinien für Diagonalen und Vertikalen in der äußeren Form miteinander übereinstimmen, so gilt das abzuleitende Kriterium der ungünstigsten Lastenstellung ganz allgemein sowohl für die Diagonalen als auch für die Vertikalen, sowohl für die Maximal- als auch für die Minimalwerte.

Abb. 170.

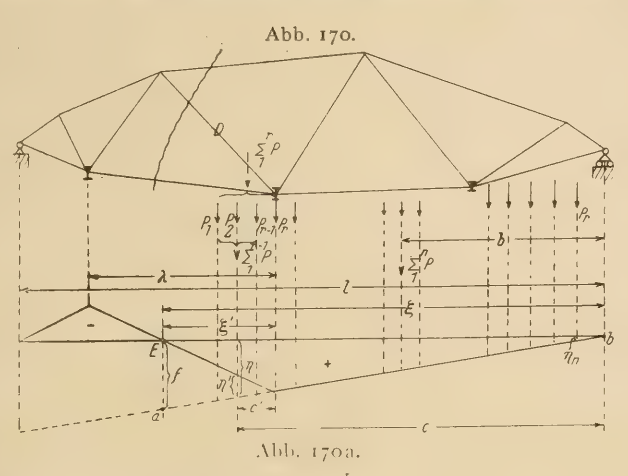


Abb. 170a.

Damit z. B. D_{max} entsteht, müssen die Lasten über dem positiven Teil der Einflußlinie aufgestellt werden. Es ist nur die Frage, ob der Lastenzug in der Grundstellung stehen muß oder ob eine oder mehrere Lasten in das Schnittfeld zu rücken sind. Nehmen wir zunächst einmal an, es befinden sich $r-1$ Lasten im Schnittfeld, während die $r$te Last P_r über dem Querträger steht. Die Mittelkraft dieser r Lasten sei $\sum_1^r P$. $\sum_1^n P$ sei die Mittelkraft **aller** auf dem Balken stehenden Lasten.

Die Ordinaten η seien sämtlich auf die Gerade $a - b$ bezogen. Dann ist

$$D = [\Sigma P \cdot \eta]_1^n - [\Sigma P \cdot \eta']_1^{r-1}.$$

Die erste Summe erstreckt sich über die allen Lasten entsprechenden Produkte $P \cdot \eta$, die zweite nur über die Produkte $P \cdot \eta'$, die den Lasten P_1 bis einschl. P_{r-1} entsprechen. Aus den Proportionen

$$\frac{\eta}{f} = \frac{c}{\xi} \quad \text{und} \quad \frac{\eta'}{f} = \frac{c'}{\xi'}$$

erhält man nun
$$\eta = c \cdot \frac{f}{\xi} \quad \text{und} \quad \eta' = c' \cdot \frac{f}{\xi'} \cdot$$

Führt man diese Werte in die für D aufgestellte Gleichung ein, so wird

$$D = \frac{f}{\xi}\,[\Sigma P \cdot c]_1^n - \frac{f}{\xi'}\,[\Sigma P \cdot c']_1^{r-1}.$$

Wir schieben jetzt den Lastenzug um die unendlich kleine Strecke dx nach links vor. Dann ändern sich c und c' um dasselbe dx, D um sein Differential. Nunmehr tritt auch P_r in das Feld, ist also von Einfluß auf die Werte $\Sigma P \cdot \eta'$ bezw. $\Sigma P \cdot c'$. Der P_r entsprechende Wert c' ist dann $= dx$. Man erhält daher

$$D + dD = \frac{f}{\xi}\left[\Sigma P(c + dx)\right]_1^n - \left\{\frac{f}{\xi'}\left[\Sigma P(c' + dx)\right]_1^{r-1} + \frac{f}{\xi'} P_r \cdot dx\right\}$$

$$= \frac{f}{\xi}\left[\Sigma P \cdot c\right]_1^n - \frac{f}{\xi'}\left[\Sigma P \cdot c'\right]_1^{r-1} + \frac{f}{\xi}\left[\Sigma P \cdot dx\right]_1^n - \left\{\frac{f}{\xi'}\left[\Sigma P \cdot dx\right]_1^{r-1} + \frac{f}{\xi'} P_r \cdot dx\right\}.$$

Hierin ist $\qquad \frac{f}{\xi}\left[\Sigma P \cdot c\right]_1^n - \frac{f}{\xi'}\left[\Sigma P \cdot c'\right]_1^{r-1} = D.$

Da man ferner die Konstante dx vor die Summen setzen kann, so folgt

$$D + dD = D + \frac{f}{\xi} \cdot dx \cdot \sum_1^n P - \frac{f}{\xi'} \cdot dx \left(\sum_1^{r-1} P + P_r\right)$$

$$= D + \frac{f}{\xi} \cdot dx \cdot \sum_1^n P - \frac{f}{\xi'} \cdot dx \cdot \sum_1^r P,$$

woraus

$$dD = f \cdot dx \left[\frac{\sum_1^n P}{\xi} - \frac{\sum_1^r P}{\xi'}\right] \text{ und } \frac{dD}{dx} = f\left[\frac{\sum_1^n P}{\xi} - \frac{\sum_1^r P}{\xi'}\right].$$

Entsprechend den für die Querkräfte gemachten Ausführungen auf Seite 98 wächst die Spannkraft D, wenn $\frac{dD}{dx}$ positiv wird. Das ist aber der Fall, wenn

$$\frac{\sum_1^n P}{\xi} > \frac{\sum_1^r P}{\xi'},$$

d. h. wenn $\qquad \sum_1^n P > \frac{\xi}{\xi'} \cdot \sum_1^r P.$

Wird $\qquad \sum_1^n P < \frac{\xi}{\xi'} \cdot \sum_1^r P,$

so wird D beim Vorschieben um dx kleiner, der Lastenzug muß also in die ursprüngliche Stellung zurückgeschoben werden.

Demgemäß hat man zur Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung folgendermaßen zu verfahren:

Man nehme zunächst Grundstellung an, bilde $\sum_1^n P$ und $\frac{P_1 \cdot \xi}{\xi'}$. Würde jetzt $\sum_1^n P < P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'}$ sein, so würde bei dieser Lastenstellung $\frac{dD}{dx}$ negativ sein, d. h. die Spannkraft in der Diagonalen würde beim Vorschieben des Lastenzuges kleiner werden. Der Lastenzug ist dann also in die Grundstellung zurückzuschieben.

Wird dagegen $\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'}$, so wächst die Spannkraft D beim Vorschieben des Lastenzuges. Wir schieben ihn daher noch weiter vor, so daß P_1 im Felde und P_2 über dem Querträger steht. Ergibt sich dann auch für diese Lastenstellung

$$\sum_1^n P > (P_1 + P_2) \cdot \frac{\xi}{\xi'},$$

so schieben wir noch eine Last in das Feld hinein, so daß P_1 und P_2 im Felde stehen und P_3 über dem Querträger. Würde jetzt

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2 + P_3) \cdot \frac{\xi}{\xi'}$$

werden, so würde beim weiteren Vorschieben um dx über diese Stellung hinaus die Spannkraft D kleiner werden. Ein weiteres Vorschieben kommt dann nicht in Frage, so daß P_1 und P_2 im Felde, P_3 über dem Querträger stehen müßte.

Es würde nun sehr umständlich sein, erst eine Einflußlinie zu zeichnen und aus ihr die Strecken ξ und ξ' zu entnehmen. Nachfolgend soll ein sehr einfaches Verfahren zur Ermittlung dieser Strecken hergeleitet werden (Abb. 171).

Wir verlängern den vom Ritterschen Schnitt getroffenen Gurtstab der unbelasteten Gurtung bis zum Schnitt mit den Stützensenkrechten und verbinden diese Schnittpunkte mit den Knotenpunkten des Schnittfeldes. Die Verbindungslinien schneiden sich im Punkt E. Die Last 1 t im Punkt E erzeugt in D die Spannkraft 0. Senkrecht unter E muß daher der Nullpunkt der Einflußlinie liegen.

Abb. 171.

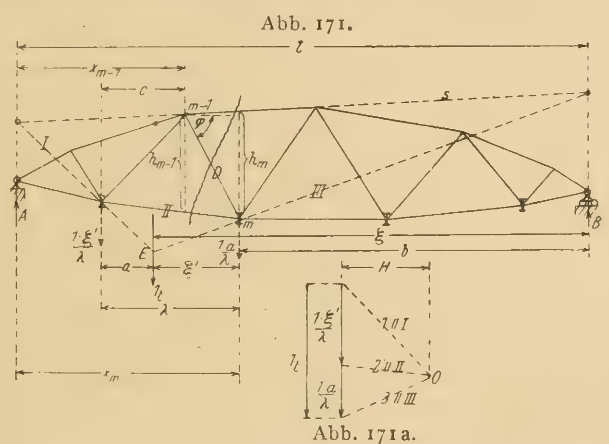


Abb. 171a.

Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion:

Wir ersetzen die in E stehende Last 1 t durch ihre auf die benachbarten Querträger entfallenden Drücke $\frac{1 \cdot \xi'}{\lambda}$ und $\frac{1 \cdot a}{\lambda}$ und zeichnen für diese Belastung nach § 6, 1, a, 1, Seite 65 die Momentenfläche mit Hilfe eines Seilpolygons. Als Seilpolygon wählen wir das aus den Seilstrahlen I, II und III gebildete Polygon. Durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahls, also von I und III muß dann die Mittelkraft der Kräfte $\frac{1 \cdot \xi'}{\lambda}$ und $\frac{1 \cdot a}{\lambda}$, also 1 t gehen. Die Verlängerung des vom Schnitt getroffenen Obergurtstabes bis zum Schnitt mit den Stützensenkrechten bildet dann die Schlußlinie s des Seilpolygons. Das zugehörige Kräftepolygon erhalten wir, indem wir die Kraft 1 t in irgend einem Maßstabe auftragen (Abb. 171a), durch den Anfangs- und Endpunkt der Kraft Parallele zu den Seilstrahlen I und III und durch den Schnittpunkt dieser Parallelen eine Parallele zu II ziehen, die dann von der Kraft 1 t die Kräfte $\frac{1 \cdot \xi'}{\lambda}$ und $\frac{1 \cdot a}{\lambda}$ abschneidet (vgl. § 1, 6, Seite 6). Damit ist auch die Polweite H des Kräftepolygons bestimmt. Dann ist $M_m = H \cdot h_m$ und $M_{m-1} = H \cdot h_{m-1}$, so daß

$$D \cos \varphi = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{H \cdot h_m}{h_m} - \frac{H \cdot h_{m-1}}{h_{m-1}} = H - H = 0.$$

Da $\cos \varphi$ nicht $= 0$ werden kann (φ ist ja unter allen Umständen als Neigungswinkel der Diagonalen gegen die Wagerechte ein spitzer Winkel), muß $D = 0$ werden. D. h. die Last 1 t in E erzeugt $D = 0$. Senkrecht unter E liegt daher der Nullpunkt der Einflußlinie. Damit sind die Strecken ξ und ξ' gegeben. Sie können aus der Zeichnung abgegriffen werden.

Ist $D_{\min}$ gesucht, so sind ξ und ξ' die Abstände des Nullpunktes E vom linken Auflager bezw. vom linken Querträger, da für $D_{\min}$ die Verkehrslasten von links her auffahren müssen.

Die beschriebene Konstruktion gilt auch für die Vertikalen (Abb. 172).

Nach Seite 111 gilt bei oben liegender Fahrbahn für V_m die Formel

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Mit $M_{m-1} = H \cdot h'_{m-1}$ und $M_m = H \cdot h_m$ ist somit

$$V_m = \frac{H \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{H \cdot h_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} = \frac{H \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{H \cdot h'_{m-1}}{\lambda_m} = 0.$$

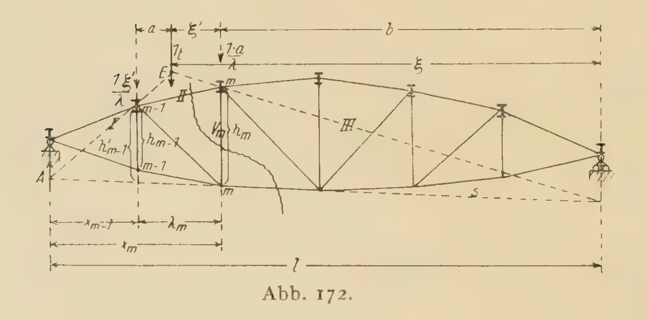


Abb. 172.

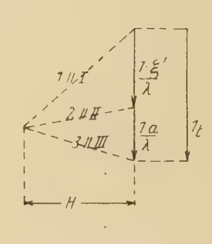


Abb. 172a.

Die Last 1 t in E erzeugt daher $V_m = 0$. Senkrecht unter E liegt mithin der Nullpunkt der Einflußlinie, womit die Strecken ξ und ξ' bestimmt sind. Je nachdem $V_{\max}$ oder $V_{\min}$ gesucht wird, müssen ξ und ξ' links bezw. rechts von E abgegriffen werden.

Entsprechend läßt sich der Nachweis bei unten liegender Fahrbahn mit Hilfe der für diesen Fall geltenden Formel

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$$

(Seite 111) führen.

Rechnerische Ermittlung von ξ und ξ'.

a) Für Diagonalen (Abb. 171).

Wir setzen

$$D \cos \varphi = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = 0.$$

$$M_m = A \cdot x_m - 1 \cdot \xi', \text{ worin } A = \frac{1\,(\xi' + b)}{l},$$

so daß
$$M_m = \frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot x_m - 1 \cdot \xi'.$$

$$M_{m-1} = A \cdot x_{m-1} - \frac{1 \cdot \xi'}{\lambda} \cdot c = \frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot x_{m-1} - \frac{1 \cdot \xi'}{\lambda} \cdot c.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung $\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = 0$ ein, so erhält man

$$\frac{1\,(\xi' + b)}{l \cdot h_m} \cdot x_m - \frac{1 \cdot \xi'}{h_m} - \frac{1\,(\xi' + b)}{l \cdot h_{m-1}} \cdot x_{m-1} + \frac{1 \cdot \xi'}{\lambda \cdot h_{m-1}} \cdot c = 0.$$

$$\xi' \left(\frac{x_m}{l \cdot h_m} - \frac{1}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{l \cdot h_{m-1}} + \frac{c}{\lambda \cdot h_{m-1}} \right) = \frac{b}{l} \left(\frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{x_m}{h_m} \right).$$

$$\xi' = \frac{b \left(\frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{x_m}{h_m} \right)}{\left(\frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} \right) - \frac{l}{h_m} + \frac{c \cdot l}{\lambda \cdot h_{m-1}}}$$

$$= b \cdot \frac{x_{m-1} \cdot h_m - x_m \cdot h_{m-1}}{x_m \cdot h_{m-1} - x_{m-1} \cdot h_m - l \cdot h_{m-1} + \frac{c \cdot l \cdot h_m}{\lambda}}.$$

Liegt ein Fachwerk mit Vertikalen vor, so wird $c = 0$, so daß

$$\xi' = b \cdot \frac{x_{m-1} \cdot h_m - x_m \cdot h_{m-1}}{x_m \cdot h_{m-1} - x_{m-1} \cdot h_m - l \cdot h_{m-1}};$$

ξ ist sodann $= \xi' + b$.

b) Für Vertikalen (Abb. 172, Fahrbahn oben).

Wir setzen $$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}.$$

$$M_{m-1} = A \cdot x_{m-1} = \frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot x_{m-1};$$

$$M_m = A \cdot x_m - 1 \cdot \xi' = \frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot x_m - 1 \cdot \xi';$$

daher $$V_m = \frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot \frac{x_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{h'_{m-1}}{h_m \cdot \lambda_m} \left[\frac{1\,(\xi' + b)}{l} \cdot x_m - 1 \cdot \xi' \right] = 0.$$

$$\xi' \left(\frac{x_{m-1}}{l \cdot \lambda_m} - \frac{x_m \cdot h'_{m-1}}{l \cdot h_m \cdot \lambda_m} + \frac{h'_{m-1}}{h_m \cdot \lambda_m} \right) = \frac{b \cdot x_m \cdot h'_{m-1}}{l \cdot h_m \cdot \lambda_m} - \frac{b \cdot x_{m-1}}{l \cdot \lambda_m}$$

$$\xi' = b \cdot \frac{x_m \cdot h'_{m-1} - x_{m-1} \cdot h_m}{h_m \cdot x_{m-1} - x_m \cdot h'_{m-1} + l \cdot h'_{m-1}}.$$

Bei unten liegender Fahrbahn findet man ξ' in entsprechender Weise mittels der Gleichung

$$V_m = \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}} = 0.$$

Eine andere Form des Kriteriums der ungünstigsten Lastenstellung findet man, wenn man bei der Ableitung die für die Spannkräfte in den Füllungsstäben hergeleiteten allgemeinen Formeln benutzt, so daß die Konstruktion bezw. Berechnung der Strecken ξ und ξ' überflüssig wird. Nur findet man dann nicht mehr eine für alle Fälle gültige Formel, sondern muß das Kriterium für jeden Fall gesondert herleiten, d. h. für D_{max}, D_{min}, V_{max}, V_{min}, für Fahrbahn unten und für Fahrbahn oben, wie aus den nachfolgenden Ausführungen hervorgeht.

a) Kriterium der ungünstigsten Lastenstellung für D_{max} (Abb. 173).

Damit D_{max} entsteht, muß der Lastenzug von rechts nach links vorgeschoben werden. Wir verfahren ähnlich wie unter 3, C, 2, stellen also zunächst probeweise einige Lasten in das Schnittfeld und untersuchen, ob die Spannkraft D wächst, wenn wir den Lastenzug um das unendlich kleine Stück dc weiter vorschieben. Dazu benutzen wir die Formel

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right) = \frac{1}{h_m \cos\varphi}\left(M_m - \frac{M_{m-1} \cdot h_m}{h_{m-1}}\right).$$

Mit $$A = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \text{ wird } M_m = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_m - \sum_1^{r-1} P \cdot b$$

und $$M_{m-1} = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_{m-1} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot d,$$

so daß $$D = \frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_m - \sum_1^{r-1} P \cdot b \right.$$
$$\left. - \left(\sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_{m-1} - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot d\right) \frac{h_m}{h_{m-1}}\right].$$

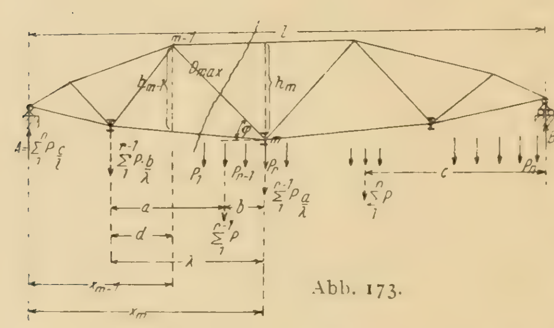


Abb. 173.

Beim Vorschieben des Lastenzuges um dc ändern sich c und b um die gleiche Strecke dc, D um sein Differential dD. Außerdem tritt noch die Last P_r in das Feld, steht also nunmehr im Abstand dc links vom Querträger m. Die Momente M_m und M_{m-1} ändern sich daher um

$$dM_m = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \sum_1^{r-1} P \cdot dc - P_r \cdot dc$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - dc\left(\sum_1^{r-1} P + P_r\right) = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot dc$$

und um $$dM_{m-1} = \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \sum_1^{r-1} P \cdot \frac{dc}{\lambda} \cdot d - P_r \cdot \frac{dc}{\lambda} \cdot d$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \frac{dc}{\lambda} \cdot d \cdot \left(\sum_1^{r-1} P + P_r\right)$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot \frac{dc}{\lambda} \cdot d.$$

Mithin ist $$dD = \frac{1}{h_m \cos\varphi}\left(dM_m - \frac{dM_{m-1} \cdot h_m}{h_{m-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot dc - \left(\sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot \frac{dc}{\lambda} \cdot d\right) \frac{h_m}{h_{m-1}}\right]$$

und $$\frac{dD}{dc} = \frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\frac{\sum_1^n P}{l}\left(x_m - x_{m-1} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}}\right) - \sum_1^r P\left(1 - \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}}\right)\right].$$

Die Spannkraft D wächst, wenn $\frac{dD}{dc}$ positiv wird, und das ist der Fall, wenn

$$\frac{\sum\limits_1^n P}{l}\left(x_m - x_{m-1}\cdot\frac{h_m}{h_{m-1}}\right) > \sum_1^r P\left(1 - \frac{d}{\lambda}\cdot\frac{h_m}{h_{m-1}}\right),$$

d. h. wenn
$$\sum_1^n P > \sum_1^r P\cdot\frac{1-\frac{d}{\lambda}\cdot\frac{h_m}{h_{m-1}}}{x_m - x_{m-1}\cdot\frac{h_m}{h_{m-1}}}\cdot l.$$

Für das Ständerfachwerk wird $d = 0$ (Abb. 174), so daß dann das Kriterium lautet

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P\cdot\frac{l}{x_m - x_{m-1}\cdot\frac{h_m}{h_{m-1}}}.$$

Man erkennt auch sofort die Übereinstimmung mit dem für den Parallelträger hergeleiteten Kriterium

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P\cdot\frac{l}{\lambda},$$

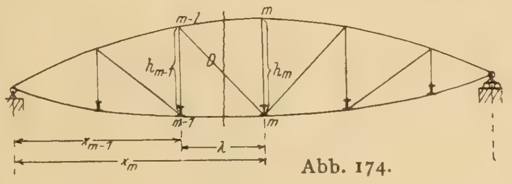


Abb. 174.

wenn man berücksichtigt, daß dort $h_m = h_{m-1}$. Setzt man dies in die für das Ständerfachwerk abgeleitete Formel ein, so erhält man

$$\sum_1^n P > \frac{l}{x_m - x_{m-1}}.$$

Mit $x_m - x_{m-1} = \lambda$ ist sodann

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P\cdot\frac{l}{\lambda} \text{ (vergl. § 7, 1, C, 2, Seite 98).}$$

b) Kriterium der ungünstigsten Lastenstellung für D_{min} (Abb. 175).

Um D_{min} hervorzurufen, muß der Lastenzug von links nach rechts vorgeschoben werden. Zunächst werden wieder die Lasten P_1 bis P_{r-1} im Schnittfeld, P_r über dem Querträger l angenommen. Da infolge dieser Lastenstellung in der Diagonalen ein Druck entsteht, so muß

$$D\cos\varphi = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

negativ werden. Es ist also zu setzen

$$D = -\frac{1}{h_m\cos\varphi}\left(M_m - \frac{M_{m-1}\cdot h_m}{h_{m-1}}\right).$$

Abb. 175.

Da $B = \sum\limits_1^n P\cdot\frac{c}{l}$, so wird

$$M_m = B\cdot x_m = \sum_1^n P\cdot\frac{c}{l}\cdot x_m$$

und
$$M_{m-1} = B\cdot x_{m-1} - \sum_1^r P\cdot a = \sum_1^n P\cdot\frac{c}{l}\cdot x_{m-1} - \sum_1^{r-1} P\cdot a.$$

c und a ändern sich beim Vorschieben des Lastenzuges um dasselbe Differential dc, D um dD, außerdem tritt noch die Last P_r in das Feld, steht also nunmehr im Abstand dc rechts vom Querträger l. Die Momente M_m und M_{m-1} ändern sich daher um

$$dM_m = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc$$

und um
$$dM_{m-1} = \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \sum_1^{r-1} P \cdot dc - P_r \cdot dc$$
$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - dc\left(\sum_1^{r-1} P + P_r\right)$$
$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - dc \cdot \sum_1^r P.$$

Folglich ist

$$dD = -\frac{1}{h_m \cos\varphi}\left(dM_m - \frac{dM_{m-1} \cdot h_m}{h_{m-1}}\right)$$
$$= -\frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \left(\sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot dc\right)\frac{h_m}{h_{m-1}}\right]$$

und
$$\frac{dD}{dc} = -\frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} - \left(\sum_1^n P \cdot \frac{x_{m-1}}{l} - \sum_1^r P\right)\frac{h_m}{h_{m-1}}\right]$$
$$= +\frac{1}{h_m \cos\varphi}\left[\frac{\sum_1^n P}{l}\left(x_{m-1} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}} - x_m\right) - \sum_1^r P \frac{h_m}{h_{m-1}}\right].$$

$\frac{dD}{dc}$ wird positiv, wenn

$$\frac{\sum_1^n P}{l}\left(x_{m-1} \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}} - x_m\right) > \sum_1^r P \cdot \frac{h_m}{h_{m-1}},$$

d. h. wenn
$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{x_{m-1} - x_m \cdot \frac{h_{m-1}}{h_m}}.$$

Auch hier erkennt man leicht wieder die Übereinstimmung mit der für den Parallelträger hergeleiteten Formel

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{\lambda},$$

wenn man $h_{m-1} = h_m$ setzt und berücksichtigt, daß $x_{m-1} - x_m = \lambda$ ist.

c) Kriterium für V_{min} (Fahrbahn unten) (Abb. 176).

Um V_{min} zu erhalten, muß der Lastenzug von rechts nach links vorgeschoben werden. Die allgemeine Formel für V lautet bei unten liegender Fahrbahn

$$V = \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}} \text{ (vgl. Seite 111).}$$

Da die Lasten so aufgestellt sind, daß ein Druck in V entsteht, muß die rechte Seite der Gleichung negativ werden. Es ist daher zu setzen

$$V = -\left(\frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\right).$$

Mit $A = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l}$ erhält man dann

$$M_m = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_m \quad \text{und} \quad M_{m+1} = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_{m+1} - \sum_1^{r-1} P \cdot b$$

(es sind wieder zunächst $r-1$ Lasten probeweise in das Feld gerückt, während P_r über dem Querträger $m+1$ steht). Beim Vorschieben des Lastenzuges um dc ändern sich c und b um dasselbe Differential dc, V um dV, außerdem ist noch P_r in das Feld gerückt und steht nunmehr im Abstand dc links vom Querträger $m+1$. Somit wird

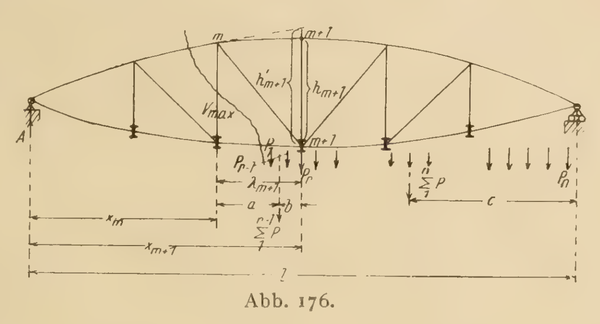


Abb. 176.

$$dM_m = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc \quad \text{und} \quad dM_{m+1} = \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} \cdot dc - \sum_1^{r-1} P \cdot dc - P_r \cdot dc$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} \cdot dc - dc\left(\sum_1^{r-1} P + P_r\right) = \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} \cdot dc - dc \cdot \sum_1^r P.$$

Daher erhält man

$$dV = -\left(\frac{dM_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{dM_{m+1}}{\lambda_{m+1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\lambda_{m+1}}\left[\sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m} \cdot dc - \left(\sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} - \sum_1^r P\right) \cdot dc\right]$$

und
$$\frac{dV}{dc} = +\frac{1}{\lambda_{m+1}}\left[\frac{\sum_1^n P}{l}\left(x_{m+1} - x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m}\right) - \sum_1^r P\right].$$

Dieser Wert wird positiv, wenn

$$\frac{\sum_1^n P}{l}\left(x_{m+1} - x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m}\right) > \sum_1^r P,$$

d. h. wenn
$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{x_{m+1} - x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m}}.$$

Man überzeuge sich auch hier wieder von der Übereinstimmung mit der für den Parallelträger hergeleiteten Formel

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{\lambda},$$

für den $h'_{m+1} = h_m$ und $x_{m+1} - x_m = \lambda$ zu setzen ist.

d) **Kriterium für V_{max}** (Abb. 177).

Um V_{max} hervorzurufen, muß der Lastenzug von links nach rechts vorgeschoben werden. Stellt man zunächst probeweise $r - 1$ Lasten in das Schnittfeld, P_r über den Querträger m, errechnet

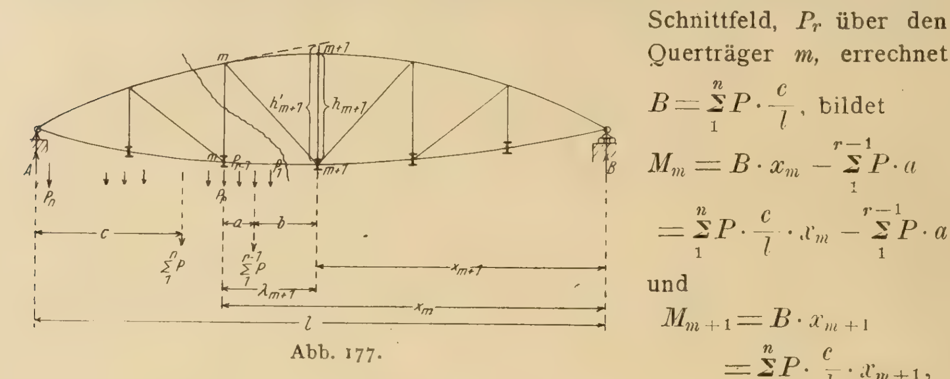


Abb. 177.

$B = \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l}$, bildet

$$M_m = B \cdot x_m - \sum_1^{r-1} P \cdot a$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_m - \sum_1^{r-1} P \cdot a$$

und

$$M_{m+1} = B \cdot x_{m+1}$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{c}{l} \cdot x_{m+1},$$

so ist $V = \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$, folglich $dV = \frac{dM_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{dM_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$.

Da sich beim Vorschieben des Lastenzuges um dc c und a um dasselbe Differential dc ändern, außerdem noch P_r um die Strecke dc vorrückt, also im Abstand dc rechts vom Querträger m steht, so wird

$$dM_m = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \sum_1^{r-1} P \cdot dc - P_r \cdot dc$$

$$= \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - dc\left(\sum_1^{r-1} P - P_r\right) = \sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - dc \cdot \sum_1^r P$$

und
$$dM_{m+1} = \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} \cdot dc,$$

mithin
$$dV = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left[\left(\sum_1^n P \cdot \frac{x_m}{l} \cdot dc - \sum_1^r P \cdot dc\right) \frac{h'_{m+1}}{h_m} - \sum_1^n P \cdot \frac{x_{m+1}}{l} \cdot dc\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left[\frac{\sum_1^n P}{l} \left(x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m} - x_{m+1}\right) dc - \sum_1^r P \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m} \cdot dc\right]$$

und
$$\frac{dV}{dc} = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \left[\frac{\sum_1^n P}{l} \left(x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m} - x_{m+1}\right) - \sum_1^r P \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m}\right].$$

Dieser Wert wird positiv, wenn

$$\frac{\sum_1^n P}{l} \left(x_m \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m} - x_{m+1}\right) > \sum_1^r P \cdot \frac{h'_{m+1}}{h_m},$$

d. h. wenn
$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{x_m - x_{m+1} \cdot \frac{h_m}{h'_{m+1}}}.$$

Für den Parallelträger wäre zu setzen $h'_{m+1} = h_m$, so daß

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{x_m - x_{m+1}}$$

und mit $x_m - x_{m+1} - \lambda_{m-1}$

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{l}{\lambda_{m+1}},$$

woraus die Übereinstimmung beider Formeln klar hervorgeht.

Entsprechend verfahre man bei Ableitung der Kriterien für V_{max} und V_{min} bei oben liegender Fahrbahn unter Benutzung der für diesen Fall geltenden Formel

$$V = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Bezüglich des Gebrauchs dieser Formeln bei Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung vergl. die auf Seite 120 gegebene Beschreibung der Anwendung des allgemein gültigen Kriteriums

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{\xi}{\xi'}.$$

Die weitere Berechnung der Größtspannkräfte in den Füllungsstäben stellt sich nunmehr höchst einfach, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

α) Rechnerisches Verfahren.

1. Es sei D_{max} gesucht (Abb. 178).

Die Lasten müssen daher rechts vom Schnittfeld aufgestellt werden. Die Bestimmung der ungünstigsten Lastenstellung erfolge mit Hilfe des allgemeinen Kriteriums

$$\sum_1^n P > \sum_1^r P \cdot \frac{\xi}{\xi'}.$$

Zunächst ist daher der Nullpunkt E nach dem auf Seite 121 beschriebenen Verfahren zu bestimmen, worauf die Abstände ξ und ξ' auf der Belastungsseite abgegriffen, bezw. mit Hilfe der auf Seite 123 abgeleiteten Formel berechnet werden können.

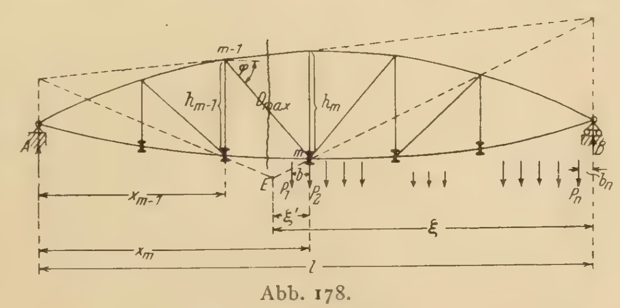


Abb. 178.

Für die Grundstellung (P_1 über dem Querträger m) möge sich ergeben $\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'}$. Schiebt man also den Lastenzug über die Grundstellung hinaus, so wächst die Spannkraft D. Wir rücken daher den Lastenzug soweit vor, daß P_1 im Felde, P_2 über dem Querträger m steht. Für diese Stellung bilden wir ebenfalls

$$\sum_1^n P \text{ und } (P_1 + P_2) \cdot \frac{\xi}{\xi'},$$

wobei event. die Mittelkraft $\sum_1^n P$ eine andere ist wie in der ersten Ungleichung

wenn durch das Vorschieben des Lastenzuges noch eine Last mehr auf den Balken gelangt ist. Ergibt sich nunmehr

$$\sum_1^n P < (P_1 + P_2) \cdot \frac{\xi}{\xi'},$$

so besagt dies, daß ein weiteres Vorrücken des Lastenzuges nicht in Frage kommt, weil dann die Spannkraft D kleiner werden würde, daß also P_1 im Felde, P_2 über dem Querträger m stehen muß.

Nunmehr benutzen wir die Formel

$$D = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right).$$

Die Momente M_m und M_{m-1} werden zweckmäßig von der linken Seite aus berechnet, weil dort die wenigsten Kräfte angreifen. Man erhält

$$M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot b \text{ und } M_{m-1} = A \cdot x_{m-1}.$$

A wird unter Benutzung der Brückenbautabelle mittels der Formel

$$A = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}$$

ermittelt, so daß

$$D_{\max} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} \cdot x_m - P_1 \cdot b}{h_m} - \frac{\frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} \cdot x_{m-1}}{h_{m-1}}\right).$$

Infolge Belastung des Balkens durch das Eigengewicht wird

$$M_{mg} = \frac{g \cdot x_m (l - x_m)}{2} \text{ und } M_{(m-1)g} = \frac{g \cdot x_{m-1}(l - x_{m-1})}{2} \text{ (vergl. Seite 66),}$$

so daß $$D_g = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{g \cdot x_m (l - x_m)}{2\,h_m} - \frac{g \cdot x_{m-1}(l - x_{m-1})}{2\,h_{m-1}}\right].$$

Die Gesamtspannkraft D ist sodann $= D_{\max} + D_g$.

2. Gesucht sei $D_{\min}$ (Abb. 179).

Damit $D_{\min}$ entsteht, müssen die Lasten links vom Schnittfeld aufgestellt werden. ξ und ξ' werden wieder wie unter α gefunden. (Man beachte, daß der vom Ritterschen Schnitt getroffene Gurtstab der unbelasteten Gurtung bis zum Schnitt mit den Stützensenkrechten verlängert werden muß und daß diese Schnittpunkte mit den Knotenpunkten des Schnittfeldes zu verbinden sind, worauf ξ und ξ' auf der Belastungsseite, also links vom Nullpunkt E, abzugreifen sind.)

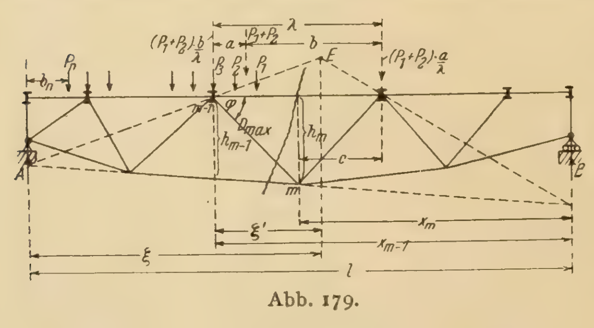


Abb. 179.

Nach Einsetzen der Zahlenwerte möge sich ergeben

$$\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'} \text{ und } \sum_1^n P > (P_1 + P_2)\frac{\xi}{\xi'}, \text{ aber } \sum_1^n P < (P_1 + P_2 + P_3)\frac{\xi}{\xi'}.$$

Es müssen daher P_1 und P_2 im Schnittfelde stehen, P_3 über dem Querträger.

Die Mittelkraft $P_1 + P_2$ ersetzen wir durch die Seitenkräfte $(P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}$ und $(P_1 + P_2)\frac{b}{\lambda}$.

Nunmehr wird $D_{\min} = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}\right)$,

worin zu setzen ist

$$M_m = B \cdot x_m - (P_1 + P_2)\cdot\frac{a}{\lambda}\cdot c \text{ und } M_{m-1} = B\cdot x_{m-1} - (P_1 + P_2)\,a.$$

(Die Momente sind von der rechten Seite aus berechnet, da hier die wenigsten Kräfte angreifen. Man beachte auch, daß rechts von m die Seitenkraft $(P_1 + P_2)\frac{a}{\lambda}$ der im Felde stehenden Mittelkraft $P_1 + P_2$ wirkt.)

Hierin ist
$$B = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l},$$

wobei die Werte $\mathfrak{P}_n$ und $\mathfrak{S}_n$ aus der Brückenbautabelle zu entnehmen sind. Somit wird $D_{\min} =$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{\frac{\mathfrak{P}_n\cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}\cdot x_m - (P_1+P_2)\frac{a}{\lambda}\cdot c}{h_m} - \frac{\frac{\mathfrak{P}_n\cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}\cdot x_{m-1} - (P_1+P_2)\,a}{h_{m-1}}\right].$$

Dieser Wert wird sich bei Einsetzen von Zahlenwerten negativ ergeben, da der zweite Bruch größer ist als der erste $(x_{m-1} > x_m)$.

$$D_g = \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{M_{m\,g}}{h_m} - \frac{M_{(m-1)\,g}}{h_{m-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{g\cdot x_m\,(l - x_m)}{2\cdot h_m} - \frac{g\cdot x_{m-1}\,(l - x_{m-1})}{2\cdot h_{m-1}}\right]$$

Die Gesamtspannkraft $D = D_{\min} + D_g$.

3. Gesucht sei $V_{\min}$ (Abb. 180).

Die Lasten müssen, um $V_{\min}$ zu erzeugen, rechts vom Schnittfeld aufgestellt werden. Wir stellen den Lastenzug zunächst so auf, daß P_1 über dem Querträger $m + 1$ steht, bilden $\sum_1^n P$ und $\frac{P_1\cdot\xi}{\xi'}$.

Es möge sich ergeben
$$\sum_1^n P < P_1\cdot\frac{\xi}{\xi'}.$$

Alsdann ist die **Grundstellung** die ungünstigste Lastenstellung.

Abb. 180.

Die Formel für V lautet bei unten liegender Fahrbahn
$$V = \frac{M_m}{h_m}\cdot\frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{m+1}}{\lambda_{m+1}}.$$

Es wird
$$M_m = A\cdot x_m = \frac{\mathfrak{P}_n\cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}\cdot x_m;\quad M_{m+1} = A\cdot x_{m+1} = \frac{\mathfrak{P}_n\cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}\cdot x_{m+1}.$$

Daher $V_{\min} = \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} \cdot \frac{x_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l} \cdot \frac{x_{m+1}}{\lambda_{m+1}}$.

Der Wert wird sich bei Einsetzen von Zahlenwerten negativ ergeben, weil das negative Glied der Gleichung größer ist als das positive (wegen des größeren x_{m+1}).

$$V_g = \frac{M_{mg}}{h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{M_{(m+1)g}}{\lambda_{m+1}} = \frac{g \cdot x_m (l - x_m)}{2 \cdot h_m} \cdot \frac{h'_{m+1}}{\lambda_{m+1}} - \frac{g \cdot x_{m+1}(l - x_{m+1})}{2 \cdot \lambda_{m+1}}.$$

Die Gesamtspannkraft $V = V_{\min} + V_g$ (unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen einzusetzen).

Entsprechend wird $V_{\max}$ durch Belastung des links vom Schnittfeld gelegenen Teils gefunden, wobei die Momente M_m und M_{m+1} zweckmäßig von der rechten Seite aus zu berechnen sind, weil dort die wenigsten Kräfte wirken.

Sinngemäß berechne man auch $V_{\min}$ und $V_{\max}$ bei oben liegender Fahrbahn unter Benutzung der für diesen Fall geltenden Formel

$$V_m = \frac{M_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m} \quad \text{(vergl. Seite 111).}$$

β) Zeichnerisches Verfahren.

1. Berechnung von $D_{\max}$ (Abb. 181).

Es sei zunächst angenommen, daß die Voraussetzung für Grundstellung zutrifft, daß also bei der in Abb. 181 dargestellten Lastenstellung die Ungleichung $\sum_1^n P < P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'}$ zutrifft.

Die Lösung der Aufgabe führen wir mittels des Culmannschen Verfahrens durch.

Wir führen den Ritterschen Schnitt, ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte, so daß nach wie vor Gleichgewicht herrscht, und untersuchen den Gleichgewichtszustand des am wenigsten belasteten, also hier des links abgetrennten Teils. An diesem müssen sich O, $D_{\max}$, U und A das Gleichgewicht halten. Wir denken uns dann zwei von den unbekannten Stabkräften, z. B. O und $D_{\max}$, zu einer Mittelkraft L vereinigt, von der wir wissen, daß sie durch den Schnittpunkt von O und $D_{\max}$ gehen muß. Dann wirken am abgetrennten Teil nur noch drei Kräfte, nämlich A, L und U, die sich ebenfalls das Gleichgewicht halten müssen. Sind aber drei Kräfte miteinander im Gleichgewicht, so müssen sie sich in einem Punkte schneiden. Es muß also L sowohl durch den Schnittpunkt von O und $D_{\max}$ als auch durch den Schnittpunkt von U und A gehen, womit die Richtung von L

Abb. 181.

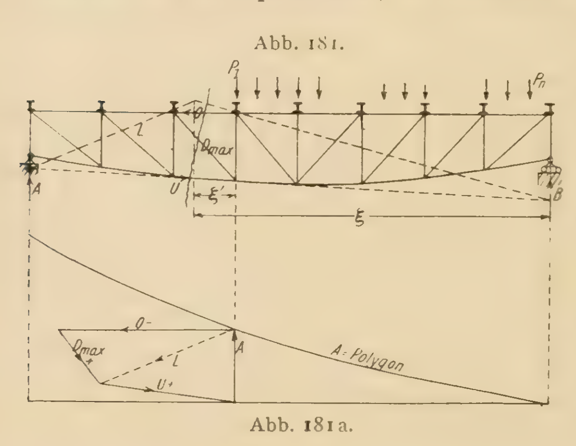


Abb. 181a.

bestimmt ist. Ihre Größe finden wir dann durch Zerlegung von A nach den Richtungen von L und U (Abb. 181 a). Da nun L die Mittelkraft von O und D_{max} ist, so finden wir die letzteren beiden Kräfte durch Zerlegung von L nach den Richtungen von O und D_{max}. Die Pfeile sind in dem Krafteck so anzusetzen, daß sie stetigen Umfahrungssinn haben, was ja Bedingung für das Gleichgewicht ist. Da der Pfeil von A bekannt ist, sind demgemäß auch die Pfeile von O, D_{max} und U bestimmt. A wird senkrecht unter der Last P_1 aus dem A-Polygon entnommen (vergl. Seite 73). Die Kräfte O, D_{max} und U sind dann in dem Kräftemaßstab abzugreifen, in dem das A-Polygon gezeichnet wurde. Die gleichzeitig mit D_{max} gefundenen Werte O und U sind für uns nicht brauchbar, da sie nur für einseitige Belastung gefunden sind, O und U aber ihre Größtwerte bei voller Belastung annehmen. Soll auch D_g zeichnerisch gefunden werden, so muß ein besonderer Cremonascher Kräfteplan für Eigengewicht gezeichnet werden, aus dem D_g entnommen werden kann.

Die Gesamtspannkraft D ist dann $= D_{max} + D_g$.

Im folgenden Beispiel soll D_{max} berechnet werden unter der Annahme, daß die Grundstellung überschritten wird. Es sei

$$\sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'} \quad \text{und} \quad \sum_1^n P < (P_1 + P_2)\,\frac{\xi}{\xi'},$$

so daß P_1 im Felde, P_2 über dem Querträger stehen muß (Abb. 182). P_1 sei durch seine Seitenkräfte $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ ersetzt. Nach Führung des Ritterschen Schnittes und Ersatz der vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte wirken am links abgetrennten Teil, dessen Gleichgewichtszustand untersucht werde, die gegebenen Kräfte A und $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ sowie die unbekannten Stabkräfte O, D_{max} und U. Nun kann man die Lage der Mittelkraft von A und $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ mittels eines Seilpolygons bestimmen und dann das vorhin beschriebene Verfahren anwenden (Abb. 182 a). Einfacher ist jedoch folgende Lösung: Wir zerlegen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils in zwei Einzelzustände, berechnen die Spannkräfte D für die Einzelzustände und setzen dann nach dem Prinzip der Summierung der Einzelwirkungen die Gesamtspannkraft $D =$ der Summe der Einzelspannkräfte. Die Auflösung in die Einzelzustände hat natürlich so zu erfolgen, daß ihre Summierung den wirklichen Zustand ergibt.

Abb. 182.

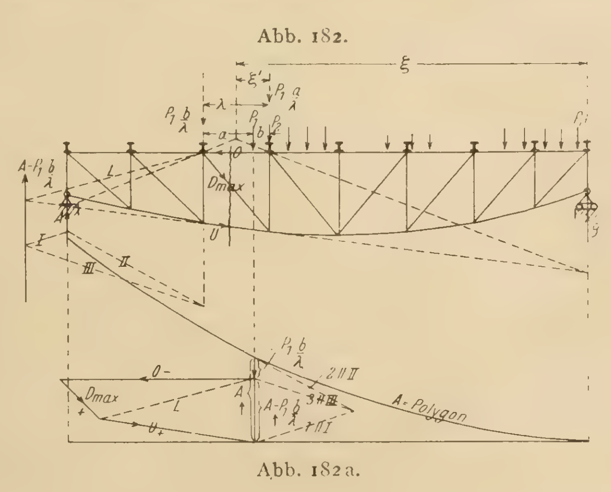


Abb. 182 a.

Zu dem Zweck denken wir uns das linke Auflager beseitigt und durch den Auflagerdruck A ersetzt (Abb. 183), wodurch am Gleichgewicht nichts geändert wird. Denken wir uns jetzt den rechts vom Schnittfeld gelegenen Balkenteil nach erlittener Formänderung festgehalten, so wird ebenfalls an dem Gleichgewichtszustand des Balkens nichts geändert. Der links vom Schnitt gelegene Balkenteil kann dann als ein Freiträger aufgefaßt werden, der durch die äußeren Kräfte A (nach oben wirkend) und $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ (nach unten wirkend) belastet und in dem festgehaltenen (durch Schraffur angedeuteten) rechten Teil eingespannt ist. Wir untersuchen nun den Einfluß der auf den Freiträger wirkenden äußeren Kräfte A und $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ getrennt voneinander.

Abb. 183.

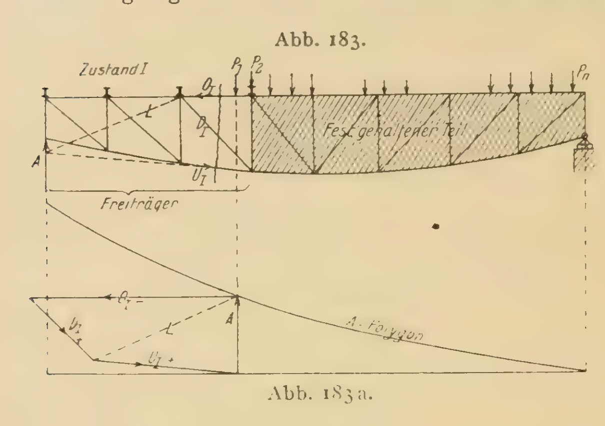


Abb. 183a.

Zustand I. Auf den Freiträger wirke nur die äußere Kraft A; $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ ist also $= 0$ angenommen.

Für diesen Zustand benutzen wir das für den Fall der Grundstellung beschriebene Verfahren, wobei der Auflagerdruck A senkrecht unter der ersten Last P_1 aus dem A-Polygon gefunden wird (Abb. 183a). Die nach diesem Verfahren ermittelte Diagonalspannkraft sei $= D_I$ (Zug).

Zustand II. Auf den Freiträger wirke als äußere Last nur $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$; A ist also $= 0$ angenommen (Abb. 184).

Für diesen Zustand zeichnen wir einen Cremonaschen Kräfteplan, der sich sehr einfach ergeben wird. Trennt man nämlich den Knoten a ab, so müssen, da an ihm keine Kraft wirkt, S_1 und $S_2 = 0$ werden. Denn zwei Kräfte, deren Richtungen einen Winkel miteinander bilden, können sich nicht das Gleichgewicht halten; sie haben ja eine Mittelkraft, und für Kräfte, die miteinander im Gleichgewicht sind, ist die Mittelkraft $= 0$. Folglich müssen S_1 und S_2 spannungslos werden. Trennt man dann den Knoten b ab, so finden wir dort die gleichen Verhältnisse, da ja die dort angreifende Kraft $S_1 = 0$ ist. Es werden also auch S_3 und $S_4 = 0$. Dasselbe finden wir an den Knotenpunkten c, d und e. Die spannungslos gewordenen Stäbe sind in Abb. 184 gestrichelt angedeutet. Trennt man jetzt den Knoten f ab, so haben wir den in Abb. 185 dargestellten Gleichgewichtszustand. Wir zerlegen daher die

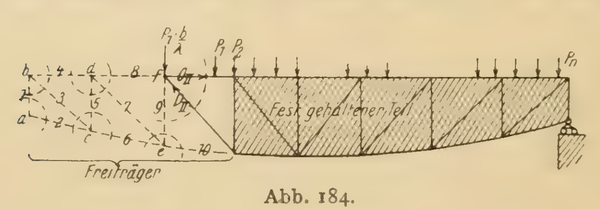


Abb. 184.

in f angreifende Kraft $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ nach den Richtungen O_{II} und D_{II} und setzen die Pfeile so an, daß stetiger Umfahrungssinn vorhanden ist (Abb. 185a). Überträgt man dann die in dem Kräftedreieck gefundenen Pfeile auf die entsprechenden Stäbe des abgetrennten Knotens, so erkennt man, daß O_{II} ein Zug und D_{II} ein Druck ist.

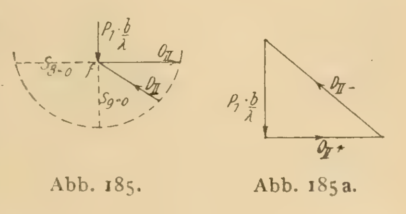


Abb. 185. Abb. 185a.

Nunmehr erhalten wir den wirklichen Zustand durch Summierung der Einzelzustände, denn dann wirken A und $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ auf den Freiträger, wie es in Wirklichkeit der Fall ist. Nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen ist sodann $\boldsymbol{D_{max} = + D_I - D_{II}}$.

2. Gesucht sei ferner D_{min} (Abb. 186).

Damit D_{min} entsteht, müssen die Lasten links vom Schnittfeld aufgestellt werden; ξ und ξ' sind daher die Abstände des Nullpunktes E vom linken Auflager bezw. linken Querträger.

Es sei $\quad \sum_1^n P > P_1 \cdot \frac{\xi}{\xi'}$ und $\sum_1^n P < (P_1 + P_2) \frac{\xi}{\xi'}$,

so daß P_1 im Felde, P_2 über dem Querträger stehen muß. P_1 wird ersetzt durch die Seitenkräfte $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$, so daß am rechts abgetrennten Teil B, $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$, O, D und U sich das Gleichgewicht halten müssen. Jetzt denken wir uns den linken (schraffierten) Teil nach der Formänderung des Balkens festgehalten, das rechte Auflager beseitigt und durch den Auflagerdruck B ersetzt. Dann kann der rechte Teil wieder als Freiträger aufgefaßt werden, auf den als äußere Kräfte B (nach oben) und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ (nach unten) wirken (Abb. 186a). Der Einfluß der auf den Freiträger wirkenden Kräfte werde wieder getrennt voneinander untersucht.

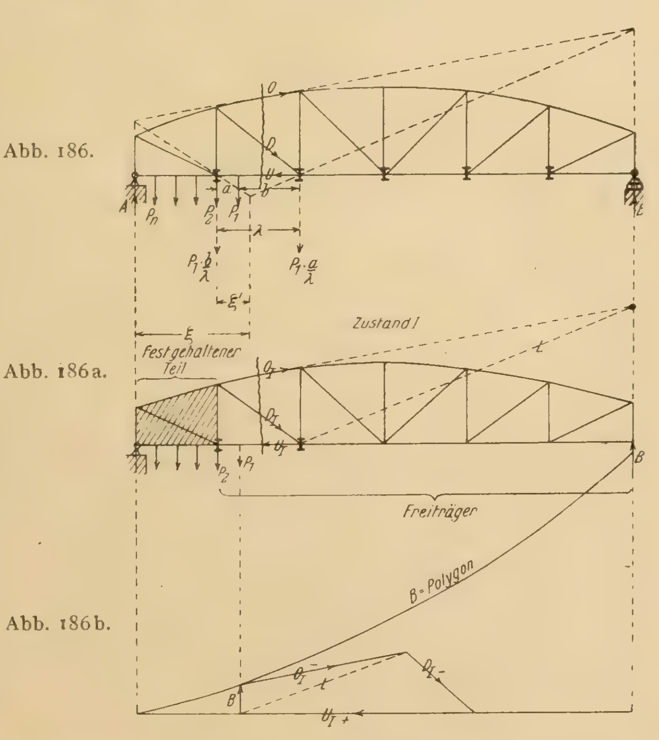


Abb. 186. Abb. 186a. Abb. 186b.

Zustand I. Auf den Freiträger wirke als äußere Kraft nur B; $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ sei $= 0$ angenommen (Abb. 186a).

Führt man dann den Ritterschen Schnitt durch die fragliche Diagonale, so müssen sich am rechts abgetrennten Teil die Kräfte B, O_I, D_I und U_I das Gleichgewicht halten. Denken wir uns zwei von den unbekannten Stabkräften, z. B. D_I und U_I, zu einer Mittelkraft L vereinigt, die durch den Schnittpunkt von D_I und U_I gehen muß, dann bleiben nur noch drei Kräfte, B, L und O_I übrig, die ebenfalls miteinander im Gleichgewicht sein, sich also in einem Punkt schneiden müssen, wodurch die Richtung von L bestimmt ist

Jetzt berechnen wir den Auflagerdruck B mit Hilfe des B-Polygons und zerlegen ihn nach den Richtungen von L und O_I, während L nach den Richtungen seiner Seitenkräfte U_I und D_I zerlegt wird. Die Pfeile an dem Krafteck sind so anzubringen, daß stetiger Umfahrungssinn entsteht, wie es für im Gleichgewicht befindliche Kräfte Bedingung ist. Überträgt man den für D_I gefundenen Pfeil auf den rechts abgetrennten Teil, so erkennt man, daß D_I eine Druckkraft ist.

Zustand II. Auf den Freiträger wirke nur $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ als äußere Kraft; B sei $= 0$ angenommen (Abb. 187).

Für diesen Zustand zeichnen wir einen Cremonaschen Kräfteplan, der sich, da die meisten Spannkräfte $S = 0$ werden, sehr einfach gestalten wird.

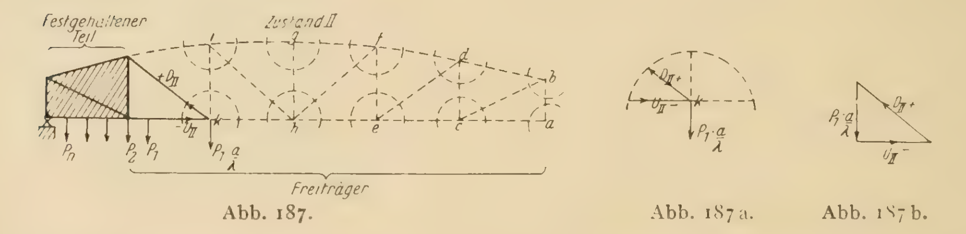


Abb. 187. Abb. 187a. Abb. 187b.

Trennt man nämlich den Knoten a ab, so müssen, da am Knoten a keine äußere Kraft wirkt, die beiden vom Schnitt getroffenen Stäbe S_1 und S_2 spannungslos werden. Das gleiche trifft dann der Reihe nach bei den Knoten b bis i zu. Erst am Knoten k werden dann vom Schnitt drei Kräfte, nämlich $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$, D_{II} und U_{II} abgetrennt (Abb. 187a), die sich das Gleichgewicht halten müssen. Es braucht dann also nur $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ nach den Richtungen U_{II} und D_{II} zerlegt zu werden (Abb. 187b).

Überträgt man die in dem Kräftedreieck angedeuteten Pfeile, deren Umfahrungssinn ein stetiger sein muß, auf die Stäbe des abgetrennten Knotens, so erkennt man, daß D_{II} eine Zugkraft wird.

Nunmehr nehmen wir an, Zustand I und Zustand II wirken gleichzeitig, wodurch man den wirklichen Zustand erhält, weil dann B und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ auf den Freiträger wirken, wie es in Wirklichkeit der Fall ist. Alsdann ist nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen $D_{min} = -D_I + D_{II}$.

D_g kann mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplans gefunden werden. Die Gesamtspannkraft D ist sodann $= D_g + D_{\min} = D_g - D_{\mathrm{I}} + D_{\mathrm{II}}$.

Sinngemäß verfährt man bei der Berechnung der Spannkraft in einer Vertikalen. Gesucht sei z. B. $V_{\max}$ (Abb. 188), für welches die Verkehrslasten links vom Schnittfeld aufgestellt werden müssen. Mit Hilfe des Kriteriums der ungünstigsten Lastenstellung möge festgestellt sein, daß P_1 im Schnittfeld, P_2 über dem Querträger stehen muß, so daß nach Ersatz von P_1

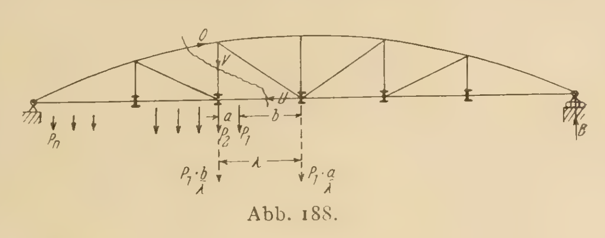


Abb. 188.

durch die Seitenkräfte $P_1 \cdot \frac{b}{\lambda}$ und $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ sich am rechts abgetrennten Teil, dessen Gleichgewichtszustand wir zweckmäßig untersuchen, die Kräfte B, $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$, O, V und U das Gleichgewicht halten müssen. Wir benutzen zur Berechnung von $V_{\max}$ wieder das Prinzip von der Summierung der Einzelwirkungen, lösen also den wirklichen Zustand in zwei Einzelzustände auf.

Zustand I. Auf den Freiträger wirke als äußere Last nur B; $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ sei $= 0$ angenommen (Abb. 189).

Dann müssen die Kräfte B, O_{I}, V_{I} und U_{I} miteinander im Gleichgewicht sein. Ersetzen wir O_{I} und V_{I} durch ihre Mittelkraft L, die durch den Schnittpunkt von O_{I} und V_{I} gehen muß, so müssen sich L, U_{I} und B in einem Punkt schneiden, wodurch die Richtung von L bestimmt ist. Dann wird das aus dem B-Polygon senkrecht unter P_1 ermittelte B nach L und U_{I} zerlegt und L nach O_{I} und V_{I}, wobei sich V_{I} als Zug ergibt, wie durch Übertragung des durch die Bedingung des stetigen Umfahrungssinns für V_{I} gefundenen Pfeils erkannt wird.

Abb. 189.

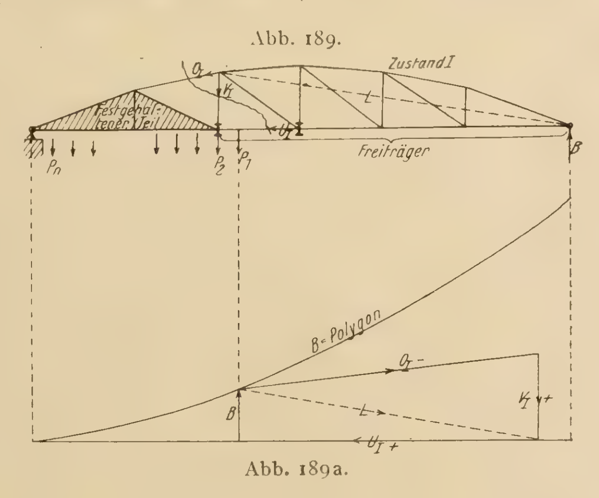


Abb. 189a.

Zustand II. Auf den Freiträger wirke nur $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ als äußere Kraft; B sei $= 0$ angenommen (Abb. 190).

Der für diesen Zustand gezeichnete Cremonaplan nimmt dann die in Abb. 190a dargestellte einfache Gestalt an, wie leicht nachgeprüft werden kann. (Man beachte, daß die gestrichelt gezeichneten Stäbe spannungslos

werden, zerlege dann am Knoten g die dort wirkende Kraft $P_1 \cdot \frac{a}{\lambda}$ nach D_{II} und U_{II} und am Knoten h die nunmehr gegebene Kraft D_{II} nach O_{II} und V_{II},

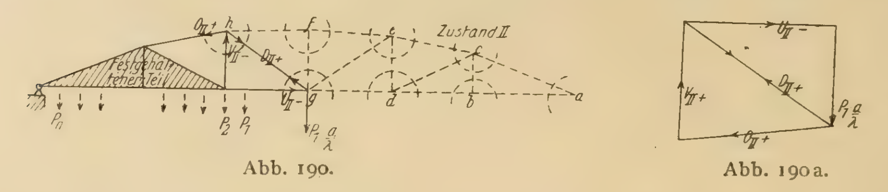


Abb. 190. Abb. 190a.

wobei sich V_{II} als Druckkraft ergibt.) Addiert man jetzt die Zustände I und II, so erhält man den wirklichen Zustand, und nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen wird

$$V_{max} = + V_I - V_{II}.$$

V_g wird wieder mittels besonderen Cremonaplans ermittelt.

D. Einfluß gleichmäßig verteilter Verkehrsbelastung p je Längeneinheit.

Gesucht sei D_{max} (Abb. 191). Genau genommen müßte die Verkehrslast bis an den Nullpunkt der Einflußlinie geschoben werden. Man erhält aber nahezu dasselbe Ergebnis, wenn man Grundstellung annimmt und am Kopf der Verkehrslast eine Einzellast $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ anbringt (vergl. Seite 103 u. 104). Sodann berechnen wir D_{max} mit Hilfe der Formel

$$D_{max} = \frac{1}{\cos \varphi_m} \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right).$$

Abb. 191.

Abb. 191a.

Hierin ist

$$M_m = A \cdot x_m \text{ und}$$
$$M_{m-1} = A \cdot x_{m-1}.$$

Durch eine Momentengleichung für das rechte Auflager findet man

$$A = \frac{p\,(l - x_m)\,\frac{l - x_m}{2}}{l} + \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{l - x_m}{l}$$
$$= \frac{p}{2\,l}\,(l - x_m)\,[l - x_m + \lambda]$$
$$= \frac{p}{2\,l}\,(l - x_m)\,(l - x_{m-1});$$

daher
$$D_m = \frac{p\,(l - x_m)\,(l - x_{m-1})}{2\,l \cdot \cos \varphi_m} \left(\frac{x_m}{h_m} - \frac{x_{m-1}}{h_{m-1}} \right).$$

Zeichnerisch wird D_{max} mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens gefunden. Nach Führung des Ritterschen Schnittes und Ersatz der vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte müssen sich am links abgetrennten

Teil A, O, D_{max} und U das Gleichgewicht halten. O und D_{max} denken wir uns durch ihre Mittelkraft L ersetzt, die durch den Schnittpunkt von O und D_{max} gehen und sich mit A und U in einem Punkte schneiden muß, wodurch die Richtung von L bestimmt ist. Dann entnehmen wir A infolge p/lfd. m senkrecht unter dem Kopf der Belastung der A-Parabel (Abb. 191 a, vergl. auch Seite 80, Abb. 105). A infolge $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ ist $= \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{l - x_m}{l}$. Trägt man unter dem Auflager A die Strecke $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ auf (in dem Maßstabe, in dem die A-Parabel gezeichnet ist) und zeichnet das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ und l, so gilt die Proportion $\frac{\eta}{\frac{p \cdot \lambda}{2}} = \frac{l - x_m}{l}$, folglich $\eta = \frac{p \cdot \lambda}{2} \cdot \frac{l - x_m}{l} = A$ infolge $\frac{p \cdot \lambda}{2}$.

Das gesamte A ist sodann $= A$ infolge $p + A$ infolge $\frac{p \cdot \lambda}{2}$. Nunmehr wird A nach L und U und L nach O und D_{max} zerlegt. Die Pfeile des Kraftecks müssen stetigen Umfahrungssinn haben. Überträgt man die Pfeile auf die Stäbe des links abgetrennten Teils, so findet man, daß D_{max} eine Zugkraft wird, wie es ja bei der gewählten Lastenstellung auch sein muß. Die gleichzeitig gefundenen Werte O und U sind für uns nicht brauchbar, da es keine Größtwerte sind; denn diese treten nur bei voller Belastung auf. Die Spannkräfte infolge Eigengewichts g/lfd. m werden entweder rechnerisch mit Hilfe der allgemeinen, für die Stabkräfte geltenden Formeln oder zeichnerisch mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplans ermittelt.

Bei Berechnung der Spannkräfte in der Vertikalen verfahre man sinngemäß. Sie bereitet nach dem Vorangegangenen keinerlei Schwierigkeit.

E. Einfluß beliebig schräg gerichteter Kräfte.

1. Spannkräfte in den Gurtstäben (Abb. 192).

Die in § 7, 3, A, 1 (Seite 109 u. ff.) entwickelten Formeln für die Gurtspannkräfte gelten nicht nur für senkrechte, sondern auch für beliebig gerichtete äußere Kräfte. Im letzteren Falle empfiehlt es sich jedoch, durch den Zeiger o oder u anzudeuten, zu welcher Gurtung der Knotenpunkt, auf den sich das Moment bezieht, gehört.

Führt man den Schnitt I—I und benutzt für den links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt m der oberen Gurtung, so erhält man unter der Annahme, daß das Moment M_m^o der äußeren Kräfte rechtsdrehend ist,

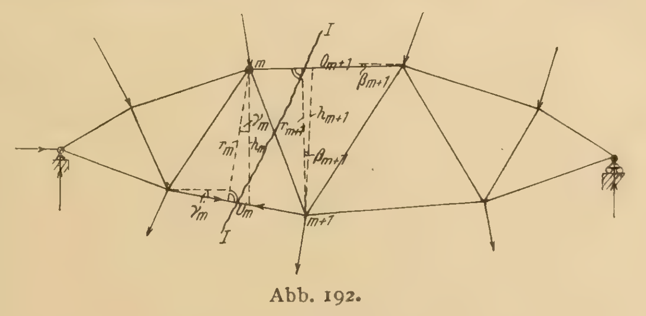


Abb. 192.

$$U_m \cdot r_m - M_m^o = 0; \quad U_m = + \frac{M_m^o}{r_m}.$$

Da $r_m = h_m \cdot \cos\gamma_m$, so kann man auch setzen

$$U_m \cdot \cos\gamma_m = + \frac{M_m^o}{h_m}.$$

Sinngemäß erhält man für einen Obergurtstab

$$O_{m-1} = - \frac{M_{m+1}^u}{r_{m+1}} \text{ bezw. } O_{m+1} \cdot \cos\beta_{m-1} = - \frac{M_{m+1}^u}{h_{m+1}}.$$

2. Spannkräfte in den Füllungsstäben.

a) Spannkräfte in den Diagonalen (Abb. 193).

Die Ableitung der Formel

$$D_m \cdot \cos\varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ (vergl. § 7, 3, A, 1, Seite 110)}$$

war mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma H = 0$ erfolgt, wobei am abgetrennten Teil nur senkrechte äußere Kräfte wirkten. Die Formel ist hier also nicht anwendbar, da die dort gemachte Voraussetzung nicht mehr zutrifft.

Wir führen den Schnitt I—I, untersuchen den Gleichgewichtszustand des links abgetrennten Teils und benutzen eine Momentengleichung in bezug auf den Punkt $(m-1)_u$, den Schnittpunkt der Senkrechten durch $(m-1)_o$ mit U_{m-1}. Die vom Schnitt I—I getroffenen Stäbe O_m und D_m zerlegen wir je in

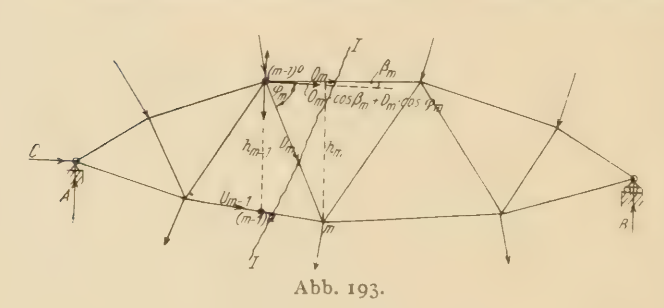


Abb. 193.

eine wagerechte Seitenkraft $O_m \cdot \cos\beta_m$ und $D_m \cdot \cos\varphi_m$ und in eine senkrechte Seitenkraft $O_m \cdot \sin\beta_m$ und $D_m \cdot \sin\varphi_m$. Das Moment der äußeren am links abgetrennten Teil wirkenden Kräfte in bezug auf den Punkt $(m-1)_u$ sei $= M_{(m-1)}^u$ und sei rechtsdrehend. Alsdann lautet die Momentengleichung für den Punkt $(m-1)_u$

$$O_m \cdot \cos\beta_m \cdot h_{m-1} + D_m \cdot \cos\varphi_m \cdot h_{m-1} + M_{m-1}^u = 0.$$

Mit

$$O_m \cdot \cos\beta_m = - \frac{M_m^u}{h_m}$$

wird alsdann

$$D_m \cdot \cos\varphi_m = \frac{M_m^u}{h_m} - \frac{M_{m-1}^u}{h_{m-1}}.$$

Bei senkrechten äußeren Kräften war das Ergebnis

$$D_m \cdot \cos\varphi_m = \frac{\text{Fußmoment}}{h_m} - \frac{\text{Kopfmoment}}{h_{m-1}} = \frac{M_m^u}{h_m} - \frac{M_{m-1}^o}{h_{m-1}}.$$

Da für senkrechte Lasten $M_{m-1}^o = M_{m-1}^u$, so gilt die Formel

$$D_m \cdot \cos\varphi_m = \frac{M_m^u}{h_m} - \frac{M_{m-1}^u}{h_{m-1}}$$

ganz allgemein für beliebig gerichtete Kräfte.

b) Spannkräfte in den Vertikalen (Abb. 194).

Wir führen den Schnitt I—I und setzen am links abgetrennten Teil die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an. Bezeichnet man die Summe der senkrechten Seitenkräfte der links vom Schnitt I—I wirkenden äußeren Kräfte mit Q (Querkraft), so folgt die Gleichung

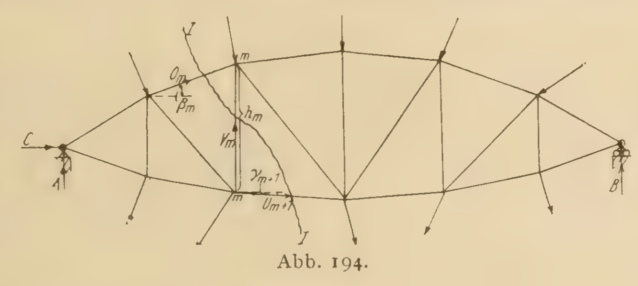


Abb. 194.

$$V_m + O_m \cdot \sin \beta_m - U_{m+1} \cdot \sin \gamma_{m+1} + Q = 0.$$

$$V_m = - O_m \cdot \cos \beta_m \cdot \frac{\sin \beta_m}{\cos \beta_m} + U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1} \cdot \frac{\sin \gamma_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} - Q.$$

Mit $O_m \cdot \cos \beta_m = - \frac{M_m^u}{h_m}$, $U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1} = + \frac{M_m^o}{h_m}$, $\frac{\sin \beta_m}{\cos \beta_m} = \operatorname{tg} \beta_m$

und $\frac{\sin \gamma_{m+1}}{\cos \gamma_{m+1}} = \operatorname{tg} \gamma_{m+1}$

erhält man

$$V_m = \frac{M_m^u}{h_m} \cdot \operatorname{tg} \beta_m + \frac{M_m^o}{h_m} \cdot \operatorname{tg} \gamma_{m+1} - Q.$$

4. Einige Fachwerkbalken besonderer Art.

1. Der Parabelträger.

Darunter ist ein Träger zu verstehen, bei dem die Knotenpunkte der einen Gurtung auf einer Geraden oder auf irgend einer Kurve zweiter Ordnung, die Knotenpunkte der anderen Gurtung auf einer Parabel liegen (Abb. 195).

Die Gleichung der Parabel lautet

$$h_m = \frac{4f}{l^2} \cdot x_m \cdot x'_m \quad \text{(vergl. Seite 66).}$$

Ein derartiger Parabelträger weist folgende Eigentümlichkeiten auf:

a) Bei gleichmäßig verteilter voller Belastung wachsen die Spannkräfte in den Stäben der gekrümmten Gurtungen von der Mitte nach den Auflagern zu an.

(Im Gegensatz zu einem Balken mit beliebig geformter Gurtung, wo die Gurtspannkräfte nach der Mitte zu größer werden.)

Beweis:

$$O_m \cdot \cos \beta_m = - \frac{M_m}{h_m}.$$

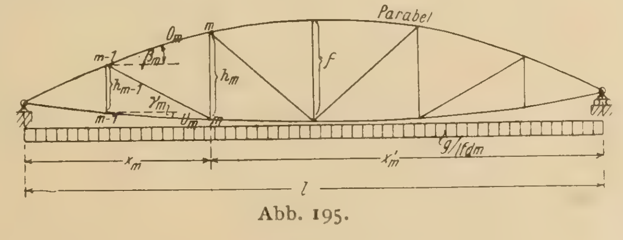


Abb. 195.

$$M_m = \frac{g \cdot x_m \cdot x'_m}{2}, \text{ ferner } h_m = \frac{4f}{l^2} \cdot x_m \cdot x'_m.$$

Folglich $$\frac{M_m}{h_m} = \frac{g \cdot x_m \cdot x'_m}{\frac{8f}{l^2} \cdot x_m \cdot x'_m} = \frac{g l^2}{8f} = \text{Const.},$$

so daß $$O_m \cdot \cos \beta_m = -\frac{g l^2}{8f} = \text{Const.}$$

Die wagerechten Seitenkräfte aller Obergurtspannkräfte sind daher gleich groß. Allgemein ist daher $O = \frac{\text{Const.}}{\cos \beta}$. Da nun der Winkel β nach den Auflagern zu größer, mithin $\cos \beta$ kleiner wird, so wird O nach den Auflagern zu größer. Ebenso ist

$$U \cdot \cos \gamma = + \frac{M}{h} = \frac{g l^2}{8f} = \text{Const.},$$

daher $U = \frac{\text{Const.}}{\cos \gamma}$. Für die Untergurtspannkräfte gilt daher dasselbe wie für die Obergurtspannkräfte. Bei wagerechtem Untergurt ist

$$U = + \frac{M}{h} = \frac{g l^2}{8f} = \text{Const.}$$

In der wagerechten Gurtung sind daher sämtliche Spannkräfte gleich groß.

b) Bei gleichmäßig verteilter voller Belastung sind die Diagonalen spannungslos.

Beweis: $$D_m \cdot \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}}$$

$$M_m = \frac{g \cdot x_m \cdot x'_m}{2}; \quad M_{m-1} = \frac{g \cdot x_{m-1} \cdot x'_{m-1}}{2}.$$

$$h_m = \frac{4f}{l^2} \cdot x_m \cdot x'_m; \quad h_{m-1} = \frac{4f}{l^2} \cdot x_{m-1} \cdot x'_{m-1}$$

$$\frac{M_m}{h_m} = \frac{g \cdot x_m \cdot x'_m}{2 \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x_m \cdot x'_m} = \frac{g l^2}{8f}; \quad \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{g \cdot x_{m-1} \cdot x'_{m-1}}{2 \cdot \frac{4f}{l^2} \cdot x_{m-1} \cdot x'_{m-1}} = \frac{g l^2}{8f}.$$

$$D_m \cdot \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{g l^2}{8f} - \frac{g l^2}{8f} = 0.$$

Da $\cos \varphi_m$ nicht $= 0$ werden kann (φ ist ja immer ein spitzer Winkel), muß $D_m = 0$ werden.

Die unter 1 und 2 erwähnten Eigentümlichkeiten treffen z. B. bei Belastung des Balkens mit Eigengewicht zu, das man genau genug als gleichmäßig verteilte Belastung auffassen darf. Die Spannkräfte infolge der Verkehrslast sind dann wie bei jedem anderen Balken mit gebrochener Gurtung zu berechnen, d. h. wie unter § 7, 3, C, 1 und 2 auf Seite 118 u. ff. beschrieben wurde.

2. Der Pauliträger (Abb. 196).

Darunter ist ein Balken zu verstehen, dessen Obergurtstäbe derart geneigt sind, daß sie bei voller Belastung infolge Eigengewichts und Verkehrslast sämtlich die gleiche Spannkraft erhalten. Es muß also sein $O_1 = O_2 = O_3 = \ldots$

Da $\quad O_1 = -\frac{M_1}{r_1}, \; O_2 = -\frac{M_2}{r_2}, \; O_3 = -\frac{M_3}{r_3}$ usw.,

so besteht die Proportion

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2} = \frac{M_3}{r_3} = \ldots$$

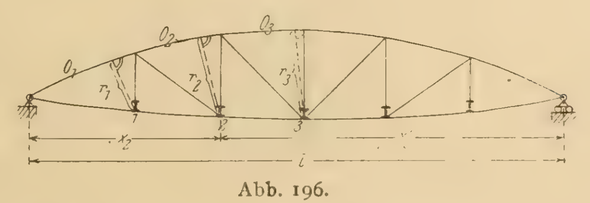


Abb. 196.

Man wählt nun den mittelsten Hebelarm, in diesem Fall also $r_3 = \frac{1}{8} \cdot l$ (ein für Fachwerkbalken übliches Maß) und findet aus der Proportion

$$\frac{M_2}{r_2} = \frac{M_3}{r_3} \text{ den Hebelarm } r_2 = \frac{M_2}{M_3} \cdot r_3 .$$

Aus $\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2}$ berechnet man sodann

$$r_1 = \frac{M_1}{M_2} \cdot r_2 = \frac{M_1}{M_3} \cdot r_3 .$$

Hierin ist $\quad M_1 = M_1^g + M_1^P; \; M_2 = M_2^g + M_2^P; \; M_3 = M_3^g + M_3^P$.
Die Momente M^P sind nach einem der unter § 6, 2, c beschriebenen Verfahren zu berechnen. $M_g = \frac{g \cdot x \cdot x'}{2}$.

Die Konstruktion des Paulirägers kann demgemäß folgendermaßen durchgeführt werden (Abb. 197): Man wähle die Form des Untergurts und die Feldweiten, also die Knotenpunkte 1, 2, 3 .... beliebig, ziehe ferner die Senkrechten durch 1, 2, 3 .... und beschreibe um 1, 2, 3 .... mit den errechneten Radien r_1, r_2, r_3 .... Kreisbogen. Vom Punkte o aus ziehe man sodann die Tangente an den Kreisbogen mit dem Radius r_1 bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch 1 im Punkte 1'. Von 1' aus wird dann die Tangente an den Kreisbogen mit dem Radius r_2 gezogen bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch 2 in 2', von 2' aus die Tangente an den Kreisbogen mit dem Radius r_3 bis zum Schnitt mit der Senkrechten durch 3 im Punkte 3' usw. bis zur Mitte. Die andere Hälfte wird dann symmetrisch geformt. Dann ist offenbar

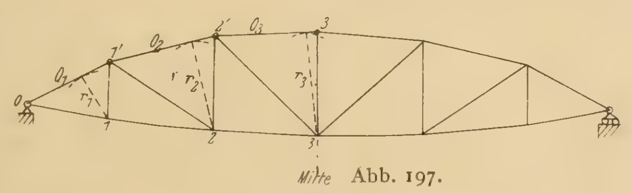


Abb. 197.

$$O_1 = O_2 = O_3 = \ldots . = -\frac{M_1}{r_1} = -\frac{M_2}{r_2} = -\frac{M_3}{r_3} = \ldots .$$

3. Der Schwedlerträger.

Schwedler schlug zum ersten Male vor, den Diagonalen eine derartige Neigung zu geben, daß sie, gleichgültig von welcher Seite aus der Lastenzug auch vorfährt, nur auf Zug beansprucht werden können. Der Vorzug dieser Anordnung liegt darin, daß die Diagonalen dann nur auf Zug, nicht mehr auf

Knicken berechnet zu werden brauchen, was, vor allen Dingen bei langen Diagonalen, häufig eine erhebliche Materialersparnis bedeutet.

Es muß also für diejenige Lastenstellung, die bei einem gewöhnlichen Fachwerkbalken Druck in der Diagonalen D_m hervorbringen würde, d. h. für einen von links nach rechts fahrenden Lastenzug gelten

$$D_m \cdot \cos \varphi_m = \frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \geq 0 \text{ (Abb. 198).}$$

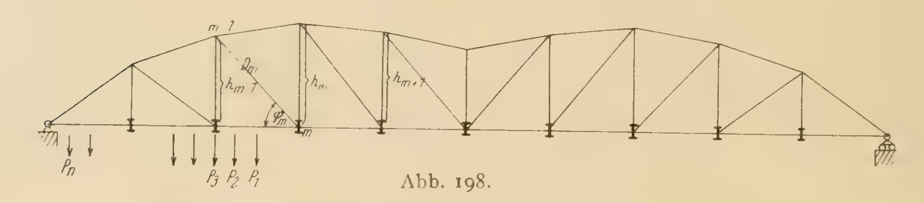


Abb. 198.

(Für einen von rechts nach links fahrenden Lastenzug würde ja an und für sich schon $D \cdot \cos \varphi > 0$ werden, da Lasten rechts vom Schnittfeld Zug in der Diagonalen hervorbringen.) Es besteht daher die Proportion

$$\frac{M_{m-1}}{M_m} = \frac{h_{m-1}}{h_m}.$$

Diese Proportion ist für jede Diagonale unter Zugrundelegung der entsprechenden Drucklastenstellung aufzustellen. Verfügt man dann über eine Höhe h, so können alle übrigen mit Hilfe der aufgestellten Proportionen berechnet werden. Man erhält so die in Abb. 198 dargestellte Obergurtform, die man wegen ihres unschönen Aussehens nicht beibehalten kann. Man ordnet

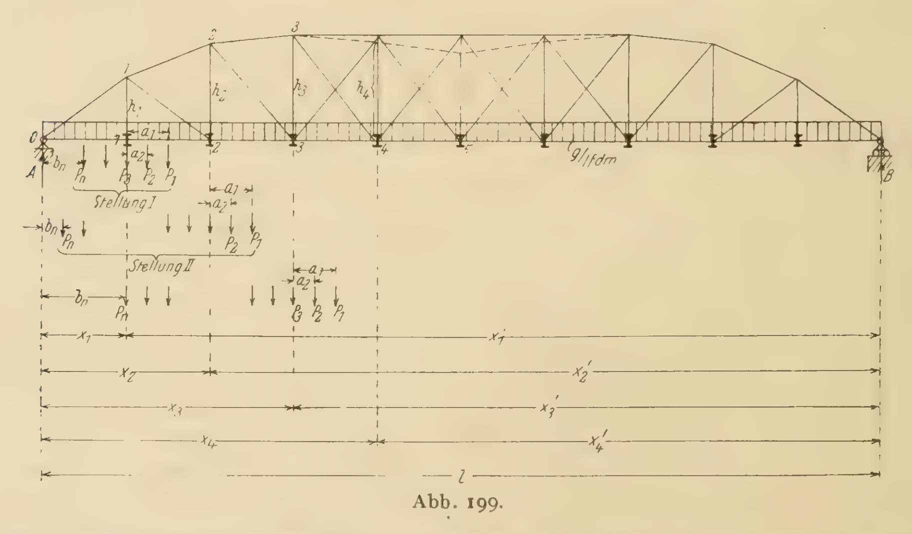


Abb. 199.

daher von dem Punkte an, wo der Obergurt nach unten absteigt, einen Parallelträger an (Abb. 199), dessen Höhe etwa $= \frac{1}{8}\, l$ gewählt wird. Da innerhalb des Parallelträgers die Höhen h nicht mehr derart berechnet sind, daß die Diagonalen nur auf Zug beansprucht werden, müssen entweder knicksichere

oder bei Verwendung von zugfesten Diagonalen (z. B. Flacheisen) Gegendiagonalen verwendet werden. Im letzteren Falle wird die eine Diagonale, sobald sie auf Druck beansprucht wird, spannungslos, während die andere eine Zugspannung erhält. (Man erkennt die Wirkungsweise am besten, wenn man sich die Diagonalen durch Fäden ersetzt denkt. Erhält der eine Faden Druck, so wird er spannungslos, während gleichzeitig der andere Faden gespannt wird.) Die Stelle, wo der Obergurt nach unten absteigt, liegt dort, wo $h_m > h_{m+1}$ (Abb. 198), d. h. wo $\frac{h_m}{h_{m+1}} > 1$ wird. Da nun $\frac{h_m}{h_{m+1}} = \frac{M_m}{M_{m+1}}$, so erkennt man, daß der Parallelträger an dem Punkte beginnen muß, wo $\frac{M_m}{M_{m+1}} > 1$ wird.

Nachfolgend sei der Gang der Berechnung der Höhen h an einigen Beispielen gezeigt. Es liege

a) eine Eisenbahnbrücke vor (Abb. 199).

Zunächst kommt es darauf an, die Stelle zu finden, wo der Obergurt nach unten absteigt. Wie vorhin gezeigt, tritt das dort ein, wo $\frac{M_m}{M_{m+1}} > 1$. Wir bilden daher für eine Reihe von Lastenstellungen die Verhältnisse zweier aufeinander folgender Momente, bis sich ein Wert $\frac{M_m}{M_{m+1}}$ ergibt, der größer als 1 wird.

Wir beginnen mit der Lastenstellung I. Zur Sicherheit empfiehlt es sich bei großen Feldweiten, zwei Lasten in das Feld zu stellen. Bei kleineren Feldweiten kann man sich mit der Grundstellung begnügen, wobei man die erste Last um etwa 2 bis 3 t schwerer annimmt.

Dann wird

$$M_1 = M_1^P + M_1^g = B_P^{\mathrm{I}} \cdot x_1' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_1 x_1'}{2}$$

$$M_2 = M_2^P + M_2^g = B_P^{\mathrm{I}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 x_2'}{2}.$$

B_P^{I} ist der Auflagerdruck B infolge der Verkehrslasten in der Stellung I $= \frac{\mathfrak{P}_n \cdot b_n + \mathfrak{S}_n}{l}$, $\frac{g \cdot x_1 x_1'}{2}$ und $\frac{g \cdot x_2 x_2'}{2}$ sind die Momente M_g infolge Eigengewichts.

Jetzt bilden wir

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{B_P^{\mathrm{I}} \cdot x_1' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_1 x_1'}{2}}{B_P^{\mathrm{I}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 x_2'}{2}}$$

Zur Abkürzung sei dieser Zahlenwert $= \alpha$ gesetzt und es sei angenommen, daß er sich kleiner als 1 ergeben hat.

Darauf berechnen wir für die Lastenstellung II

$$M_2 = B_P^{\mathrm{II}} \cdot x_2' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_2 x_2'}{2}$$

$$M_3 = B_P^{II} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 x_3'}{2}.$$

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{B_P^{II} \cdot x_2' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_2 x_2'}{2}}{B_P^{II} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 x_3'}{2}} = \beta.$$

Es werde angenommen, daß sich auch $\beta < 1$ ergeben hat.

Nunmehr ermitteln wir für die Lastenstellung III

$$M_3 = B_P^{III} \cdot x_3' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_3 x_3'}{2}$$

$$M_4 = B_P^{III} \cdot x_4' + \frac{g \cdot x_4 x_4'}{2}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = \frac{B_P^{III} \cdot x_3' - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + \frac{g \cdot x_3 x_3'}{2}}{B_P^{III} \cdot x_4' + \frac{g \cdot x_4 x_4'}{2}} = \gamma.$$

$\frac{M_3}{M_4} = \gamma$ möge sich nun > 1 ergeben haben.

Da $\frac{M_3}{M_4} = \frac{h_3}{h_4}$, so ist auch $\frac{h_3}{h_4} > 1$, also $h_3 > h_4$.

Im oberen Punkte 3 würde also der Abstieg des Obergurts beginnen. Hier muß daher der Parallelträger eingeschoben werden, dessen Höhe $h_3 = \frac{1}{8} l$ gewählt wird.

Da nun $\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} = \beta$, so wird $h_2 = h_3 \cdot \beta = \frac{l}{8} \cdot \beta$.

Da ferner $\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} = \alpha$, so ist $h_1 = h_2 \cdot \alpha = \frac{l}{8} \cdot \beta \cdot \alpha$.

Die andere Hälfte des Schwedlerträgers wird dann symmetrisch geformt.

Bezüglich der Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte gilt dann das unter § 7, 3, C Gesagte.

b) Es liege eine Straßenbrücke vor (Abb. 200).

Die Verkehrslast betrage p/lfd. m, das Eigengewicht g/lfd. m.

Auch hier bilden wir für eine Reihe von Lastenstellungen (wobei wieder nur die Drucklastenstellungen in Frage kommen) die Verhältnisse $\frac{M_m}{M_{m+1}}$ und ordnen von dem Punkt an, wo $\frac{M_m}{M_{m+1}} > 1$ wird, einen Parallelträger an. Als ungünstigste Lastenstellung benutzen wir die Grundstellung, wobei an dem Kopf der Verkehrslast noch eine Einzellast von der Größe $\frac{p \cdot \lambda}{2}$ wirkt (vergl. auch Seite 138).

Lastenstellung I:

$$M_1 = B_p^{\mathrm{I}} \cdot x_1' + \frac{g \cdot x_1 \, x_1'}{2}; \quad M_2 = B_p^{\mathrm{I}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 \, x_2'}{2}$$

$$B_p^{\mathrm{I}} = \frac{p \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2}}{l} + \frac{p \, \lambda_2}{2} \cdot \frac{x_1}{l}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{B_p^{\mathrm{I}} \cdot x_1' + \frac{g \cdot x_1 \, x_1'}{2}}{B_p^{\mathrm{I}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 \, x_2'}{2}} = \alpha; \quad \alpha \text{ sei} < 1.$$

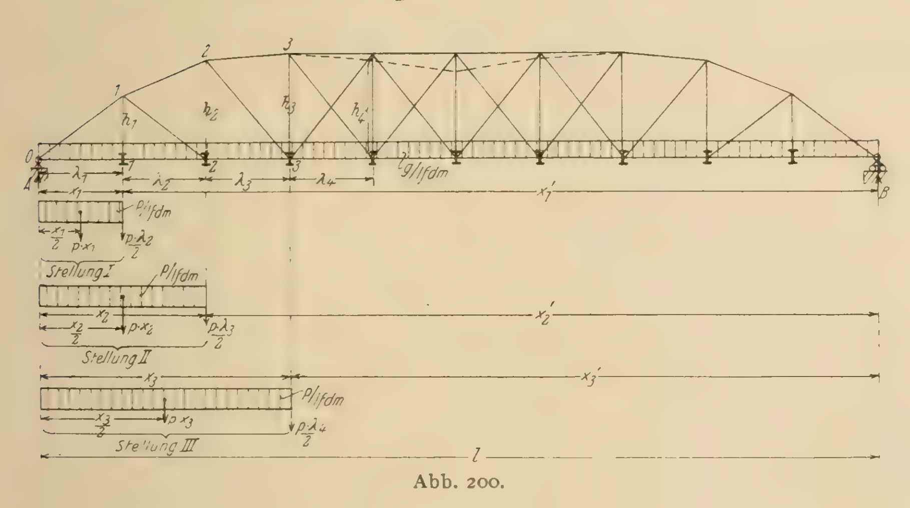


Abb. 200.

Lastenstellung II:

$$M_2 = B_p^{\mathrm{II}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 \, x_2'}{2}; \quad M_3 = B_p^{\mathrm{II}} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 \, x_3'}{2}$$

$$B_p^{\mathrm{II}} = \frac{p \cdot x_2^2}{2\,l} + \frac{p \, \lambda_3}{2} \cdot \frac{x_2}{l}$$

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{B_p^{\mathrm{II}} \cdot x_2' + \frac{g \cdot x_2 \, x_2'}{2}}{B_p^{\mathrm{II}} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 \, x_3'}{2}} = \beta; \quad \beta \text{ sei} < 1.$$

Lastenstellung III:

$$M_3 = B_p^{\mathrm{III}} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 \, x_3'}{2}; \quad M_4 = B_p^{\mathrm{III}} \cdot x_4' + \frac{g \cdot x_4 \, x_4'}{2}$$

$$B_p^{\mathrm{III}} = \frac{p \cdot x_3^2}{2\,l} + \frac{p \, \lambda_4}{2} \cdot \frac{x_3}{l}$$

$$\frac{M_3}{M_4} = \frac{B_p^{\mathrm{III}} \cdot x_3' + \frac{g \cdot x_3 \, x_3'}{2}}{B_p^{\mathrm{III}} \cdot x_4' + \frac{g \cdot x_4 \, x_4'}{2}} = \gamma; \quad \gamma \text{ ergebe sich nun} > 1.$$

Es ist also $\frac{M_3}{M_4} = \frac{h_3}{h_4} > 1$, folglich $h_3 > h_4$, so daß vom oberen Punkte 3 an der Obergurt nach unten absteigen würde. Von 3 an wird daher der Parallelträger eingeschoben und die Höhe h_3 des Parallelträgers, etwa $= \frac{1}{8} l$ gewählt.

Da nun $\frac{h_2}{h_3} = \frac{M_2}{M_3} = \beta$, so wird $h_2 = \beta \cdot h_3 = \beta \cdot \frac{l}{8}$.

Da ferner $\frac{h_1}{h_2} = \frac{M_1}{M_2} = \alpha$, so wird $h_1 = h_2 \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta \cdot \frac{l}{8}$.

Die rechte Hälfte des Schwedlerträgers wird dann symmetrisch ausgebildet

Bezüglich der Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte gilt dann das unter § 7, 3, D Gesagte.

4. Der Fachwerkbalken mit Zwischenteilung (Abb. 201).[1])

Die Zwischenteilung, die bei großen Feldweiten empfehlenswert ist, soll in erster Linie die Knicklänge der Obergurt- und Diagonalstäbe verringern und außerdem die Spannweite der zwischen den Querträgern gelagerten Längsträger verkleinern, wodurch sich häufig eine nicht unerhebliche Gewichtsersparnis erzielen läßt.

Der Balken setzt sich zusammen aus dem durch kräftige Linien an-

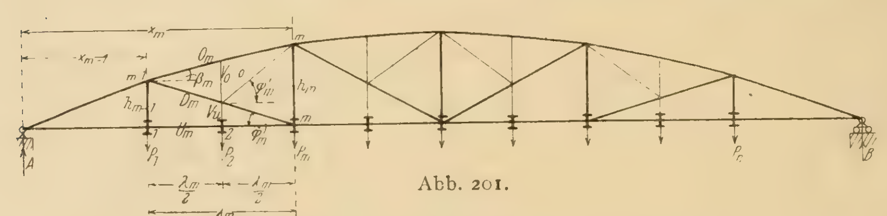


Abb. 201.

Abb. 201 a.

gedeuteten Hauptsystem und dem durch die schwächeren Linien dargestellten Zwischensystem. Die Berechnung der Stabspannkräfte des Hauptsystems erfolgt nach dem allgemeinen, im § 7, 3, A bis D angegebenen Verfahren. So ist z B. für die in Abb. 201 dargestellte Belastung

$$O_m = -\frac{M_m}{h_m \cdot \cos \beta_m} = -\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - P_2 \cdot \frac{\lambda_m}{2}}{h_m \cdot \cos \beta_m}$$

$$D_m = \frac{1}{\cos \varphi_m} \left(\frac{M_m}{h_m} - \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi_m} \left(\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - P_2 \cdot \frac{\lambda_m}{2}}{h_m} - \frac{A \cdot x_{m-1}}{h_{m-1}} \right)$$

$$U_m = + \frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} \text{ usw.}$$

---

[1]) Entwurf von Müller-Breslau für eine Wolgabrücke bei Kasan. Vergl. auch Müller-Breslau, Graphische Statik, 5. Aufl., Bd. I, Seite 362 u. f.

Dazu treten dann noch die Spannkräfte O'_m und D'_m in den Stäben des Zwischensystems (Abb. 201 a), das für sich als ein Balken auf zwei Stützen von der Spannweite λ aufgefaßt werden kann, wobei die oberen Knotenpunkte $m-1$ und m die Stützen bilden. Der Zwischenstab V_o wird spannungslos, er dient nur dazu, die Knicklänge des Obergurtstabes O_m zu halbieren; V_u nimmt P_2 auf

Zur Berechnung von O'_m schneiden wir in Abb. 201 a den Knoten $m-1$ heraus und benutzen für den links abgetrennten Teil eine Momentengleichung in bezug auf den Punkt m'.

$$O'_m \cdot r'_m + \frac{P_2}{2} \cdot \frac{\lambda_m}{2} = 0; \quad O'_m = -\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, r'_m} = -\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos\beta_m}.$$

An demselben abgetrennten Knoten setzen wir alsdann $\Sigma H = 0$.

$$O'_m \cdot \cos\beta_m + D'_m \cdot \cos\varphi_m = 0.$$

$$D'_m \cdot \cos\varphi_m = -O'_m \cdot \cos\beta_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m},$$

so daß
$$D'_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos\varphi_m}.$$

Zur Berechnung von D''_m schneiden wir den Knoten m in Abb. 201 a heraus und setzen am abgetrennten Knoten $\Sigma H = 0$.

$$O'_m \cdot \cos\beta_m + D''_m \cdot \cos\varphi'_m = 0$$

$$D''_m \cdot \cos\varphi'_m = -O'_m \cdot \cos\beta_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m},$$

daher
$$D''_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos\varphi'_m}.$$

Die Gesamtspannkraft O_m ist dann

$$= -\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - P_2 \cdot \frac{\lambda_m}{2}}{h_m \cdot \cos\beta_m} - \frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos\beta_m}$$

Ferner

$$D_m = \frac{1}{\cos\varphi_m}\left(\frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - P_2 \cdot \frac{\lambda_m}{2}}{h_m} - \frac{A \cdot x_{m-1}}{h_{m-1}}\right) + \frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos\varphi_m}.$$

Die Untergurtspannkräfte bleiben von dem Zwischensystem unbeeinflußt, sind also gleich den für das Hauptsystem ermittelten.

Hiernach ist es leicht, auch die Einflußlinien für die Stabspannkräfte zu berechnen.

a) Die O_m-Linie (Abb. 202 a).

Zunächst zeichnen wir die O_m-Linie für das Hauptsystem, also das Dreieck $a\,b\,c$, dessen Spitze unter m liegt. Die Einflußlinie ist festgelegt durch die Ordinate $-\frac{1\, x_m}{r_m}$ unter dem linken Auflager. Dazu kommt dann noch die Einflußlinie für die dem Zwischensystem angehörende Stabkraft O'_m. Sie ist ebenfalls ein Dreieck ($c\,d\,e$) mit der Spitze unter m' (Abb. 202 b). Die Ordinate unter m' ist $= -\frac{1\,\lambda}{4\, r'_m}$. Denn, wie oben gezeigt, bringt die Last P_2 in m' die

Kraft $O'_m = -\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, r'_m}$ hervor. Infolge 1 t wird daher $O'_m = -\frac{1\, \lambda_m}{4\, r'_m}$. Unter dem linken Auflagerpunkt des Zwischensystems trage man daher $-\frac{1\, \lambda_m}{2\, r'_m}$

Abb. 202.

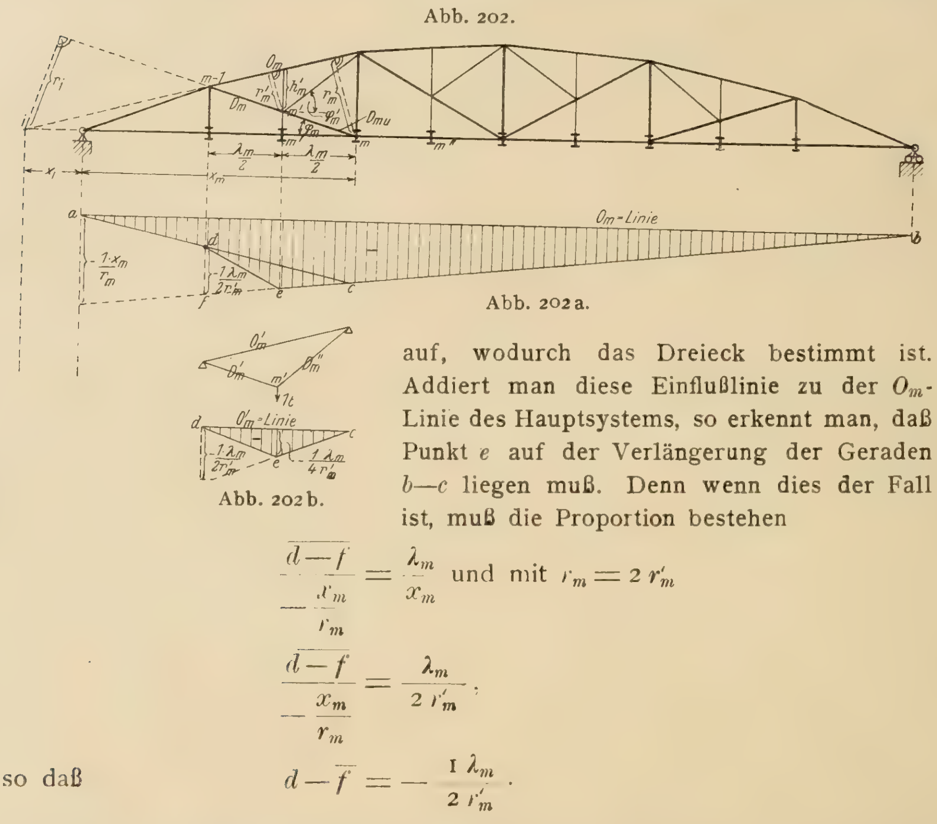


Abb. 202a.

Abb. 202b.

auf, wodurch das Dreieck bestimmt ist. Addiert man diese Einflußlinie zu der O_m-Linie des Hauptsystems, so erkennt man, daß Punkt e auf der Verlängerung der Geraden b—c liegen muß. Denn wenn dies der Fall ist, muß die Proportion bestehen

$$\frac{\overline{d-f}}{-\frac{x_m}{r_m}} = \frac{\lambda_m}{x_m} \text{ und mit } r_m = 2\, r'_m$$

$$\frac{\overline{d-f}}{-\frac{x_m}{r_m}} = \frac{\lambda_m}{2\, r'_m};$$

so daß
$$\overline{d-f} = -\frac{1\, \lambda_m}{2\, r'_m}.$$

Diese Ordinate mußte aber unter dem linken Auflager des Zwischensystems aufgetragen werden, wie vorhin nachgewiesen wurde.

b) Die D_m-Linie (Abb. 203).

Zunächst zeichnen wir wieder die Einflußlinie für die Diagonale des Hauptsystems, das ist der Linienzug a—b—c—d. Diese Einflußlinie ist bestimmt durch die Ordinate $\frac{1\, x_i}{r_i}$ unter dem linken Auflager. Dazu kommt dann noch die Einflußlinie für die dem Zwischensystem angehörende Stabkraft D'_m. Das ist ein Dreieck mit der Spitze unter m' (Abb. 203a). Die Ordinate unter m' ist $+\frac{1\, \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos \varphi_m}$. Denn, wie oben gezeigt, bringt die Last P_2 in m' die Kraft $D'_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos \varphi_m}$ hervor. Infolge 1 t wird daher $D'_m = +\frac{1\, \lambda_m}{4\, h'_m \cdot \cos \varphi_m}$. Unter dem linken Auflagerpunkt des Zwischensystems muß daher $+\frac{1\, \lambda_m}{2\, h'_m \cdot \cos \varphi_m}$ aufgetragen werden. Addiert man diese Einflußlinie zu der D_m-Linie des Haupt-

systems, so erkennt man, daß Punkt l auf der Verlängerung der Geraden $c—d$ liegen muß. Denn wenn dies der Fall ist, muß die Proportion bestehen

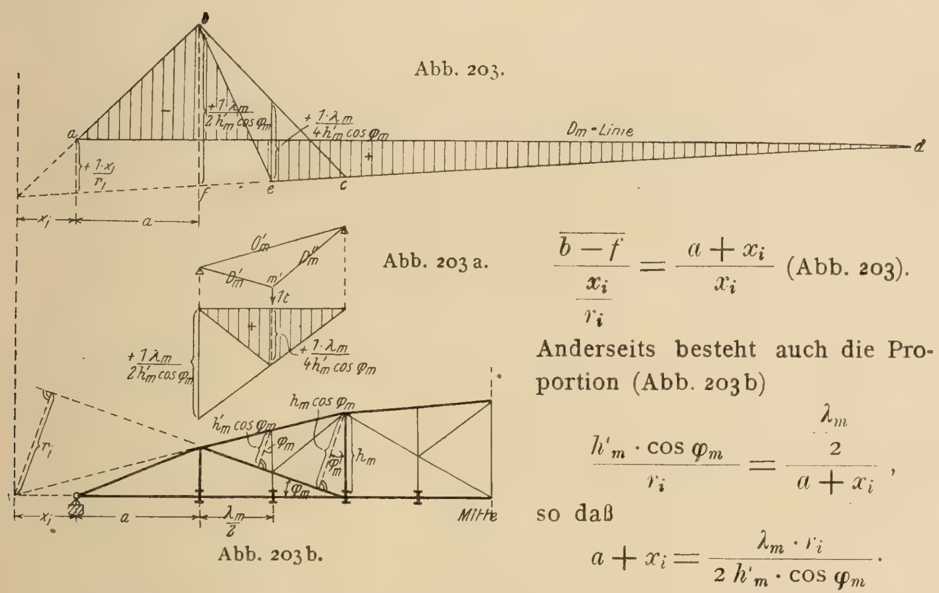


Abb. 203.

Abb. 203 a.

Abb. 203 b.

$$\frac{\overline{b-f}}{\frac{x_i}{r_i}} = \frac{a+x_i}{x_i} \quad \text{(Abb. 203).}$$

Anderseits besteht auch die Proportion (Abb. 203b)

$$\frac{h'_m \cdot \cos\varphi_m}{r_i} = \frac{\frac{\lambda_m}{2}}{a+x_i},$$

so daß

$$a+x_i = \frac{\lambda_m \cdot r_i}{2\,h'_m \cdot \cos\varphi_m}.$$

Setzen wir diesen Wert in die erste Proportion ein, so wird

$$\overline{b-f} = \frac{\lambda_m}{2\,h'_m \cdot \cos\varphi_m}.$$

Diese Ordinate mußte aber unter dem linken Auflager des Zwischensystems aufgetragen werden, wie vorhin nachgewiesen wurde.

In dem unteren Teil $m—m'$ der Diagonalen (Abb. 202) stimmt die Spannkraft D_{mu} mit der Spannkraft der Diagonalen $m-(m-1)$ des Hauptsystems überein, da eine in m' angreifende Knotenlast ohne Einfluß auf D_{mu} ist. Die Einflußlinie für D_{mu} ist daher nach Abb. 203 die Linie $a—b—c—d$.

Abb. 204.

Abb. 204 a.

Abb. 204 b.

Die Einflußlinie für D''_m ist ein Dreieck mit der Ordinate $+\frac{1\,\lambda_m}{4\,h'_m \cdot \cos\varphi'_m}$ unter m' (Abb. 204a). Denn infolge der Last P_2 ist $D''_m = +\frac{P_2 \cdot \lambda_m}{4\,h'_m \cos\varphi'_m}$, infolge 1 t wird daher $D''_m = +\frac{1\,\lambda_m}{4\,h'_m \cdot \cos\varphi'_m}$.

Die Einflußlinie für V_u ist ebenfalls ein Dreieck mit der Ordinate $+1$ unter m' (Abb. 204b). Denn infolge der Last 1 t unter V_u wird $V_u = +1$ t. Lasten links von $m-1$ bezw. rechts von m haben keinen Einfluß auf V_u.

c) Die V-Linie (Abb. 205).

Steht die Last 1 t über der Strecke x_{m-1} bezw. x'_{m+1}, so liefert die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ für den abgetrennten Knoten m die Gleichung

$V + D \cdot \sin\varphi = 0$, so daß $V = -D \cdot \sin\varphi$. Für diese Laststellungen stimmt daher die V-Linie mit der mit -1 multiplizierten $D \cdot \sin\varphi$-Linie des Hauptsystems überein, die in Abb. 205a durch den Linienzug $a—b—c—d$ dargestellt ist. Die durch die Geraden g_1 und g_2 von der Senkrechten durch das Auflager A abgeschnittene Ordinate ist daher $= -\frac{x_i}{r_i} \cdot \sin\varphi$. Da nach Abb. 205 $\sin\varphi = \frac{r_i}{a_i}$, so wird diese Ordinate

$$= -\frac{x_i}{r_i} \cdot \frac{r_i}{a_i} = -\frac{x_i}{a_i}.$$

Abb. 205.

Abb. 205 a.

Steht die Last 1 t in m, so erhält man mit Hilfe der Bedingung $\Sigma V = 0$ die Gleichung $V + D \cdot \sin\varphi - 1 = 0$, so daß $V = -D \cdot \sin\varphi + 1$. An der Stelle m ist daher zu der Ordinate $-\eta_d$ der $D \cdot \sin\varphi$-Linie noch die Ordinate $\eta = 1$ zu addieren, deren Endpunkt in die Verlängerung der Geraden g_1 fallen muß; denn dann besteht die Proportion

$$\frac{\eta}{\frac{x_i}{a_i}} = \frac{a_i}{x_i}, \text{ so daß } \eta = \frac{x_i}{a_i} \cdot \frac{a_i}{x_i} = 1.$$

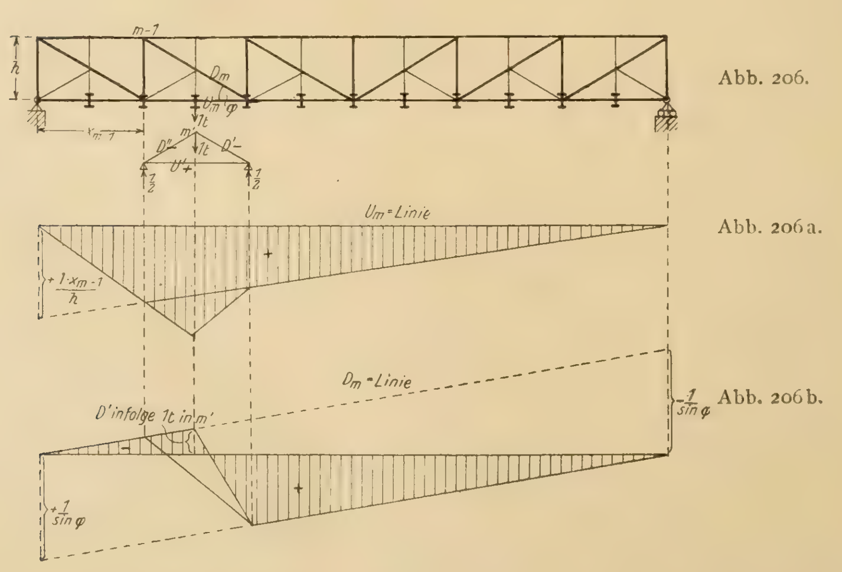


Abb. 206.

Abb. 206 a.

Abb. 206 b.

Endlich berücksichtige man noch, daß zwischen den Querträgern $m - 1$ und m bezw. $m + 1$ und m die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß.

Die Einflußlinien für die Untergurtspannkräfte entsprechen den Einflußlinien für das Hauptsystem, da die Untergurtspannkräfte durch das Zwischensystem nicht beeinflußt werden.

Nach dem Vorangegangenen wird es dem Leser nicht schwer fallen, auch die Richtigkeit der in den Abb. 206a u. 206b dargestellten Einflußlinien für U_m und D_m eines Parallelträgers mit Zwischenteilung zu erkennen. Man beachte, daß hier D' infolge 1 t in m' negativ wird. Die Einflußlinien für Obergurtstäbe entsprechen den Einflußlinien für das Hauptsystem.

5. Der Fachwerkbalken mit schräg beweglichem Auflager.

a) Die O_m-Linie.

Zur Berechnung der O_m-Linie benutzen wir die Formel $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$. Die O_m-Linie ist daher die in Abb. 207a dargestellte, mit $-\frac{1}{r_m}$ multiplizierte M_m-Linie (vergl. Abb. 120d, Seite 89). Zu beachten ist hier, daß der Punkt m zwischen zwei Querträgern liegt, daß also die Einflußlinie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verlaufen muß.

Abb. 207.

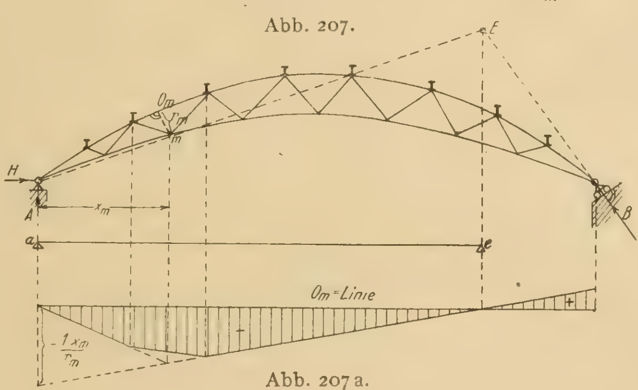


Abb. 207a.

Abb. 208.

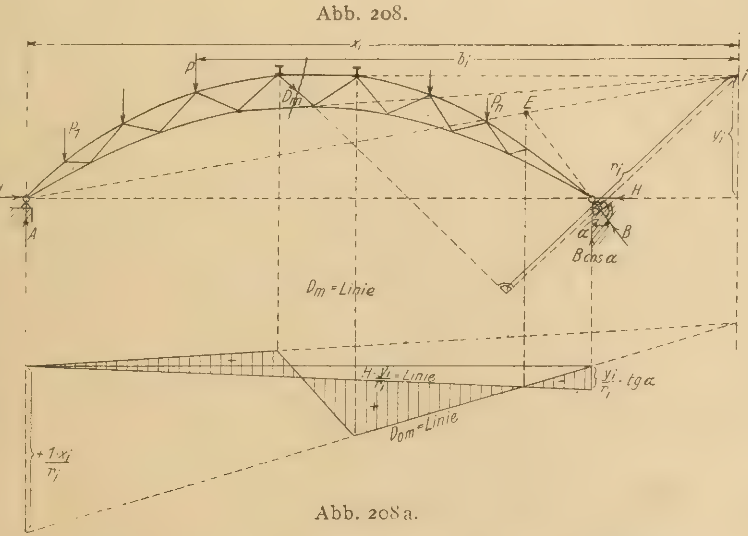


Abb. 208a.

b) Die D_m-Linie (Abb. 208a).

Zur Berechnung der D_m-Linie leiten wir zunächst eine bequeme Formel her. Wir führen den Ritterschen Schnitt und benutzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Drehpunkt i.

$$D_m \cdot r_i + \Sigma P \cdot b_i - A \cdot x_i + H \cdot y_i = 0; \quad D_m = \frac{A \cdot x_i - \Sigma P \cdot b_i}{r_i} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}.$$

Da A gleich dem Auflagerdruck eines Balkens mit wagerecht beweglichem Auflager ist (wie man sofort durch eine Momentengleichung für das rechte Auflagergelenk nachweisen kann, in welcher H den Drehpunkt schneidet, also aus der Gleichung herausfällt), so ist $\frac{A \cdot x_i - \Sigma P \cdot b_i}{r_i}$ offenbar die Spannkraft in der Diagonalen eines Balkens mit wagerechtem Auflager. Sie sei mit D_{om} bezeichnet. Es wird daher $D_m = D_{om} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}$.

Es muß daher von der D_{om}-Linie die mit $\frac{y_i}{r_i}$ multiplizierte H-Linie abgezogen werden. Die H-Linie ist eine Gerade mit der Ordinate 1 tg α unter dem rechten Auflager (vergl. Abb. 119b, Seite 88), die $H \cdot \frac{y_i}{r_i}$-Linie hat mithin an der gleichen Stelle die Ordinate $\frac{y_i}{r_i} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Der Nullpunkt der Einflußlinie liegt unter E, dem Schnittpunkt des durch i gehenden, aus H und A resultierenden linken Auflagerdrucks mit der Richtung von B. Steht nämlich die Last 1 t gerade in E, so erzeugt sie die Auflagerdrücke K_l und B, die sich mit 1 t in E schneiden müssen (Abb. 209). Setzt man dann vom links abgetrennten Teil aus die Momentengleichung für den Drehpunkt i an, so erhält man

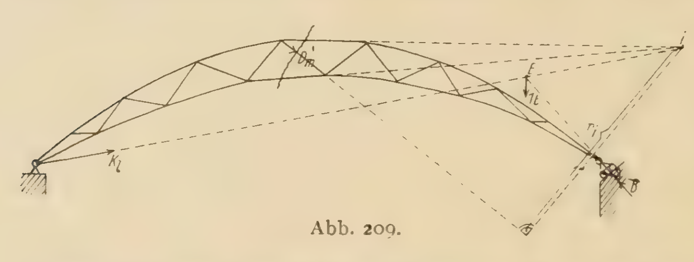


Abb. 209.

$$D_m \cdot r_i + K_l \cdot o = 0, \quad \text{d. h. } D_m \cdot r_i = 0.$$

Da r_i nicht $= 0$ ist, muß $D_m = 0$ werden.

Senkrecht unter E liegt daher der Nullpunkt der Einflußlinie.

Hat man nun die D_{om}-Linie gezeichnet, so kann man mit Hilfe dieses Nullpunktes ohne weiteres die $H \cdot \frac{y_i}{r_i}$-Linie von der D_{om}-Linie abziehen (Abb. 208a). Die Ordinate $\frac{y_i}{r_i} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ braucht also gar nicht erst aufgetragen zu werden.

Sinngemäß berechne man die Einflußlinie für eine Vertikale V_m (Abb 210) mit Hilfe der Formel

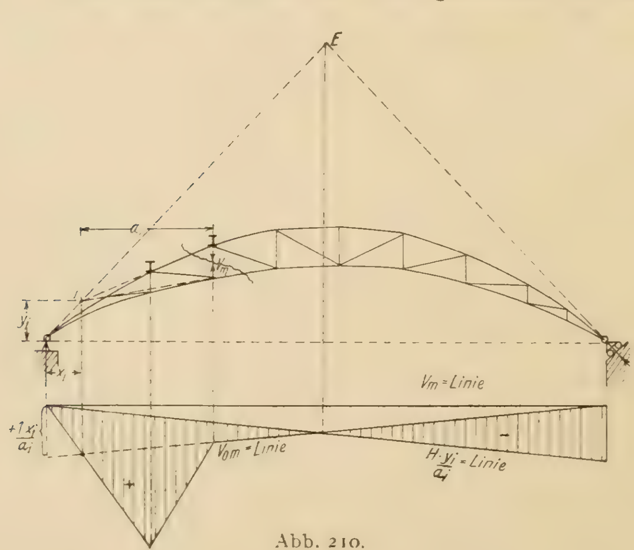


Abb. 210.

$$V_m = V_{om} - H \cdot \frac{y_i}{a_i}.$$

Bezüglich der Berechnung der V_{om}-Linie vergl. Abb. 167a, Seite 117. Man beachte hier das positive Vorzeichen der V_{om}-Linie, das sich für Lasten links oder rechts vom Schnitt durch entsprechende Momentengleichungen für den Punkt i leicht ergibt.

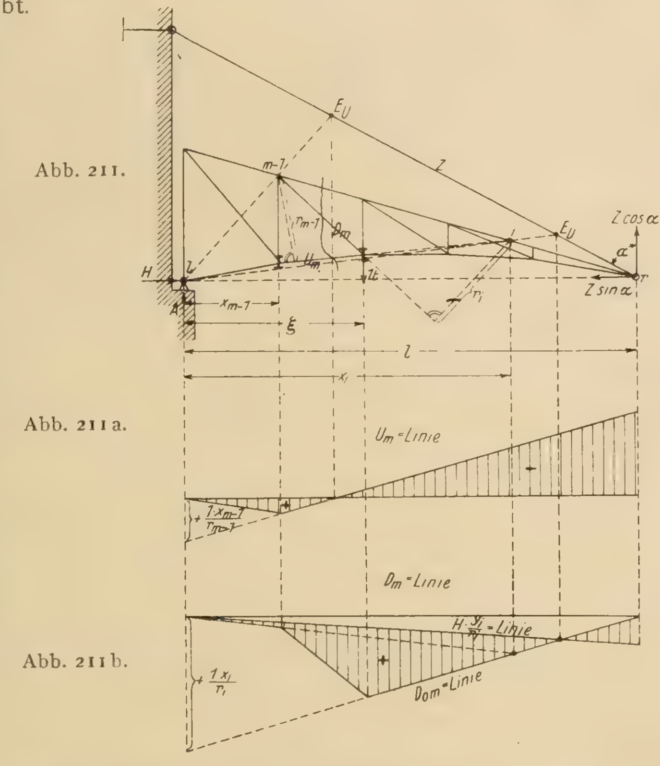


Abb. 211. Abb. 211 a. Abb. 211 b.

Genau so verhält sich der in Abb. 211 dargestellte, an einem Ende durch eine Zugstange aufgehängte Freiträger, bei welchem die Zugstange die Stelle des schräg gerichteten, in seiner Richtung unveränderlichen Auflagerdrucks vertritt. Zerlegt man Z nach $Z \cdot \cos\alpha$ und $Z \cdot \sin\alpha$ und setzt die Momentengleichung für den linken Auflagerpunkt l an, so erhält man für eine beliebige Laststellung

$$Z \cdot \cos\alpha \cdot l - 1\,\xi = 0$$

$$Z = \frac{1\,\xi}{l \cdot \cos\alpha}.$$

Durch eine Momentengleichung für den Punkt r wird $A \cdot l - 1\,\xi' = 0$; $A = \frac{1\,\xi'}{l}$ = dem Auflagerdruck eines gewöhnlichen Balkens auf zwei Stützen mit wagerecht beweglichem Auflager. Durch $\Sigma H = 0$ erhält man $H - Z \cdot \sin\alpha = 0$; $H = Z \cdot \sin\alpha$. Wir erhalten daher für die an dem System angreifenden Stützkräfte Z, A und H und damit auch für die Stabspannkräfte dieselben Formeln wie für den Bogen mit schräg beweglichem Auflager (vergl. auch Seite 90). Alle dort hergeleiteten Einflußlinien gelten daher auch hier. In Abb. 211a und 211b sind die U_m- und D_m-Linie dargestellt.

§ 8. Der Gerberbalken.

1. Der vollwandige Gerberbalken.

Ein durchlaufender Balken auf n Stützen, der ein festes und $n-1$ bewegliche Auflager besitzt (Abb. 212), ist $(n-2)$-fach statisch unbestimmt. Denn

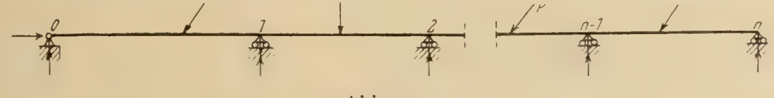


Abb. 212.

da an dem festen Auflager die Größe und Richtung des Auflagerdruckes, an den $n-1$ beweglichen Auflagern nur die Größe unbekannt ist, so sind $n-1+2=n+1$ unbekannte Stützendrücke vorhanden. Da sich aber nur drei Gleichgewichtsbedingungen für ein ebenes Kräftesystem aufstellen lassen ($\Sigma M=0$, $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$), so fehlen noch $n+1-3=n-2$ Gleichungen zur Berechnung der $n+1$ Unbekannten. Diese $n-2$ Gleichungen kann man nun dadurch erhalten, daß man den Balken an $n-2$ Stellen durch Gelenke unterbricht. Denn dann gilt für jedes Gelenk die Bedingung:

„Das Biegungsmoment für den Gelenkpunkt ist $=0$."

So muß z. B. für den in Abb. 213 dargestellten Träger die Mittelkraft aus A und P_1 durch das Gelenk g_1 gehen, da sie bei jeder anderen Lage die Scheibe I um g_1 drehen würde, die Scheibe dann also nicht im Gleichgewicht wäre.

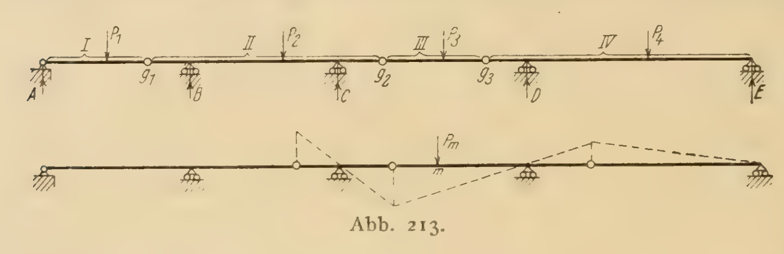


Abb. 213.

Da sich nunmehr $n+1$ statische Gleichungen zur Berechnung der $n+1$ unbekannten Stützendrücke aufstellen lassen, so ist der Balken statisch bestimmt geworden.

Die Gelenke sind dabei so anzuordnen, daß die einzelnen Scheiben für jede Belastung in stabilem Gleichgewicht sind.

In Abb. 213 ist z. B. ein aus vier Scheiben bestehender Balken auf fünf Stützen dargestellt, der durch $5-2=3$ Gelenke statisch bestimmt gemacht worden ist. Die Anbringung der Gelenke nach Abb. 213a wäre fehlerhaft, da beispielsweise durch Belastung des Punktes m das Gleichgewicht gestört würde.

A. Einfluß ständiger Belastung.

Die statische Wirkung der Gelenke ist aus Abb. 214 ersichtlich. Die Scheibe I, die den Anschluß an das Landwiderlager vermittelt, heißt Schleppträger, die Scheiben II und IV, welche statisch als Balken auf zwei Stützen mit überkragenden Enden wirken, nennt man Kragträger und die Scheibe III Koppel- oder Schwebeträger. Schleppträger und Koppelträger sind demnach ein-

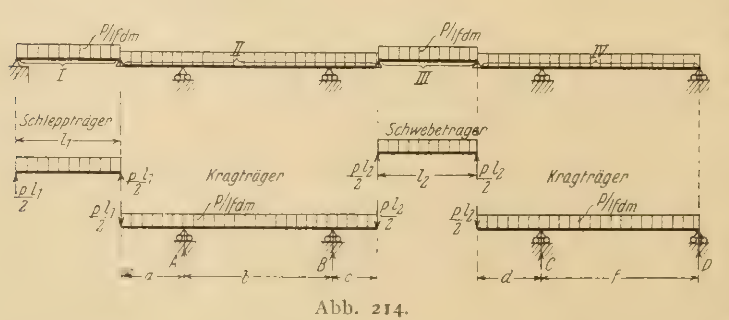


Abb. 214.

fache Balken, deren Auflagerdrücke als Einzelkräfte die Kragträger belasten. So berechnen wir z. B. den Auflagerdruck A aus dem Gleichgewichts-

zustand des linken Kragträgers mittels einer Momentengleichung in bezug auf das Auflager B:

$$A \cdot b - \frac{p\, l_1}{2}(a+b) - p\,(a+b)\frac{(a+b)}{2} + \frac{p\, l_2}{2}\, c + p \cdot c \cdot \frac{c}{2} = 0$$

$$A = \frac{p}{2\,b}\left[(a+b)(l_1+a+b) - c\,(l_2+c)\right].$$

Der Auflagerdruck B wird dann mittels der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ gefunden:

$$B + A - \frac{p\, l_1}{2} - \frac{p\, l_2}{2} - p\,(a+b+c) = 0$$

$$B = p\left[\frac{l_1+l_2}{2} + a + b + c\right] - A.$$

Ebenso findet man für den rechten Kragträger

$$C \cdot f - \frac{p\, l_2}{2}(d+f) - p\,(d+f)\frac{d+f}{2} = 0$$

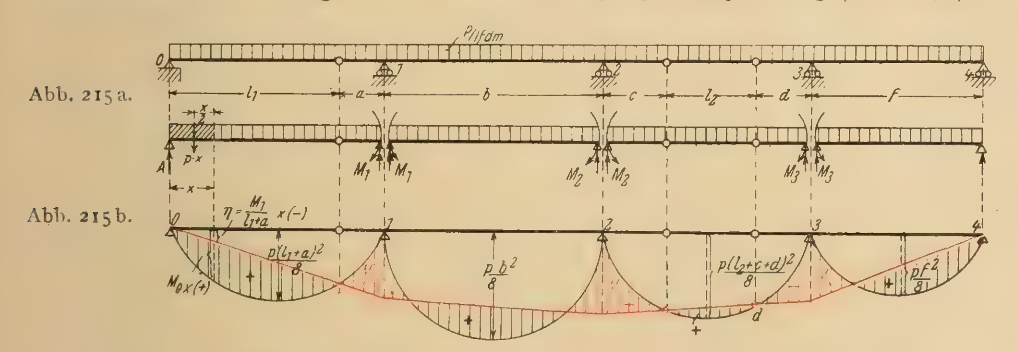
$$C = p \cdot \frac{d+f}{2\,f}\,[l_2 + d + f].$$

Ferner $$C + D - \frac{p\, l_2}{2} - p\,(d+f) = 0$$

$$D = p\left(\frac{l_2}{2} + d + f\right) - C.$$

Nunmehr können die Momente und Querkräfte für jeden Querschnitt leicht berechnet werden, womit der Spannungszustand bestimmt ist.

Die Bestimmung der Momentenfläche gestaltet sich am einfachsten, wenn man den Balken über den Stützen durchschneidet und zum Ersatz die nach unten wirkenden, also negativen Stützmomente M_1, M_2 und M_3 anbringt (Abb. 215 a).



Den Auflagerdruck A findet man dann aus dem Gleichgewichtszustand des Balkens von der Spannweite $l_1 + a$ mittels einer Momentengleichung in bezug auf dessen rechtes Auflager. Es muß also sein

$$A\,(l_1+a) - \frac{p\,(l_1+a)^2}{2} + M_1 = 0$$

$$A = \frac{p\,(l_1+a)}{2} - \frac{M_1}{l_1+a} = A_0 - \frac{M_1}{l_1+a}.$$

A_0 bedeutet hierin den Auflagerdruck eines einfachen (gelenklosen) Balkens von der Spannweite $l_1 + a$

Für einen beliebigen Querschnitt im Abstande x vom linken Auflager ist dann das Moment

$$M_x = A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = \left(A_0 - \frac{M_1}{l_1 + a}\right) x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

$$= A_0 \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} - \frac{M_1}{l_1 + a} \cdot x.$$

$A_0 \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$ ist gleich dem Moment des einfachen (gelenklosen) Balkens von der Spannweite $l_1 + a$, das $= M_{ox}$ gesetzt werde. Man erhält daher

$$M_x = M_{ox} - \frac{M_1}{l_1 + a} \cdot x.$$

Das Moment M_{ox} erhält man aus der Momentenfläche eines einfachen Balkens von der Spannweite $l_1 + a$, die in dem vorliegenden Falle eine Parabelfläche vom Pfeil $\frac{p\,(l_1 + a)^2}{8}$ ist (Abb. 215b). Trägt man dann unter der Stütze 1 das Stützmoment M_1 als Ordinate auf und verbindet den Endpunkt dieser Ordinate geradlinig mit dem Punkt o, so schneidet diese Gerade von der Senkrechten durch den im Abstand x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt die Strecke $\eta = \frac{M_1}{l_1 + a} \cdot x$ ab, denn es besteht aldann die Proportion

$$\frac{\eta}{M_1} = \frac{x}{l_1 + a}, \text{ so daß } \eta = \frac{M_1}{l_1 + a} \cdot x.$$

Da nun das Biegungsmoment für den Gelenkpunkt = o sein muß, so muß die erwähnte Gerade die gewöhnliche Balkenmomentenfläche senkrecht unter dem Gelenk im Punkte b schneiden, weil dann das resultierende Moment unter dem Gelenk = o wird. Dadurch ist das Moment M_1 bestimmt. Aus dem gleichen Grunde muß die Gerade der Stützmomentenfläche für die Öffnung $l_2 + c + d$ die dieser Öffnung entsprechende gewöhnliche Balkenmomentenfläche senkrecht unter den Gelenken in den Punkten c und d schneiden, wodurch wiederum die Stützmomente M_2 und M_3 bestimmt sind. Nunmehr kann der Stützmomentenlinienzug gezeichnet werden, der mit der Balkenachse die Stützmomentenfläche einschließt. Da die gewöhnlichen Balkenmomente positiv, die Stützmomente negativ sind, so erhält man die in Abb. 215b durch Schraffur angedeutete Momentenfläche.

Ebenso verfahre man bei Belastung durch Einzelkräfte (Abb. 216). Die Gelenke sind hier in einer Mittelöffnung angenommen. Zunächst werden wieder

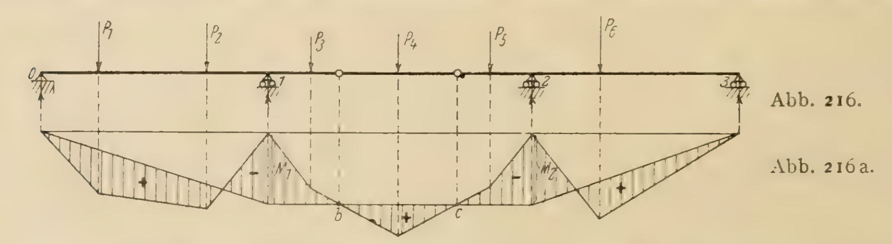


Abb. 216.

Abb. 216a.

die einfachen Balkenmomentenflächen gezeichnet und die Nullpunkte b und c mittels der Gelenkpunkte bestimmt (Abb. 216a). Alsdann sind M_1 und M_2

durch die Gerade $b-c$ bestimmt und damit auch die Stützmomentenfläche. Die resultierende Momentenfläche setzt sich sodann aus der positiven Balkenmomentenfläche und der negativen Stützmomentenfläche zusammen (Abb. 216a).

Die Querkraftflächen werden genau so wie für einen einfachen Balken bestimmt (vergl. § 6, 1, a, Seite 64 u. 66). Sie sind in den Abb. 217 u. 218 für gleichmäßig verteilte Belastung und für Einzellasten dargestellt. Man

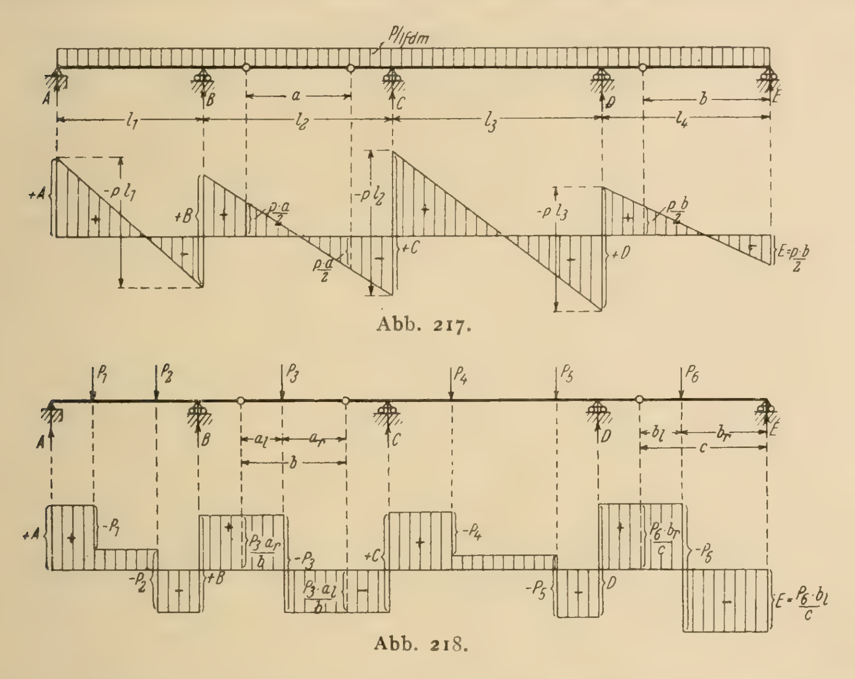


Abb. 217.

Abb. 218.

beachte, daß in den Gelenken die Querkräfte gleich den Auflagerdrücken einfacher Balken von den Spannweiten der Koppel- bezw. Schleppträger sein müssen (vergl. auch Abb. 214).

Die Gelenkentfernung wird, ständige Belastung vorausgesetzt, zweckmäßig so gewählt, daß die Maximalmomente für den Krag- und den Koppelträger gleich groß werden, da es im allgemeinen wünschenswert ist, daß beide Balkenteile dasselbe Profil erhalten. Zur Berechnung der unbekannten Gelenkentfernung besteht also die Bedingungsgleichung:

$$\underbrace{\frac{q \cdot x}{2} \cdot \frac{l-x}{2} + \frac{q(l-x)}{2} \cdot \frac{(l-x)}{4}}_{\text{Maximalmoment für den Kragträger.}} = \underbrace{\frac{q \cdot x^2}{8}}_{\text{Maximalmoment für den Koppelträger.}} \quad \text{(Abb. 219).}$$

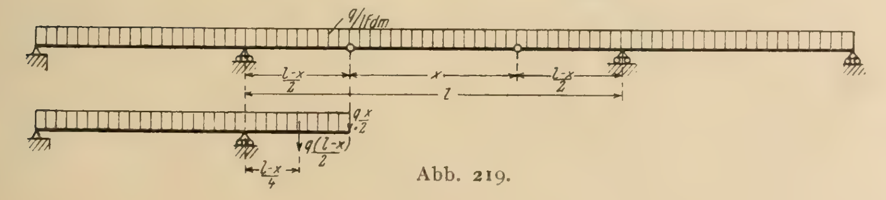


Abb. 219.

Das Maximalmoment für den Kragträger ist in der Regel das Stützmoment (vergl. Abb. 215b). Es ist negativ, das Koppelträgermoment positiv. Da aber bei der Dimensionierung des Balkens nur die absoluten Werte der Momente in Betracht kommen, haben in der Bedingungsgleichung beide Momente die gleichen Vorzeichen erhalten. Diese Gleichung wird nun nach x aufgelöst und man erhält

$$2\,x\,l - 2\,x^2 + l^2 - 2\,x\,l + x^2 = x^2$$

$$2\,x^2 = l^2$$

$$x = l \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{0{,}71}\,l.$$

In der Regel wird diese Gelenkentfernung bei Dachpfetten benutzt.

B. Einfluß beweglicher Belastung (Einflußlinien).

Der Einfluß der beweglichen Belastung wird am zweckmäßigsten mit Hilfe von Einflußlinien ermittelt, die nachfolgend für sämtliche in Betracht kommenden statischen Größen berechnet werden sollen.

Es möge zunächst ganz allein der Einfluß einer wandernden Last 1 t untersucht werden. Der Träger sei ein Balken auf vier Stützen mit 4 — 2 = 2 Gelenken, die entweder beide in der Mittelöffnung oder einzeln in den beiden Seitenöffnungen angebracht werden können (vergl. Abb. 220 u. 222).

1. Die Last 1 t stehe über der gelenklosen linken Seitenöffnung (Abb. 220).

Denkt man sich den Koppelträger wieder als auf den Kragarmen der Kragträger ruhenden Balken, so erkennt man, daß bei dieser Belastung der

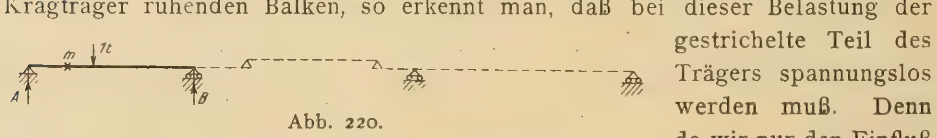


Abb. 220.

gestrichelte Teil des Trägers spannungslos werden muß. Denn da wir nur den Einfluß der Last 1 t untersuchen, ist der Träger selbst als gewichtslos anzusehen. Der Einfluß des Eigengewichts, das in der Regel als gleichmäßig verteilte Belastung aufgefaßt wird, wurde bereits in den vorangegangenen Untersuchungen berücksichtigt (Seite 157 u. f.).

Steht daher die Last 1 t über einer gelenklosen Öffnung, so wird diese ebenso beansprucht wie ein Balken auf zwei Stützen von der Spannweite dieser Öffnung. Die Einflußlinien für alle an diesem Teil wirkenden statischen Größen (A, B, M_m, Q_m) stimmen also überein mit den entsprechenden Einflußlinien des einfachen Balkens A—B.

2. Die Last 1 t stehe auf dem Kragarm des linken Kragträgers (Abb. 221).

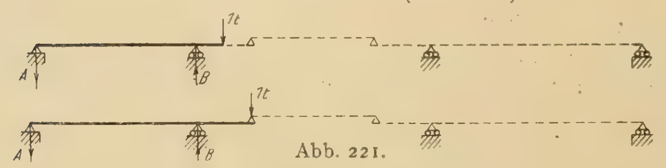


Abb. 221.

Auch hier erkennt man wieder, daß der gestrichelte Teil des Trägers spannungslos werden muß.

Bewegt sich daher die Last 1 t irgendwo auf dem linken Kragträger, so bleibt der rechte Kragträger und der Koppelträger unbeansprucht. Natürlich gilt auch die Umkehrung: Befindet sich die Last 1 t irgendwo auf dem rechten Kragträger, so bleibt der linke Kragträger und der Koppelträger unbeansprucht.

Abb. 222.

Der unter 1 aufgestellte Satz gilt auch, wenn die Gelenke in den Seitenöffnungen liegen, wie aus Abb. 222 ersichtlich ist.

Mit Hilfe dieser statischen Eigenschaften und der Bedingung, daß zu jeder starren Scheibe eine Gerade als Einflußlinie gehören muß (vergl. Seite 86), kann man nun leicht die Einflußlinien für die an dem gelenklosen Teil des Trägers wirkenden statischen Größen herleiten. Die Gelenke sollen zunächst in den Seitenöffnungen angenommen werden.

a) Die A-Linie. Das System besteht aus den starren Scheiben I, II und III (Abb. 223). Wir zeichnen zunächst die A-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite der gelenklosen Öffnung, d. i. eine Gerade, die von der Senkrechten durch das Auflager A die Ordinate $+1$ abschneidet (Abb. 223a). Dann verlängern wir diese Gerade rechts und links bis zu den senkrechten Begrenzungslinien der Scheibe I, an der A angreift. Damit sind auch die den starren Scheiben II und III entsprechenden Einflußgeraden bestimmt, deren Ordinaten unter dem linken bezw. rechten Endlager $= 0$ sein müssen, weil die Last 1 t über diesen Auflagern den Auflagerdruck $A = 0$ hervorruft.

Abb. 223.

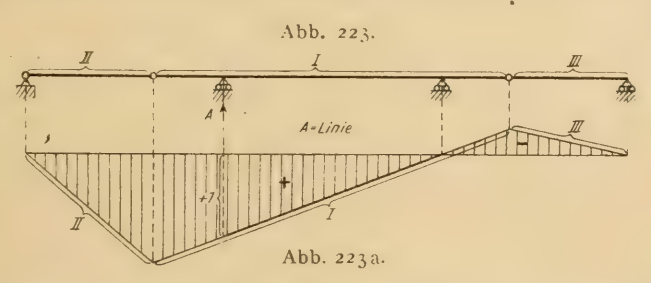


Abb. 223a.

b) Die M_m-Linie (Abb. 224a). Wir durchschneiden den Balken im Punkte m (Abb. 224) und bringen an der Schnittstelle zum Ersatz das Moment M_m an. Durch den Schnitt zerfällt der Balken in vier starre Scheiben. Zunächst zeichnen wir dann die M_m-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite der gelenklosen Öffnung und vervollständigen dann die Einflußlinie mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben.

Abb. 224.

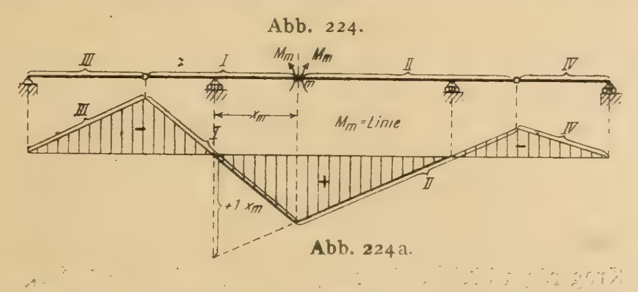


Abb. 224a.

c) Ebenso wird bei Ermittlung der Einflußlinie für die Querkraft Q_m verfahren (Abb. 225a).

Abb. 225.

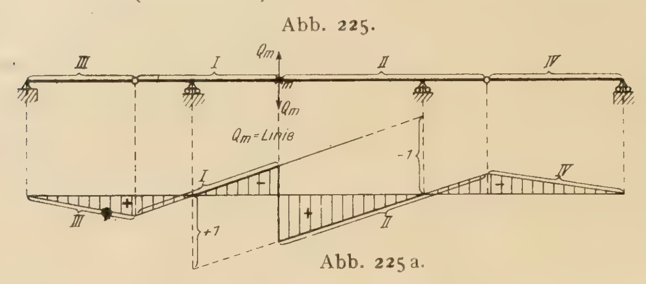


Abb. 225a.

Liegt der Punkt m zwischen zwei Querträgern, so berücksichtige man noch, daß die Einflußlinie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verlaufen muß (Abb. 226a u. 226b).

Dieselben Einflußlinien sollen jetzt auch für einen Gerberbalken hergeleitet werden, bei dem die Gelenke in der Mittelöffnung liegen.

Abb. 226.

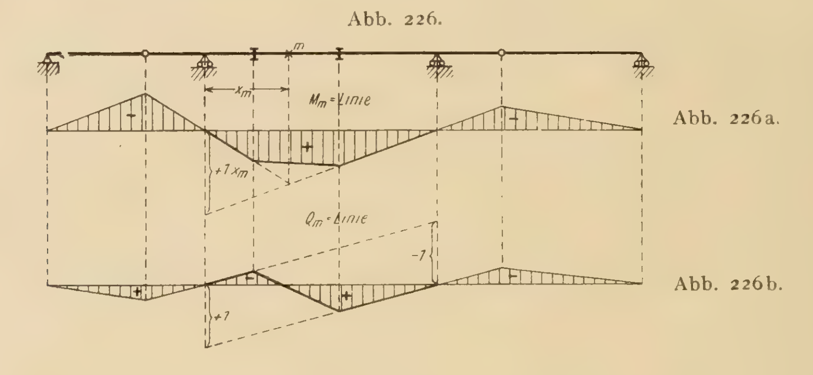


Abb. 226a.

Abb. 226b.

a) **Die A-Linie** (Abb. 227a).

Das System zerfällt in drei starre Scheiben. Zunächst zeichnen wir wieder die A-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite der gelenklosen Öffnung, also eine Gerade, die von der Senkrechten durch das Auflager A die Ordinate $+1$ abschneidet. Mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben kann dann die Einflußlinie leicht vervollständigt werden, wobei man den unter 2 aufgestellten Satz berücksichtigen muß, daß die irgendwo auf dem rechten Kragträger, also auf der Scheibe III stehende Last 1 t ohne Einfluß auf den linken Kragträger bleibt. Sie ruft also an ihm keinen Auflagerdruck A hervor. Senkrecht unter der Scheibe III müssen daher alle Ordinaten der Einflußlinie $= 0$ werden.

Abb. 227.

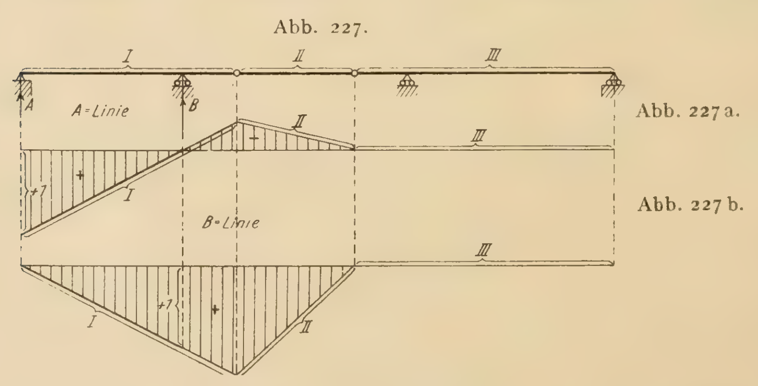


Abb. 227a.

Abb. 227b.

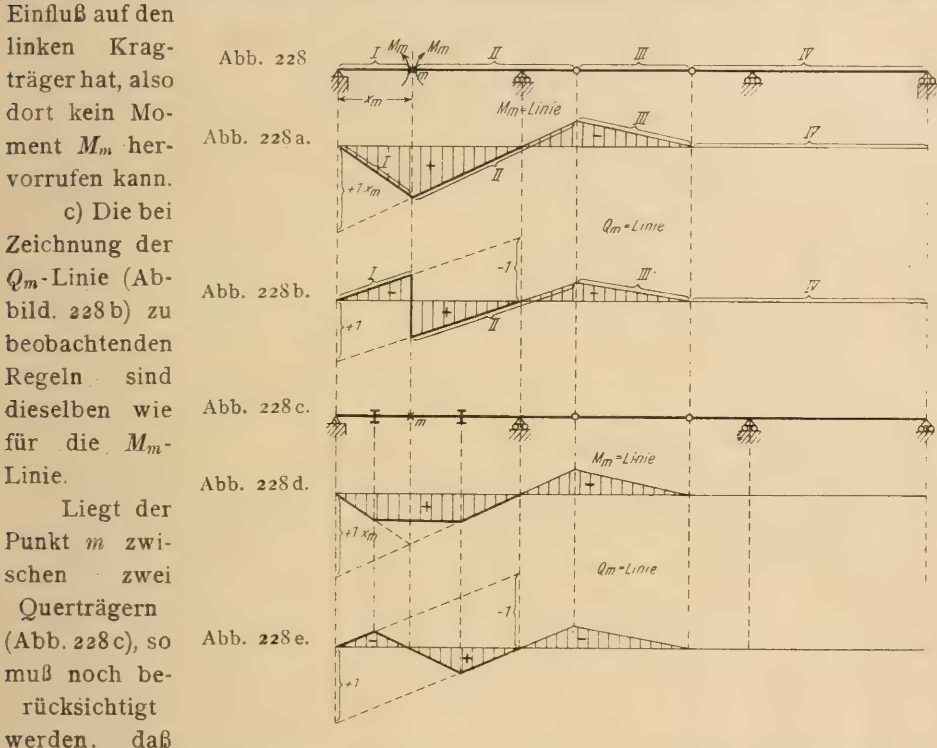
Entsprechend verfahre man bei Ermittlung der B-Linie (Abb. 227b).

b) Die M_m-Linie.

Auch hier zeichnen wir zunächst wieder die M_m-Linie für einen einfachen Balken von der Spannweite der gelenklosen Öffnung (Abb. 228a) und vervollständigen sie dann mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben. Dabei ist wieder zu berücksichtigen, daß sämtliche Einflußordinaten unter der Scheibe IV = o sein müssen, da die irgendwo auf der Scheibe IV stehende Last 1 t keinen Einfluß auf den linken Kragträger hat, also dort kein Moment M_m hervorrufen kann.

c) Die bei Zeichnung der Q_m-Linie (Abbild. 228b) zu beobachtenden Regeln sind dieselben wie für die M_m-Linie.

Liegt der Punkt m zwischen zwei Querträgern (Abb. 228c), so muß noch berücksichtigt werden, daß zwischen diesen die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß (Abb. 228d u. 228e).



Die Einflußlinien für die an den Kragarmen wirkenden statischen Größen M_m und Q_m können nicht mehr unter Zugrundelegung der Einflußlinien einfacher Balken ermittelt werden, da hier der Punkt m in dem durch Gelenke unterbrochenen Trägerteil liegt, für welchen der auf Seite 160 unter 1 aufgestellte Satz keine Geltung hat. Wir untersuchen daher den Einfluß der wandernden Last 1 t auf die betreffende statische Größe für verschiedene Laststellungen (Abb. 229).

Steht die Last 1 t links von m, also auf der Scheibe I, so werden M_m und $Q_m = 0$, wie man sofort erkennt, wenn man M_m und Q_m vom rechts abgetrennten Teil aus berechnet, an dem keine Kraft angreift (vergl. auch Abb. 220 u. 221, Seite 160). Sämtliche Ordinaten der M_m- und Q_m-Linie unter der Scheibe I müssen daher = o werden (Abb. 229a u. 229b). Eine rechts von m auf der Scheibe II stehende Last 1 t bringt das Moment $M_m = -1\,\xi$ hervor. Das ist die Gleichung einer Geraden. Für $\xi = 0$ bezw. für $\xi = x_m$ erhält man $M_m = 0$ bezw. $M_m = -1\,x_m$, wodurch die der Scheibe II ent-

sprechende Einflußgerade der M_m-Linie bestimmt ist (Abb. 229a). Steht ferner die Last 1 t in m bezw. rechts von m auf der Scheibe II, so wird jedesmal $Q_m = +1$. Das ist die Gleichung einer Geraden, die im Abstande 1 parallel zur Nullgeraden der Einflußlinie verläuft (Abb. 229b).

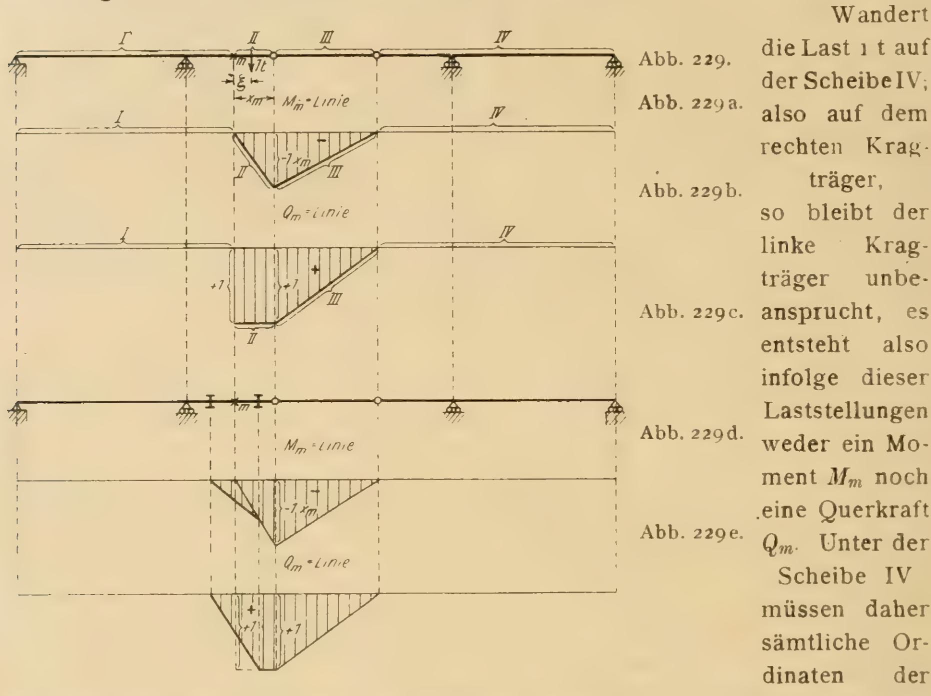


Abb. 229.

Abb. 229a.

Abb. 229b.

Abb. 229c.

Abb. 229d.

Abb. 229e.

Wandert die Last 1 t auf der Scheibe IV, also auf dem rechten Kragträger, so bleibt der linke Kragträger unbeansprucht, es entsteht also infolge dieser Laststellungen weder ein Moment M_m noch eine Querkraft Q_m. Unter der Scheibe IV müssen daher sämtliche Ordinaten der M_m-Linie und der Q_m-Linie $= 0$ werden. Damit sind aber auch die der starren Scheibe III entsprechenden Geraden der M_m-Linie und der Q_m-Linie bestimmt (Abb. 229a u. 229b).

Liegt der Punkt m zwischen zwei Querträgern (Abb. 229c), so muß man noch berücksichtigen, daß die Einflußlinie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verläuft (Abb. 229d u. 229e, vergl. auch die Abb. 117a u. 117b, Seite 88).

2. Der fachwerkartige Gerberbalken (Einflußlinien).

In Abb. 230 ist ein Gerberbalken mit in den Seitenöffnungen liegenden Gelenken dargestellt. Die gestrichelt gezeichneten Stäbe sind **Blindstäbe**, die nur des besseren Aussehens halber angeordnet werden, aber keine Spannung

Abb. 230.

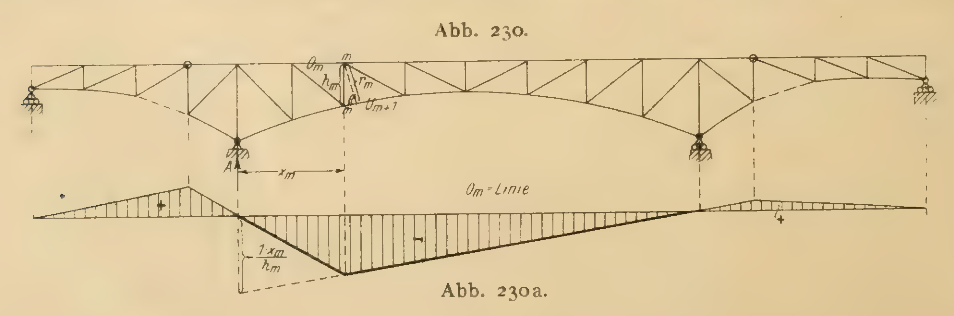


Abb. 230a.

erhalten, da sie nur an einem Ende fest, an dem anderen Ende längsbeweglich an das Trägernetz angeschlossen sind, so daß Schlepp- und Kragträger sich gegeneinander drehen können, die Gelenke also voll zur Wirkung kommen.

Die Einflußlinien für die Gurtspannkräfte können ohne weiteres auf die bereits behandelten Momenteneinflußlinien zurückgeführt werden, da die Gurtspannkräfte nur von den Momenten abhängig sind. So ist z. B. $O_m = -\frac{M_m}{h_m}$. Die O_m-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{h_m}$ multiplizierte M_m-Linie (Abb. 230a), die bereits in Abb. 224 dargestellt wurde. Da $U_{m+1} = +\frac{M_m}{r_m}$, so ist die U_{m+1}-Linie die mit $+\frac{1}{r_m}$ multiplizierte M_m-Linie. Sie hat daher dieselbe Form wie die in Abb. 230a dargestellte O_m-Linie. Jedoch ist die Ordinate unter dem linken Auflager $+\frac{1\,x_m}{r_m}$, die Vorzeichen sind also entgegengesetzt.

Bei Ermittlung der D-Linie (Abb. 231a) beachte man, daß das System durch den Ritterschen Schnitt in vier starre Scheiben zerlegt ist. Zeichnet

Abb. 231.

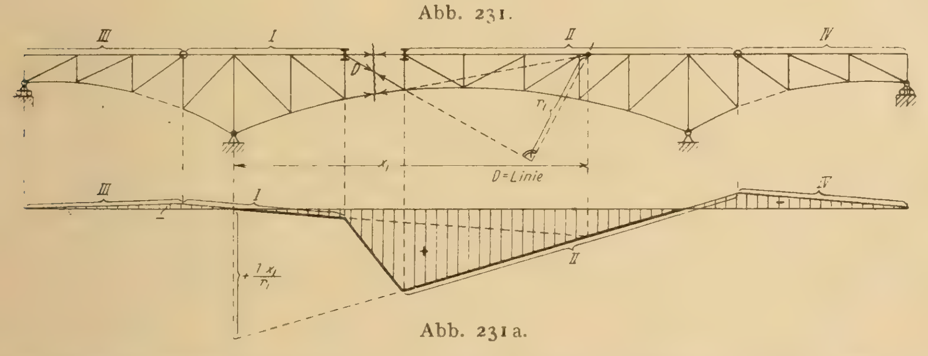


Abb. 231a.

man dann zunächst wieder die D-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite der gelenklosen Öffnung, so kann die Einflußlinie leicht mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben vervollständigt werden.

Ebenso wird bei Berechnung einer V-Linie verfahren (Abb. 232a).

Liegen die Gelenke in der Mittelöffnung und es sollen Einflußlinien für Stabspannkräfte des linken Kragträgers gezeichnet werden, so beachte man.

Abb. 232.

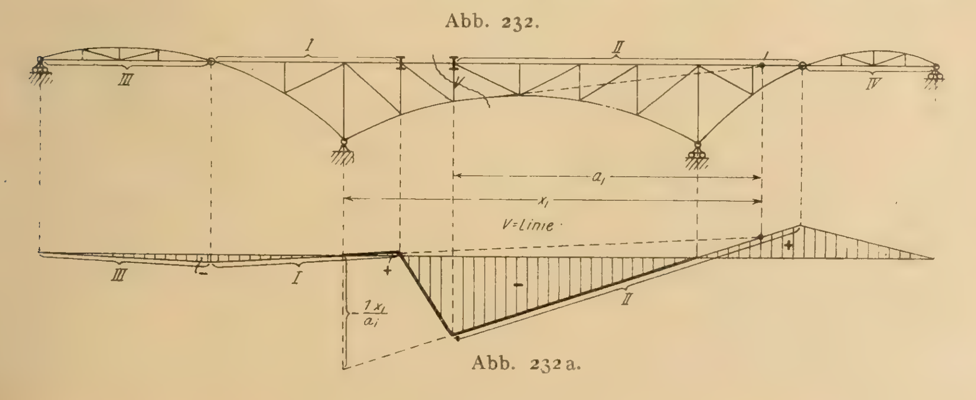


Abb. 232a.

daß auf dem rechten Kragträger stehende Lasten keinen Einfluß auf den linken Kragträger haben. Sämtliche Einflußordinaten unter dem rechten Kragträger müssen daher = o sein. Man zeichnet dann wieder zunächst die

Abb. 233.

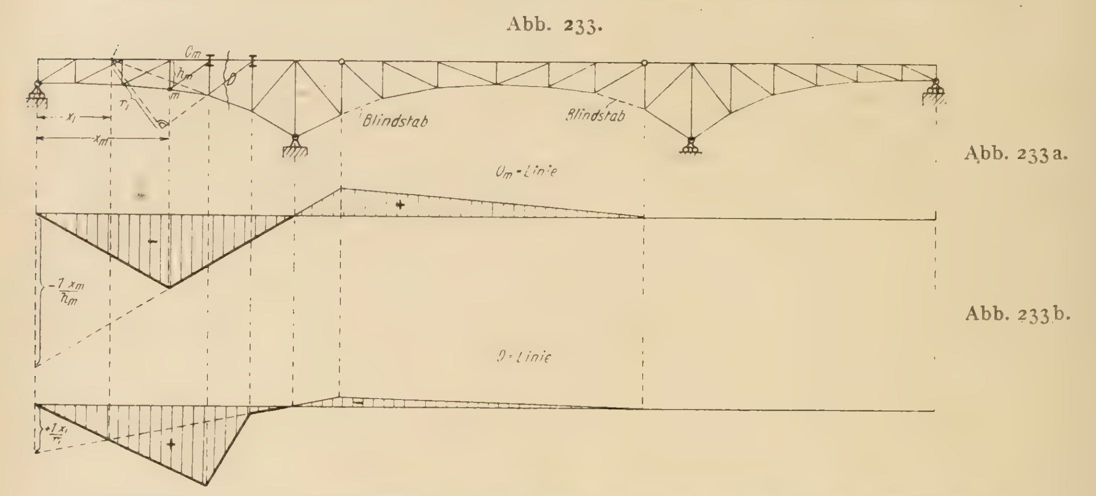


Abb. 233a.

Abb. 233b.

Einflußlinie für die betreffende Stabspannkraft eines Balkens auf zwei Stützen von der Spannweite der gelenklosen Öffnung und vervollständigt sie mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben.

Abb. 234.

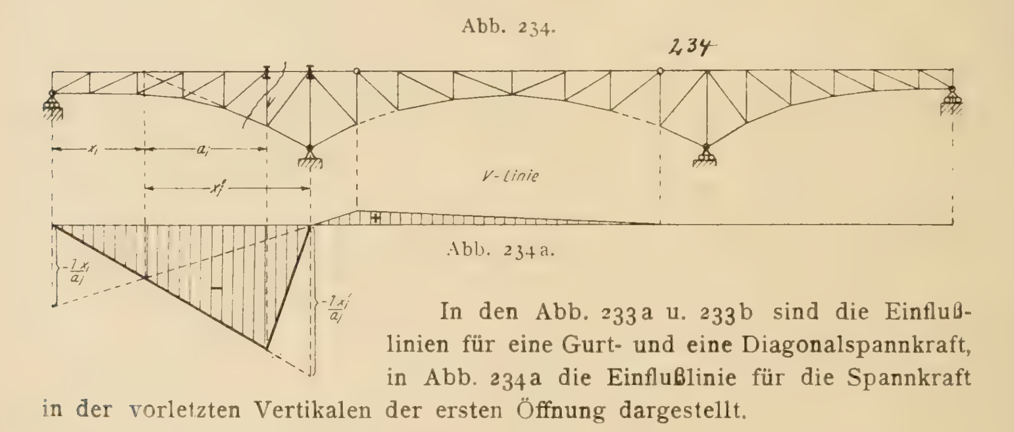


Abb. 234a.

In den Abb. 233a u. 233b sind die Einflußlinien für eine Gurt- und eine Diagonalspannkraft, in Abb. 234a die Einflußlinie für die Spannkraft in der vorletzten Vertikalen der ersten Öffnung dargestellt.

Einflußlinien für Spannkräfte in den Stäben der Kragarme.

Die O_m-Linie (Abb. 235a) erhalten wir mittels der Formel $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$.

Die O_m-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{r_m}$ multiplizierte M_m-Linie. Diese ist nach Abb. 229a ein Dreieck mit der Ordinate $-1\,x_m$ unter dem linken Gelenk, die mithin für die O_m-Linie $= -\frac{1}{r_m}(-1\,x_m) = +\frac{1\,x_m}{r_m}$ zu setzen ist.

Die U_{m+1}-Linie (Abb. 235b) wird mittels der Formel $U_{m+1} = +\frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$ gefunden. Sie ist daher die mit $\frac{1}{h_{m+1}}$ multiplizierte M_{m+1}-Linie, d. h. ein

Dreieck mit der Ordinate $-\frac{1\,x_{m+1}}{h_{m+1}}$ unter dem linken Gelenk. Da der Punkt $m+1$ zwischen zwei Querträgern liegt, ist die Einflußlinie noch durch die

Abb. 235.

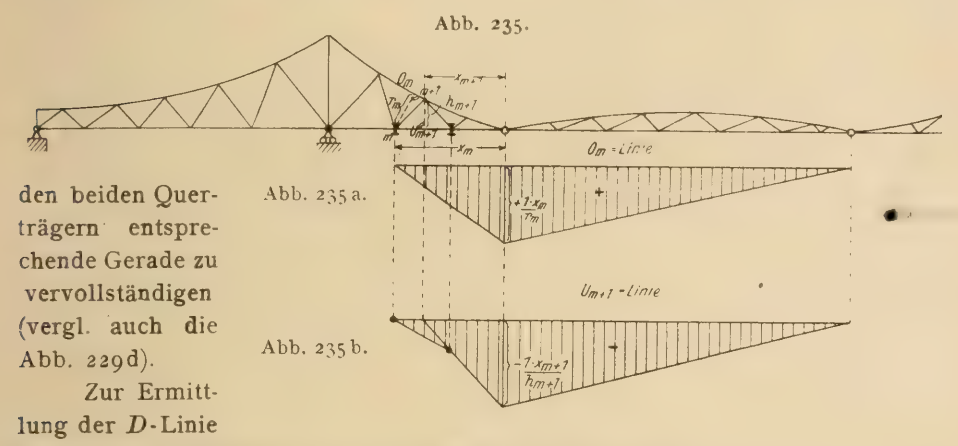


Abb. 235 a.

Abb. 235 b.

den beiden Querträgern entsprechende Gerade zu vervollständigen (vergl. auch die Abb. 229d).

Zur Ermittlung der D-Linie (Abb. 236a) untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t:

1. Die Last 1 t stehe irgendwo links vom Schnittfeld, also auf der Scheibe I. Die Spannkraft D für diese Laststellung berechnen wir vom rechts

Abb. 236.

Abb. 236a.

Abb. 236b.

Abb. 236c.

Abb. 236d.

abgetrennten Teil aus, an dem keine äußere Kraft wirkt, durch eine Momentengleichung in bezug auf den Drehpunkt i (den Schnittpunkt der beiden vom Schnitt getroffenen Gurtstäbe). Es muß daher $D \cdot r_i = 0$ sein. Da r_i nicht $= 0$ ist, muß $D = 0$ werden. Unter der Scheibe I müssen daher sämtliche Einflußordinaten $= 0$ sein.

2. Die Last 1 t stehe auf der Scheibe II, und zwar im rechten Querträger des Schnittfeldes. Die am rechts abgetrennten Teil für den Punkt i angesetzte

Momentengleichung lautet sodann $D \cdot r_i + 1\,x_i = 0$, so daß $D = -\frac{1\,x_i}{r_i}$. Senkrecht unter der Last muß daher die Einflußordinate $= -\frac{1\,x_i}{r_i}$ sein.

3. Die Last 1 t stehe auf der Scheibe II im Punkte i. In diesem Falle lautet die am rechts abgetrennten Teil für den Punkt i angesetzte Momentengleichung $D \cdot r_i = 0$, so daß $D = 0$. Senkrecht unter i liegt daher der Nullpunkt der zur Scheibe II gehörenden Einflußgeraden, wodurch diese bestimmt ist.

4. Die Last 1 t stehe auf der Scheibe IV, also auf dem rechten Kragträger. In diesem Falle bleibt der linke Kragträger unbeansprucht, es entsteht also in D die Spannkraft O, so daß die der Scheibe IV entsprechende Einflußgerade mit der Nullgeraden zusammenfällt. Damit ist auch die Einflußgerade für die Scheibe III bestimmt.

Auch graphisch läßt sich schnell die Ordinate der Einflußlinie unter dem rechten Querträger als Spannkraft D infolge der dort wirkenden Kraft 1 t ermitteln (Abb. 237). Da der Kragarm rechts von der Kraft unbelastet ist, werden die gestrichelten Stäbe spannungslos, wie leicht zu erkennen ist, wenn man die Gleichgewichtszustände der Knoten a, b, c und d der Reihe nach untersucht. (Im Knoten a treffen nur zwei Stäbe zusammen, deren Spannkräfte $= 0$ sein müssen, da sich zwei Kräfte, die einen Winkel miteinander bilden, nicht das Gleichgewicht halten können. Genau dasselbe trifft dann der Reihe nach für die Knoten b, c und d zu.) Am Knoten e wirken nun drei Kräfte, 1 t, D_1 und U, die sich das Gleichgewicht halten, also ein Dreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden müssen, wobei sich D_1 als Zug- und U als Druckkraft ergibt. An dem abgetrennten Knoten f endlich muß dann die Zugkraft D_1 nach O und D zerlegt werden, wobei D eine Druck- und O eine Zugkraft wird. Die gefundene Kraft D wird dann senkrecht unter der Last 1 t in irgend einem Kräftemaßstabe als Ordinate aufgetragen.

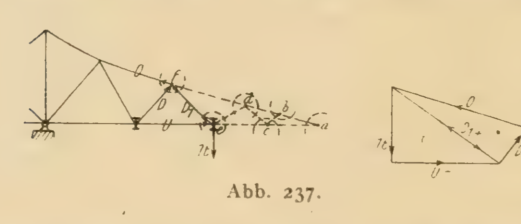


Abb. 237.

In Abb. 236c ist die D-Linie gezeichnet für den Fall, daß der Punkt i aus dem Kragarm herausfällt. Der Gang der Berechnung der Einflußlinie bleibt derselbe wie vor.

Die graphische Bestimmung der Einflußordinate unter dem rechten Querträger ist aus Abb. 236d ersichtlich. Die gestrichelten Stäbe sind wieder spannungslos. Die Spannkraft V wird $= 1$ t und diese wird dann an dem Knoten c nach D und O zerlegt, wobei sich D als Druck- und O als Zugkraft ergibt. Senkrecht unter der Last 1 t muß D in irgend einem Kräftemaßstabe als Ordinate aufgetragen werden. Ebenso werden die Einflußlinien für Spannkräfte in den Vertikalen des Kragarmes gefunden. In Abb. 238a ist eine derartige Einflußlinie dargestellt. Die Ordinate der Einflußlinie unter dem rechten Querträger wird $= +1$, da die am rechts abgetrennten Teil für den Punkt i

angesetzte Momentengleichung bei Belastung des rechten Querträgers mit der Last 1 t lautet: $V \cdot x_i - 1\, x_i = 0$, woraus $V = +1$.

Abb. 238.

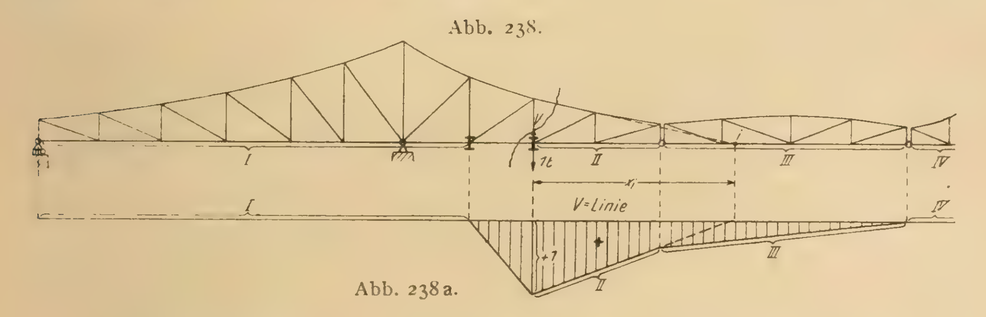


Abb. 238a.

Zur Berechnung der Einflußlinie für die über dem Auflager befindliche Vertikale V (Abb. 239) leiten wir uns zunächst eine bequeme Formel her

Abb. 239.

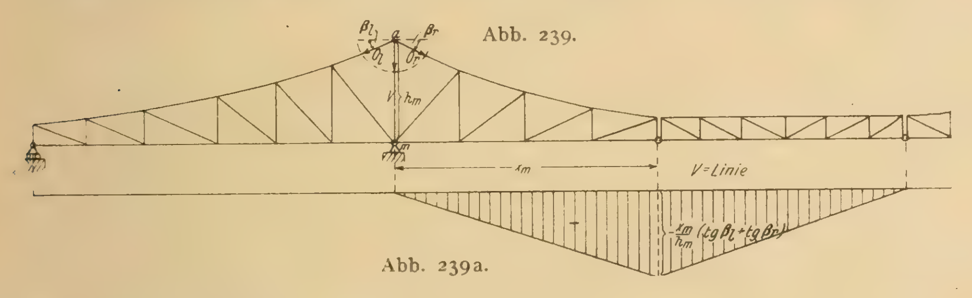


Abb. 239a.

Wir trennen den Knoten a ab, ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte und benutzen die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ Demgemäß muß sein:

$$V + O_l \sin \beta_l + O_r \sin \beta_r = 0.$$

Mit $O_l = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_l}$ und $O_r = -\frac{M_m}{h_m \cos \beta_r}$ wird sodann

$$V = +\frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{\sin \beta_l}{\cos \beta_l} + \frac{M_m}{h_m} \cdot \frac{\sin \beta_r}{\cos \beta_r} = +\frac{M_m}{h_m}\,(\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r).$$

Die V-Linie ist daher die mit $\frac{\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r}{h_m}$ multiplizierte M_m-Linie für den Punkt m eines Kragarmes (vergl. Abb. 229a, Seite 164). Da die Ordinate der M_m-Linie unter dem Gelenk $= -1\, x_m$ sein muß, so ist sie für die V-Linie $= -\frac{x_m}{h_m}(\operatorname{tg} \beta_l + \operatorname{tg} \beta_r)$ (Abb. 239a).

Auch für den in Abb. 240 dargestellten Fall möge die V-Linie hergeleitet werden. Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ lautet für den abgetrennten Knoten a:

$$V + B + U_l \cdot \sin \gamma_l + U_r \cdot \sin \gamma_r = 0.$$

Setzt man $U_l = +\frac{M_m}{h_m \cdot \cos \gamma_l}$ und $U_r = +\frac{M_m}{h_m \cdot \cos \gamma_r}$,

so wird $$V = -\frac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg} \gamma_l + \operatorname{tg} \gamma_r) - B.$$

Man erhält also die V-Linie durch Zusammensetzung der B-Linie mit der mit $\frac{\operatorname{tg}\gamma_l + \operatorname{tg}\gamma_r}{h_m}$ multiplizierten M_m-Linie unter Berücksichtigung der aus der

Abb. 240.

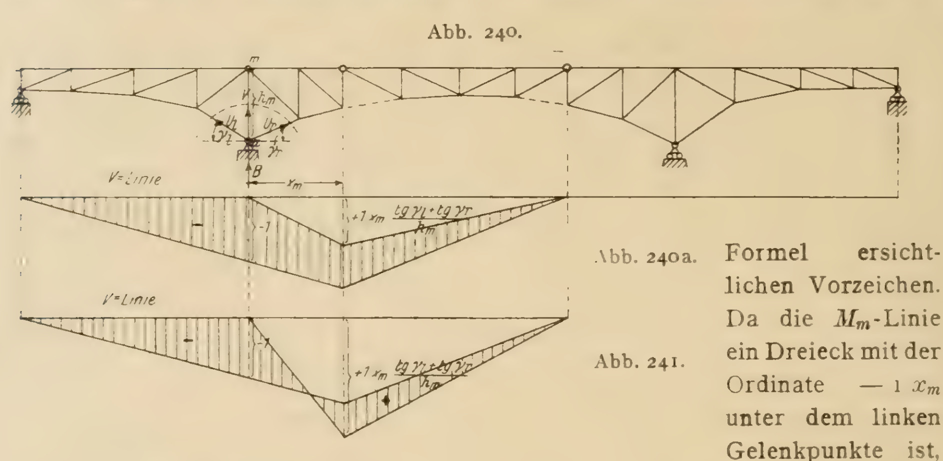


Abb. 240a.

Abb. 241.

Formel ersichtlichen Vorzeichen. Da die M_m-Linie ein Dreieck mit der Ordinate $-1\,x_m$ unter dem linken Gelenkpunkte ist, so hat die $-\frac{M_m}{h_m}(\operatorname{tg}\gamma_l + \operatorname{tg}\gamma_r)$-Linie die Ordinate $+1\,x_m \cdot \frac{\operatorname{tg}\gamma_l + \operatorname{tg}\gamma_r}{h_m}$ unter dem linken Gelenkpunkte. Von dieser Einflußlinie ist dann die B-Linie (vergl. Abb. 227b) abzuziehen. Die resultierende Einflußlinie ist in Abb. 240a dargestellt. Sie kann auch, je nach den Abmessungen des Trägers, die in Abb. 241 dargestellte Form haben.

Sinngemäß findet man die V-Linie, wenn die Gelenke in den Seitenöffnungen liegen (Abb. 242a oder 242b).

Die Einflußlinien für den Koppel- und die Schleppträger erstrecken sich nur über die jedesmalige Spannweite dieser Träger, da diese als Balken aut

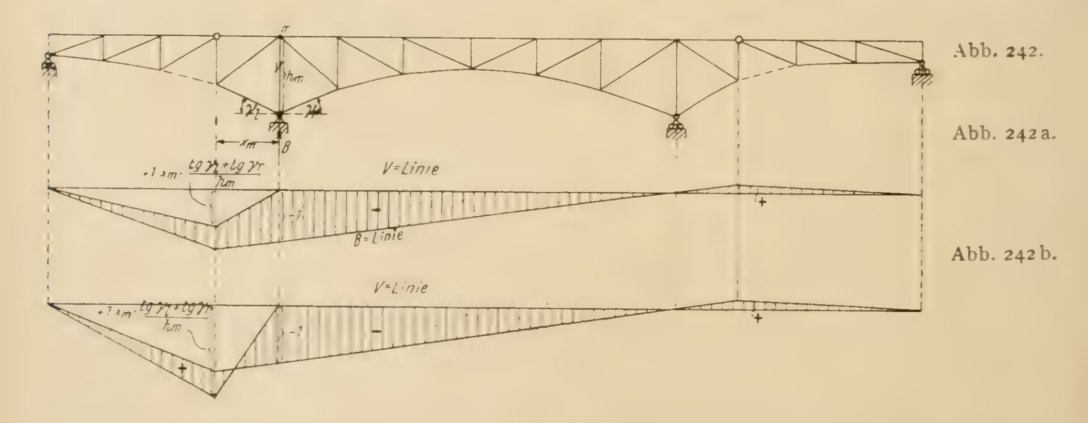


Abb. 242.

Abb. 242a.

Abb. 242b.

zwei Stützen wirken und auf den Kragträgern stehende Lasten keinen Einfluß auf sie haben (vergl. auch die Abb. 220, 221 u. 222, Seite 160 u. 161).

Die Größtwerte der Stabspannkräfte für diese Träger werden daher zweckmäßig nach § 7, 3, C, Seite 118 u. f. berechnet, da die Berechnung mit Hilfe von Einflußlinien umständlicher ist.

§ 9. Der Dreigelenkbogen.

1. Der vollwandige Dreigelenkbogen.

A. Einfluß beliebig schräg gerichteter Lasten (Abb. 243).

Um die Spannungsverteilung für jeden Querschnitt schnell angeben zu können, ist es erforderlich, die für die Querschnitte in Betracht kommenden Mittelkräfte der am abgetrennten Teil wirkenden äußeren Kräfte nach Größe und Richtung zu kennen. Zur Berechnung dieser Mittelkräfte bestimmen wir zunächst die Mittelkräfte R_1 und R_2 der auf die linke bezw. auf die rechte Bogenhälfte wirkenden äußeren Kräfte P mit Hilfe von Seilpolygonen I, II, III und IV, V, VI und den zugehörigen, mit beliebiger Polweite gezeichneten

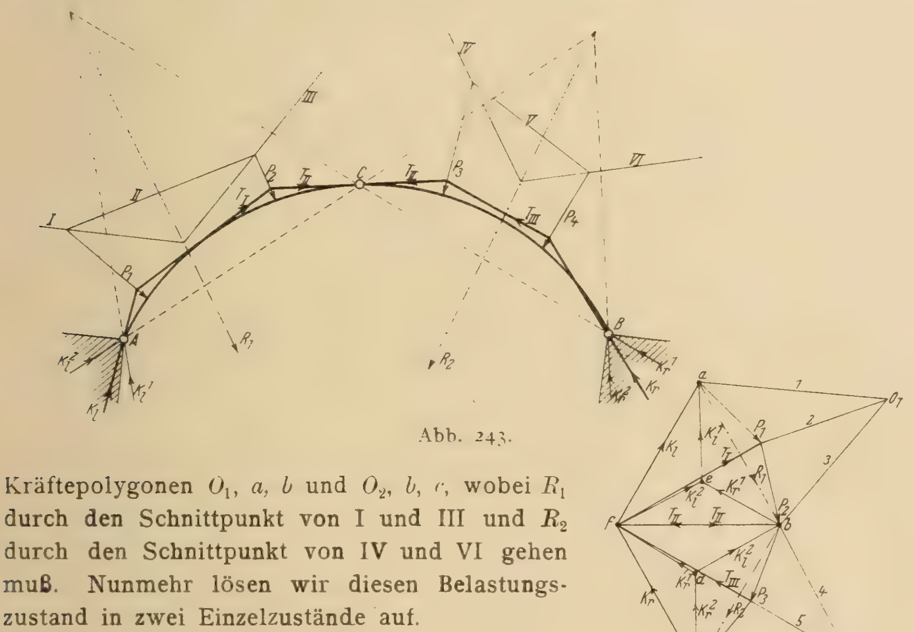


Abb. 243.

Kräftepolygonen O_1, a, b und O_2, b, c, wobei R_1 durch den Schnittpunkt von I und III und R_2 durch den Schnittpunkt von IV und VI gehen muß. Nunmehr lösen wir diesen Belastungszustand in zwei Einzelzustände auf.

Zustand I. Es wirke nur die auf die linke Bogenhälfte entfallende Mittelkraft R_1; R_2 sei $= 0$ angenommen. Alsdann muß der zugehörige rechte Kämpferdruck K_r^1 durch B und C gehen, da dann die rechte Bogenhälfte unbelastet ist (vergl. auch Abb. 74, Seite 53). Die Richtung des zugehörigen linken Kämpferdrucks K_l^1 ist bestimmt durch die Bedingung, daß sich R_1, K^1 und K_r^1 in einem Punkte schneiden müssen (drei Kräfte können sich nur dann das Gleichgewicht halten, wenn sie sich in einem Punkte schneiden).

Die Größe von K_l^1 und K_r^1 bestimmen wir in dem Kräftepolygon O_1, a, b durch Zerlegung von R_1 nach den Richtungen von K_l^1 und K_r^1.

Zustand II. Es wirke nur die auf die rechte Bogenhälfte entfallende Mittelkraft R_2; R_1 sei $= 0$ angenommen. Der zugehörige linke Kämpferdruck K_l^2 muß jetzt durch A und C gehen, da die linke Bogenhälfte unbelastet ist, und die Richtung des zugehörigen rechten Kämpferdrucks K_r^2 ist bestimmt durch die Bedingung, daß sich R_2, K_l^2 und K_r^2 in einem Punkte

schneiden müssen. Die Größen von K_l^2 und K_r^2 werden wieder in dem Kräftepolygon O_2, b, c durch Zerlegung von R_2 nach den Richtungen K_l^2 und K_r^2 gefunden.

Nunmehr nehmen wir an, daß die Zustände I und II gleichzeitig wirken. Dadurch erhalten wir den wirklichen Zustand. Der wirkliche Kämpferdruck K_l ist dann die Mittelkraft aus den Einzelkämpferdrücken K_l^1 und K_l^2, ebenso K_r die Mittelkraft von K_r^1 und K_r^2. Um diese Mittelkräfte in dem Kräftepolygon bilden zu können, müssen $K_l^2 = \overline{bd}$ parallel nach $\overline{fe}$ und $K_r^1 = \overline{be}$ parallel nach $\overline{df}$ verschoben werden. Alsdann wird $K_l = \overline{af}$ und $K_r = \overline{cf}$. Dann bilden wir noch die Mittelkraft von K_l und $P_1 = T_{\text{I}}$, ferner von T_{I} und $P_2 = T_{\text{II}}$ und von T_{II} und $P_3 = T_{\text{III}}$, die mit der Mittelkraft von K_r und P_4 übereinstimmt. Die Richtungen dieser Mittelkräfte T werden dann in den Dreigelenkbogen eingezeichnet, wobei T_{II} als Mittelkraft sowohl der auf die linke als auch der

Abb. 244.

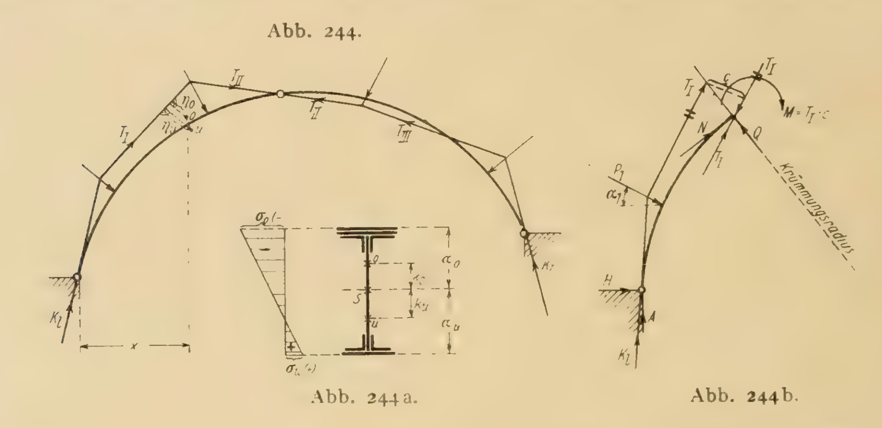


Abb. 244a. Abb. 244b.

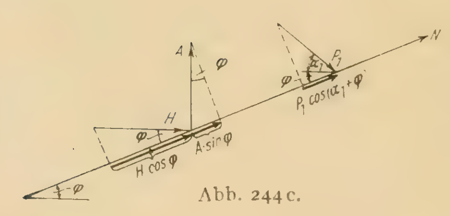


Abb. 244c.

auf die rechte Bogenhälfte wirkenden Kräfte durch den Stützpunkt der beiden Scheiben gehen muß. Man nennt den Kräftezug K_l, T_{I}, T_{II}, T_{III}, K_r die **Stützlinie** des Dreigelenkbogens.

Ist dann der Querschnitt des Bogens gegeben, so kann die Spannungsverteilung für irgend einen Querschnitt leicht mit Hilfe der unter § 4 entwickelten **Kernformeln** ermittelt werden (Abb. 244).

Gesucht sei z. B. die Spannungsverteilung für den im Abstande x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt, der die in Abb. 244a dargestellte Form habe. Wir berechnen zunächst die Kernpunktabstände k_o und k_u von der Schwerachse. Nach Seite 45 ist $k_o = \frac{W_u}{F}$ und $k_u = \frac{W_o}{F}$, worin $W_u = \frac{J_S}{a_u}$ und $W_o = \frac{J_S}{a_o}$. J_S ist das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die Schwerachse. Dann werden die Kernpunkte o und u in die Systemfigur eingetragen und die Kernpunktmomente M_o und M_u berechnet. Die Mittelkraft der links von dem Querschnitt wirkenden Kräfte ist T_{I} und kann aus dem Krafteck (Abb. 243) abgegriffen werden (in dem Kräftemaßstabe, in dem die

Kräfte P aufgetragen sind). Alsdann ist $M_o = + T_I \cdot \eta_o$ und $M_u = + T_I \cdot \eta_u$ (die Momente sind positiv, weil sie oben um den Querschnitt herumdrehen).

Nunmehr wird $\sigma_o = - \frac{M_u}{W_o} = - \frac{T_I \cdot \eta_u}{J_S} \cdot a_o$

und $\sigma_u = + \frac{M_o}{W_u} = + \frac{T_I \cdot \eta_o}{J_S} \cdot a_u.$

Damit ist das Spannungsdiagramm bestimmt, mit dessen Hilfe die Spannung für jeden Punkt des Querschnitts angegeben werden kann (Abb. 244a).

Sollen die Spannungen ohne Zuhilfenahme des Kerns ermittelt werden, so verfahren wir folgendermaßen:

Wir bringen die Mittelkraft T_I der links vom Querschnitt wirkenden Kräfte A, H und P_1 im Schwerpunkt des Querschnitts noch zweimal in entgegengesetzter Richtung an, wodurch am Gleichgewichtszustand nichts geändert wird, da diese Kräfte sich gegenseitig aufheben (Abb. 244b). Alsdann wirkt auf den Querschnitt am links abgetrennten Teil ein Kräftepaar vom Moment $T_I \cdot c$ und eine Einzelkraft T_I. Das Moment $T_I \cdot c$ ist das Moment der am abgetrennten Teil wirkenden Mittelkraft T_I in bezug auf den Schwerpunkt des Querschnitts, wofür man auch das Moment der Seitenkräfte A, H und P_1 setzen kann. Die Einzelkraft T_I zerlegen wir in eine Seitenkraft N nach Richtung der Tangente an die Schnittstelle, die normal zum Querschnitt wirkt und daher Normalkraft genannt wird, und in eine Seitenkraft Q, die in die Querschnittsebene fällt und den Querschnitt auf Abscheren beansprucht. Sie heißt deshalb Scher- oder Querkraft und fällt mit der Richtung des Krümmungsradius zusammen.

Demgemäß erhält man die Normalkraft für den Querschnitt eines Bogenträgers durch Projektion der am abgetrennten Teil wirkenden äußeren Kräfte auf die Richtung der Tangente, während die Querkraft gleich der Projektion dieser Kräfte auf die Richtung des Krümmungsradius ist. Bezüglich des Vorzeichens merke man sich bei Berechnung der Querkraft, daß am links abgetrennten Teil die nach oben, am rechts abgetrennten Teil die nach unten gerichteten Projektionen als positiv anzusetzen sind. Man erhält dann von beiden Seiten aus das gleiche Ergebnis (vergl. auch § 3, 1, Seite 35). Das Moment $T_I \cdot c$ und die Normalkraft N beanspruchen den Querschnitt auf Normalfestigkeit. Das Moment allein ruft die Biegungsspannungen

$$\sigma_o^M = - \frac{T_I \cdot c}{W_o} \text{ und } \sigma_u^M = + \frac{T_I \cdot c}{W_u}$$

hervor, während infolge der im Schwerpunkt des Querschnitts wirkenden Normalkraft N (Druckkraft) in jedem Flächenelement des Querschnitts die gleichen Druckspannungen $\sigma^N = - \frac{N}{F}$ entstehen. Wirken beide Einflüsse gleichzeitig, so erhält man nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen

$$\sigma_o = - \frac{T_I \cdot c}{W_o} - \frac{N}{F} \text{ und } \sigma_u = + \frac{T_I \cdot c}{W_u} - \frac{N}{F}.$$

Die Normalkraft N findet man durch Projektion der am links abgetrennten Teil wirkenden äußeren Kräfte auf die Richtung der an die Schnittstelle gelegten

Tangente (Abb. 244c). Bringt man dann N in bezug auf den links abgetrennten Teil vorläufig als eine Zugkraft an und setzt die Summe aller Kräfte in Richtung von N gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$N + P_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \varphi) + A \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi = 0.$$

Hieraus findet man

$$N = -\left[P_1 \cdot \cos(\alpha_1 + \varphi) + A \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi\right].$$

Das negative Vorzeichen besagt, daß die Normalkraft N nicht, wie zunächst angenommen, eine Zugkraft, sondern eine Druckkraft ist.

Trägt man die errechneten Spannungen σ_o und σ_u in irgend einem Maßstabe als Ordinaten auf und verbindet deren Endpunkte geradlinig miteinander, so entsteht das in Abb. 244a dargestellte Spannungsdiagramm, mit dessen Hilfe die Spannung für jedes Flächenelement des Querschnitts angegeben werden kann.

B. Einfluß senkrechter Lasten.

1. Ermittlung der Stützlinie.

Das unter I entwickelte Verfahren gilt ganz allgemein, also auch für senkrechte Lasten. Es läßt sich jedoch, falls letztere Belastung vorliegt, noch etwas vereinfachen, wie in den folgenden Entwicklungen gezeigt werden soll.

Zwecks Ableitung der vereinfachten Konstruktion zeichnen wir zunächst die Stützlinie nach dem unter I beschriebenen allgemeinen Verfahren (Abb. 245). Dann denken wir uns die Mittelkräfte R_1 und R_2 durch ihre auf A und C bezw. B und C entfallenden Seitenkräfte ersetzt. Die Seitenkräfte S_l und S_r von R_1 erhalten wir mit Hilfe eines mit beliebiger Polweite $\mathfrak{H}_1$ ge-

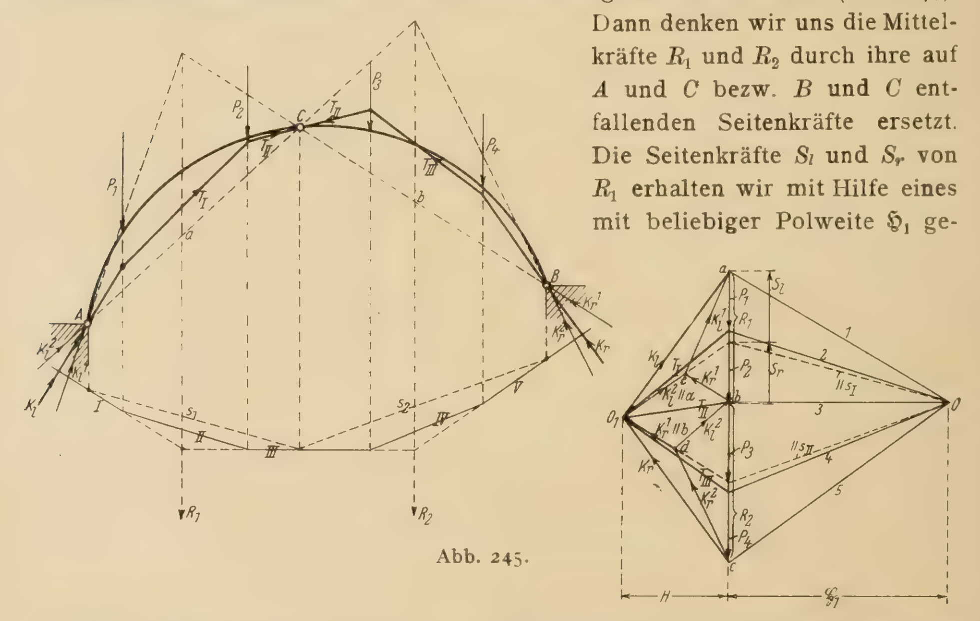
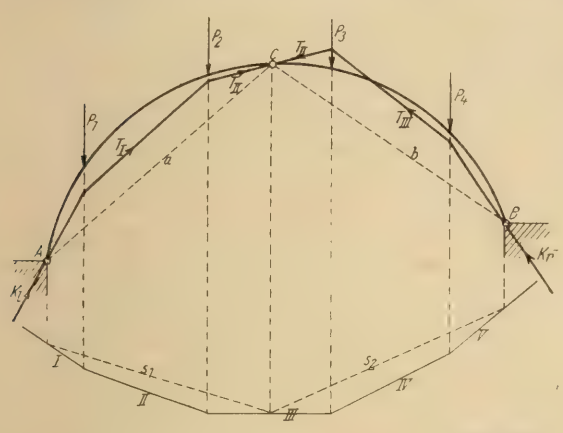


Abb. 245.

zeichneten Seilpolygons I, II, III. Tragen wir in dieses die Schlußlinie s_1 ein und ziehen durch O eine Parallele zu s_1, so schneidet diese von R_1 die Seitenkräfte S_l und S_r ab. Zu demselben Ergebnis muß man aber offenbar auch mit dem zu der Polweite H gezeichneten Seilpolygon K_l, T_{I}, T_{II} gelangen, indem man von dem Pol O_1 aus eine Parallele zur Schlußlinie a dieses Seilpolygons zeichnet, die von R_1 ebenfalls die Seitenkräfte S_l und S_r abschneidet. Die durch O_1 zu a

und durch O zu s_1 gezeichneten Parallelen müssen sich daher auf R_1 schneiden. Genau dasselbe gilt, wenn wir die soeben beschriebene Konstruktion zur Bestimmung der Seitenkräfte von R_2 anwenden, für die durch O_1 und O gezeichneten Parallelen zu b und s_2.

Somit erhalten wir folgende einfache Konstruktion der Stützlinie (Abb. 246): Wir zeichnen zu den Kräften P mit beliebiger Polweite $\mathfrak{H}_1$ das Seilpolygon I, II, III, IV, V, tragen darin die den Gelenkpunkten A, B und C entsprechenden Schlußlinien s_1 und s_2 ein und ziehen $Og \| s_1$ und $Oh \| s_2$. Darauf zeichnen wir durch g eine Parallele zu a und durch h eine Parallele zu b, die sich beide in O_1 schneiden. Hierauf werden



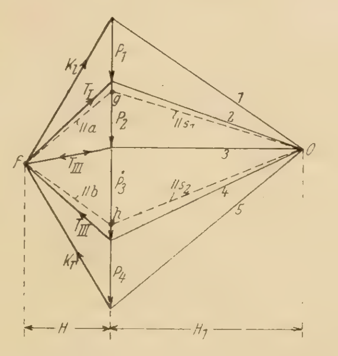


Abb. 246.

die Polstrahlen K_l, T_{I}, T_{II}, T_{III} und K_r und die dazugehörigen parallelen Seilstrahlen eingezeichnet, welche dann die durch die drei Gelenkpunkte A, B und C gehende Stützlinie bilden. Die wagerechte Seitenkraft H der Kräfte K und T nennen wir den Horizontalschub des Dreigelenkbogens, der bei senkrechten Kräften P in jedem Querschnitt gleich groß ist. Die Bestimmung der Spannungsverteilung für irgend einen Querschnitt kann dann wieder nach dem unter I angegebenen Verfahren vorgenommen werden.

2. Ableitung allgemeiner Formeln für die am Dreigelenkbogen wirkenden statischen Größen (Abb. 247).

Wir zerlegen den Kämpferdruck K_l in eine senkrechte Seitenkraft A und in eine in die Richtung der Verbindungslinie der Kämpfergelenke fallende Seitenkraft H' (Abb. 274a) und setzen zur Berechnung von A die Summe der Momente aller am System wirkenden Kräfte in bezug auf das rechte Auflagergelenk $= 0$. Alsdann schneidet H' den Drehpunkt, fällt also aus der Momentengleichung heraus, und wir erhalten

$$A \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 - P_4 \cdot b_4 = 0$$

$$A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4}{l}.$$

Die senkrechte Seitenkraft des Kämpferdrucks K_l ist daher ebenso groß wie der Auflagerdruck A eines mit den Kräften P belasteten geraden Balkens von der Spannweite l (Abb. 247b).

Zur Berechnung von M_m verschieben wir die Kraft H' in ihrer Wirkungslinie, so daß der Angriffspunkt senkrecht unter m liegt, und zerlegen sie dort in die wagerechte Seitenkraft H und in die senkrechte Seitenkraft $H \operatorname{tg} \alpha$, die alsdann durch m geht. Vom links abgetrennten Teil aus erhält man dann

$$M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi - H \cdot y_m.$$

Abb. 247.

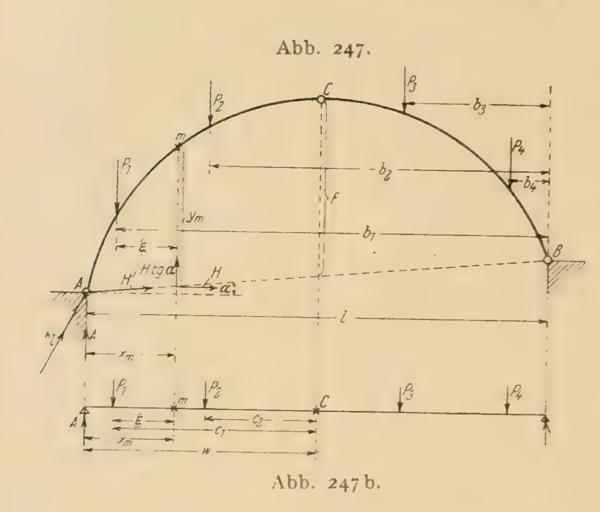


Abb. 247 b.

Hierin ist $A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi$ das Moment für den Punkt m des geraden Balkens (weil, wie nachgewiesen wurde, auch A gleich dem Auflagerdruck des geraden Balkens ist). Dieses sei zur Abkürzung $= M_{om}$ gesetzt. (Der Zeiger o soll in der Folge andeuten, daß es sich um die statische Größe eines einfachen geraden Balkens handelt.)

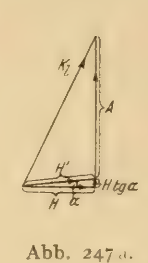


Abb. 247 a.

Aldann wird $$\boldsymbol{M_m = M_{om} - H \cdot y_m}.$$

Zur Berechnung von H benutzen wir die statische Bedingung, daß das Biegungsmoment für das Scheitelgelenk $= 0$ sein muß. Das Biegungsmoment für das Scheitelgelenk C erhält man aber nach der für M_m abgeleiteten Formel, wenn man für den Zeiger m den Zeiger C und für y_m den Hebelarm f einsetzt. Demgemäß muß sein

$$M_C = M_{oC} - H \cdot f = 0.$$

Hieraus findet man $$\boldsymbol{H = \frac{M_{oC}}{f}}.$$

M_{oC} ist nach Abb. 247 b $= A \cdot w - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2$, so daß

$$H = \frac{A \cdot w - P_1 \cdot c_1 - P_2 \cdot c_2}{f}.$$

H' ist sodann $= H \sec \alpha$ (Abb. 247 a).

Nunmehr kann K_l als Mittelkraft von A und H' bestimmt werden.

Zwecks Ableitung einer Formel für die Querkraft Q_m projizieren wir die links vom Querschnitt m wirkenden äußeren Kräfte auf die Richtung des Krümmungsradius in m (vergl. die unter A auf Seite 173 gegebene Definition der Querkraft).

Nach Abb. 248 wirken am links abgetrennten Teil $A - P_1$ und H'. $A - P_1$ ist die Querkraft für den Punkt m eines mit den Kräften P belasteten geraden Balkens (Abb. 248 b). Sie sei $= Q_{om}$ gesetzt. H' werde ersetzt durch seine Seitenkräfte H und $H \operatorname{tg} \alpha$. Alsdann erhalten wir die nach oben gerichteten

Projektionen $Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$ und $H \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m$, sowie die nach unten gerichtete Projektion $H \cdot \sin \varphi_m$ (Abb. 248a). Somit findet man

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m + H \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m$$
$$= Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H (\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m).$$

Bei gleich hoch liegenden Kämpfergelenken wird $\alpha = 0$, so daß

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m.$$

Abb. 248.

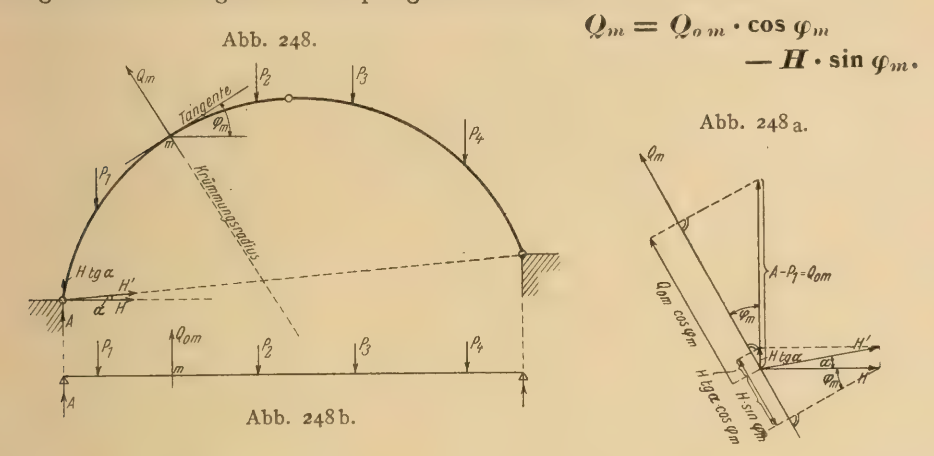


Abb. 248b.

Abb. 248a.

3. Ermittlung der Einflußlinien für die am Dreigelenkbogen wirkenden statischen Größen.

Die Einflußlinie für die senkrechte Seitenkraft A des linken Kämpferdrucks stimmt überein mit der A-Linie eines geraden Balkens, da beide Kräfte infolge einer beliebigen Laststellung gleich groß werden (Abb. 249a).

Die Einflußlinie für den Horizontalschub H ermitteln wir mittels der Formel $H = \frac{M_{oC}}{f}$. Die H-Linie ist daher die mit $\frac{1}{f}$ multiplizierte M_{oC}-Linie, d. h. die mit $\frac{1}{f}$ multiplizierte Einflußlinie für das Moment in dem Punkte C eines geraden Balkens, also ein Dreieck mit der Spitze unter C, welches bestimmt ist durch die unter den Auflagern aufgetragenen Ordinaten $\frac{1\,w}{f}$ bezw. $\frac{1\,w'}{f}$ (Abb. 249b).

Abb. 249.

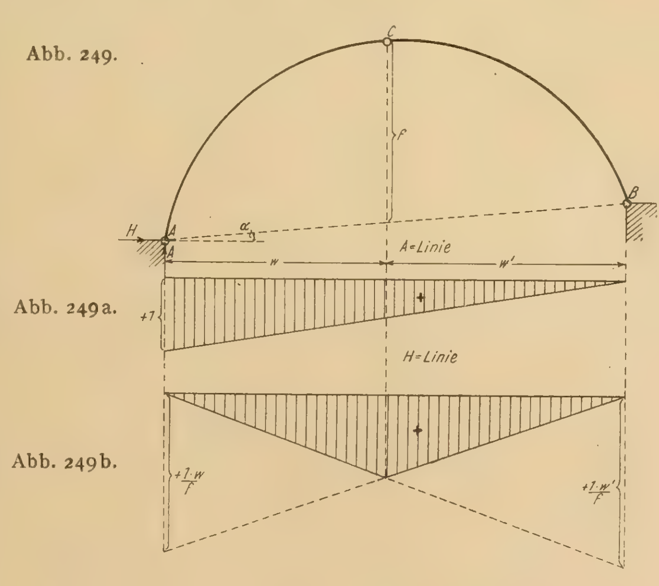


Abb. 249a.

Abb. 249b.

Zur Berechnung der M_m-Linie benutzen wir die Formel

$$M_m = M_{om} - H \cdot y_m.$$

Wir erhalten daher die M_m-Linie, wenn wir von der M_{om}-Linie die mit y_m multiplizierte H-Linie abziehen (Abb. 250a). Die M_{om}-Linie ist die Einflußlinie für das Moment in dem Punkte m eines geraden Balkens von der Spannweite des Dreigelenkbogens, also ein Dreieck mit der Spitze unter m, das bestimmt ist durch die Ordinate $+ 1\, x_m$ unter dem linken Auflager. Die hiervon abzuziehende $H \cdot y_m$-Linie ist ebenfalls ein Dreieck mit der Spitze unter C, das bestimmt ist durch die Ordinate $\frac{1\,w}{f} \cdot y_m$ unter dem linken Auflager. Die Benutzung dieser Ordinate ist aber überflüssig, wenn man die Lage des Nullpunktes e der Einflußlinie angeben kann. Zur Bestimmung dieses Nullpunktes stellen wir die Last 1 t auf der linken Bogenhälfte derart auf, daß ein Kämpferdruck K_l entsteht, der durch m geht. Da dann die rechte Bogenhälfte unbelastet ist, muß der rechte Kämpferdruck K_r die Richtung B–C haben (Abb. 250). Ferner müssen K_l, K_r und 1 t sich in einem Punkte, dem Punkte E, schneiden, da sie miteinander im Gleichgewicht sind. Berechnet man für diese Laststellung das Moment M_m von der linken Seite aus, so wird, da der Hebelarm von K_l für den Punkt $m = 0$ ist, $M_m = K_l \cdot 0 = 0$. Senkrecht unter E liegt daher der Nullpunkt e der Einflußlinie. Mit Hilfe dieses Nullpunktes ist dann nach Zeichnung der M_{om}-Linie die $H \cdot y_m$-Linie bestimmt (Abb. 250a).

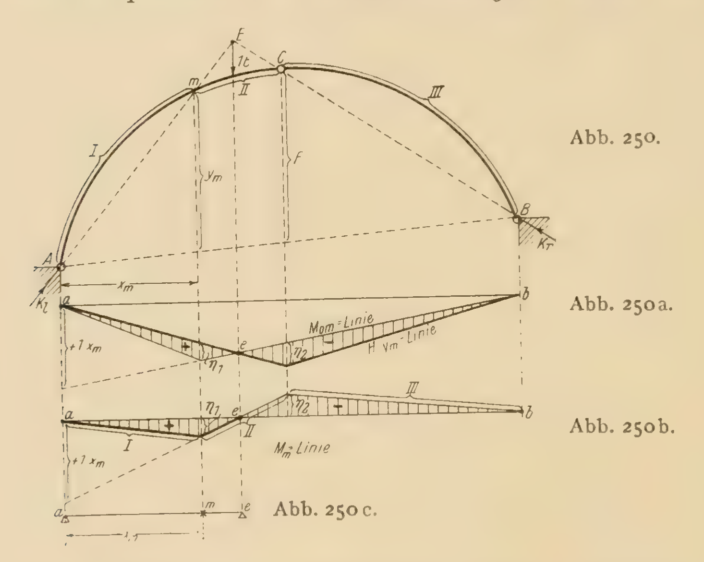


Abb. 250.

Abb. 250a.

Abb. 250b.

Abb. 250c.

Trägt man dann die Ordinaten η_1 und η_2 der Einflußlinie noch von einer Geraden ab, so erhält man die in Abb. 250b dargestellte Form der M_m-Linie. Der zwischen a und e liegende Teil der Einflußlinie stimmt dann überein mit der M_m-Linie eines geraden Balkens von der Spannweite a—e (Abb. 250c). Somit ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Einflußlinie: Man ermittle zunächst nach dem soeben beschriebenen Verfahren den Punkt E, nehme dann einen einfachen Balken a—e an und zeichne für diesen die M_m-Linie. Hierauf vervollständige man die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben. Da der Dreigelenkbogen durch den durch m geführten Schnitt in drei starre Scheiben zerfällt, so muß auch die Einflußlinie aus drei Geraden bestehen.[1]

[1]) Vergl. Müller-Breslau, Graphische Statik, Bd. I, § 25, Die Methode des stellvertretenden Balkens.

Entsprechend werden die Einflußlinien für Kernpunktmomente bestimmt. An die Stelle des Punktes m treten dann die Kernpunkte o und u (vergl. die Abb. 251 u. 252).

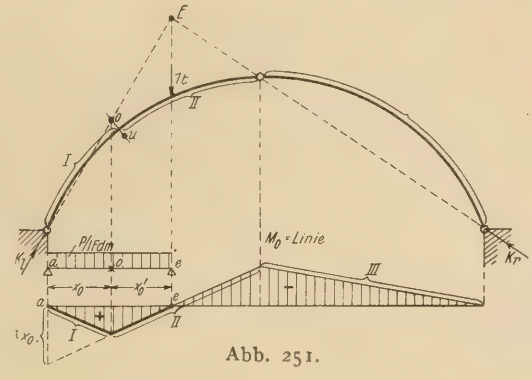


Abb. 251.

Ist dann z. B. $\sigma_u^{\max}$, d. h. die größte Zugspannung σ_u, infolge gleichmäßig verteilter Verkehrsbelastung p/lfd. m gesucht, so benutzen wir die Formel

$$\sigma_u = + \frac{M_o}{W_u}$$

und stellen dann die Verkehrslast nur über dem positiven Teil der M_o-Linie auf (Abb. 251). Sodann wird $\sigma_u^{\max} = + \frac{p \cdot F_+}{W_u}$ (vergl. Seite 84), worin F_+ der Flächeninhalt des positiven Teils der Einflußfläche ist:

$$= x_o \cdot \frac{x_o + x_o'}{2} - x_o \cdot \frac{x_o}{2} = \frac{x_o}{2} (x_o + x_o' - x_o) = \frac{x_o \cdot x_o'}{2}.$$

Daher

$$\sigma_u^{\max} = + \frac{p \cdot x_o \cdot x_o'}{2 W_u}.$$

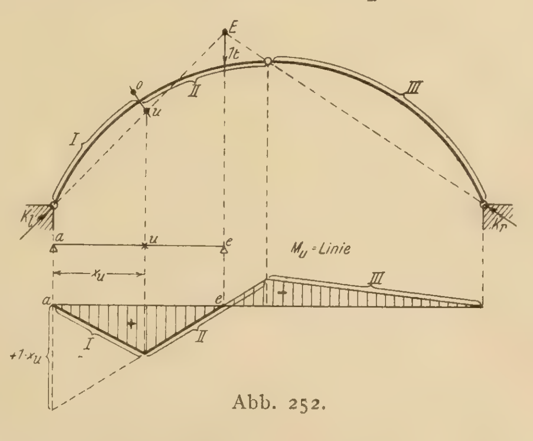


Abb. 252.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man das Moment M_o als das Biegungsmoment für den Punkt o des mit p/lfd. m belasteten Balkens a—e auffaßt. Man erhält dann sofort $M_o = \frac{p \cdot x_o \cdot x_o'}{2}$ (vergl. Seite 66), so daß

$$\sigma_u^{\max} = + \frac{M_o}{W_u} = + \frac{p \cdot x_o \cdot x_o'}{2 W_u}.$$

Das Moment M_o infolge des Eigengewichts g/lfd. m ist, da dieses über dem ganzen Dreigelenkbogen wirkt, $= g (F_+ - F_-)$ (vergl. Seite 84). Der Gesamtwert $\sigma_u^{\max}$ ist daher

$$= \frac{1}{W_u} \left[\frac{p \cdot x_o \cdot x_o'}{2} + g (F_+ - F_-) \right].$$

Zur Berechnung der Q_m-Linie benutzen wir die Formel

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H (\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m).$$

Man erhält daher die Q_m-Linie, wenn man von der mit $\cos \varphi_m$ multiplizierten Q_{om}-Linie die mit $(\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m)$ multiplizierte H-Linie abzieht, die nach Zeichnung der $Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$-Linie durch den Nullpunkt e bestimmt ist (Abb. 253a), dessen Lage folgendermaßen ermittelt wird: Wir stellen die Last 1 t auf der linken Bogenhälfte derart auf, daß ein Kämpferdruck K_l entsteht, der senkrecht zum Krümmungsradius im Punkte m oder parallel zur Tangente an die Bogenachse in m gerichtet ist (Abb. 253). Da dann die rechte

Bogenhälfte unbelastet ist, so muß der rechte Kämpferdruck K_r die Richtung $B-C$ haben. Ferner müssen sich K_l, K_r und 1 t in einem Punkte (E) schneiden, da sie miteinander im Gleichgewicht sind. Berechnet man für diese Laststellung die Querkraft Q_m vom links abgetrennten Teil aus, so wird, da die einzige dort wirkende Kraft K_l senkrecht zum Krümmungsradius gerichtet ist, ihre Projektion auf dessen Richtung $= 0$, d. h. $Q_m = 0$ (vergl. die Definition der Querkraft auf Seite 173). Senkrecht unter E liegt daher der Nullpunkt e, und zwar auf der $Q_{0m} \cdot \cos \varphi_m$ - Linie. Damit ist aber auch die von der $Q_{0m} \cdot \cos \varphi_m$ - Linie abzuziehende $H (\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m)$ - Linie bestimmt. Trägt man dann die Ordinaten η_1, η_2 und η_3 der Einflußlinie noch von einer Wagerechten ab, so erhält man die in Abb. 253b dargestellte Form der Q_m-Linie. Der zwischen a und e befindliche Teil der Einflußlinie stimmt mit der $Q_m \cdot \cos \varphi_m$ - Linie eines geraden Balkens von der Spannweite $a—e$ überein (Abb. 253c). Somit ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Einflußlinie: Man ermittle zunächst nach dem soeben beschriebenen Verfahren den Punkt E, nehme dann einen einfachen Balken $a—e$ an und zeichne für diesen die $Q_m \cdot \cos \varphi_m$ - Linie. Hierauf vervollständige man die Einflußlinie mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben. Da der Dreigelenkbogen durch den durch m geführten Schnitt in drei starre Scheiben zerlegt ist, muß auch die Einflußlinie aus drei Geraden bestehen.

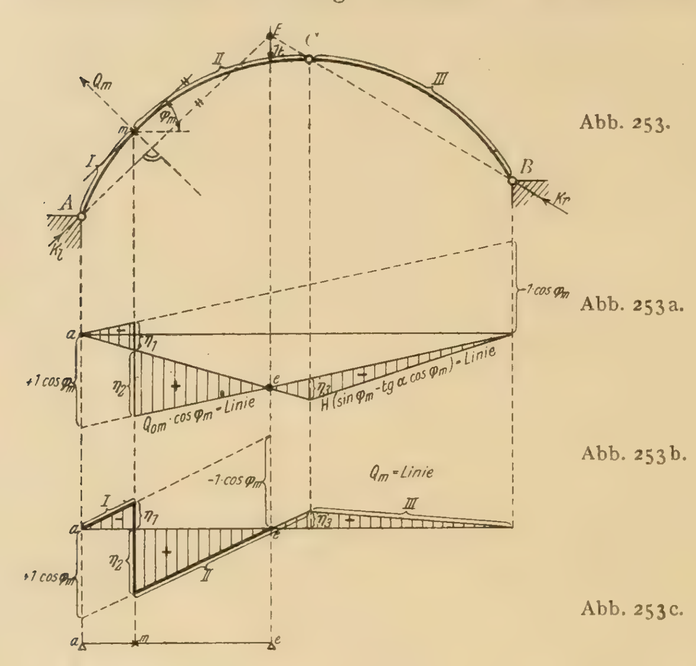


Abb. 253.

Abb. 253a.

Abb. 253b.

Abb. 253c.

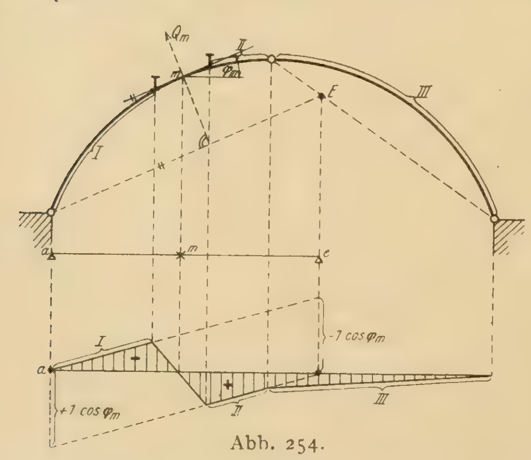


Abb. 254.

Häufig wird es vorkommen, daß der Punkt E rechts vom Scheitelgelenk liegt. Auch für diesen Fall ist die vorhin beschriebene Konstruktion sinngemäß anzuwenden (Abb. 254).

Der Punkt e ist der Nullpunkt der zur Scheibe II gehörenden Einflußgeraden, die aber nur unter der Scheibe II benutzt werden darf. Man beachte noch, daß hier der Punkt m zwischen zwei Querträgern liegt, zwischen denen die Einflußlinie geradlinig verlaufen muß.

2. Der fachwerkartige Dreigelenkbogen (Einflußlinien).

Die Berechnung der Größtwerte der Stabspannkräfte erfolgt am zweckmäßigsten mit Hilfe von Einflußlinien, die nachfolgend hergeleitet werden sollen.

Die O_m-Linie wird mit Hilfe der Formel $O_m = -\frac{M_m}{r_m}$ ermittelt, ist daher gleich der mit $-\frac{1}{r_m}$ multiplizierten M_m-Linie (Abb. 255a).

Zwecks Bestimmung einer D-Linie leiten wir uns zunächst für eine beliebige Belastung eine bequeme Formel für die Spannkraft D her (Abb. 256). Wir führen den Ritterschen Schnitt und benutzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt i. Es muß daher sein:

$$D \cdot r_i + H \cdot y_i + P_1 \cdot b_i - A \cdot x_i = 0,$$

woraus

$$D = \frac{A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i}{r_i} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}.$$

Abb. 255.

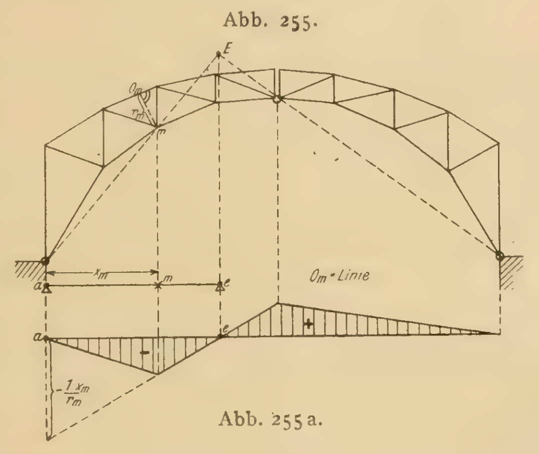


Abb. 255a.

Hierin ist $\frac{A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i}{r_i}$ die Diagonalspannkraft für einen einfachen Balken von der Spannweite des Dreigelenkbogens, wie aus Abb. 256a zu ersehen ist. Bezeichnet man diese Spannkraft mit D_o und benutzt eine Momentengleichung für den Punkt i, so erhält man

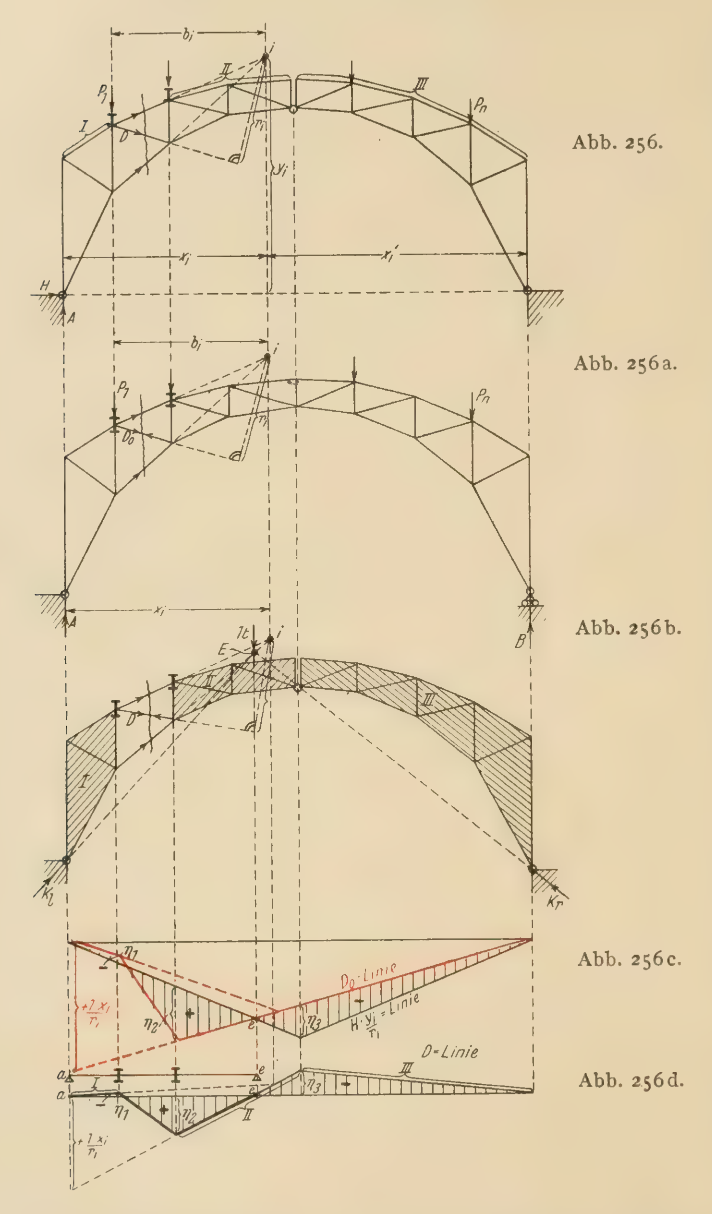
$$A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i - D_o \cdot r_i = 0, \text{ woraus } D_o = \frac{A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i}{r_i}.$$

Mithin wird

$$D = D_o - \frac{H \cdot y_i}{r_i}.$$

Man erhält daher die D-Linie, wenn man von der D_o-Linie (in Abb. 256c in roter Farbe gezeichnet) die $\frac{H \cdot y_i}{r_i}$-Linie abzieht. Letztere ist hierbei wieder durch den Nullpunkt e bestimmt, der senkrecht unter der Laststellung liegt, die in D die Spannkraft o hervorbringt. Diese Laststellung finden wir folgendermaßen: Wir stellen die Last 1 t auf der linken Bogenhälfte derart auf, daß ein Kämpferdruck K_l entsteht, der durch i geht (Abb. 256b). Da dann die rechte Bogenhälfte unbelastet ist, muß der rechte Kämpferdruck K_r durch das Scheitelgelenk gehen und sich mit K_l und 1 t in einem Punkte (E) schneiden, da alle drei Kräfte miteinander im Gleichwicht sind. Setzt man

nun für diese Belastung am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt i an, so muß, da K_l durch i geht, $D \cdot r_i = 0$ sein. Da r_i nicht $= 0$ ist, muß $D = 0$ werden. Senkrecht unter der Last liegt daher der Nullpunkt e der Einflußlinie.



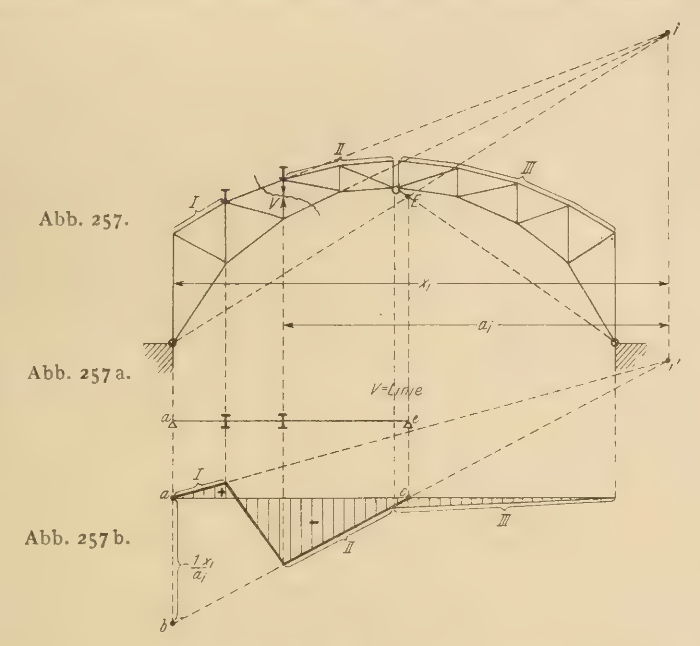
Trägt man dann noch die Ordinaten η_1, η_2 und η_3 von einer Wagerechten ab, so erhält man die in Abb. 256d dargestellte Einflußlinie. Der zwischen a und e befindliche Teil dieser Einflußlinie hat dabei die Form der D-Linie für einen einfachen Balken von der Spannweite $a-e$. Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Einflußlinie:

Man ermittle zunächst nach der soeben beschriebenen Konstruktion den Punkt E, zeichne dann die D-Linie für einen einfachen Balken $a-e$ und vervollständige die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben. Sinngemäß sind die Einflußlinien für Spannkräfte in den Vertikalen zu behandeln (Abb. 257).

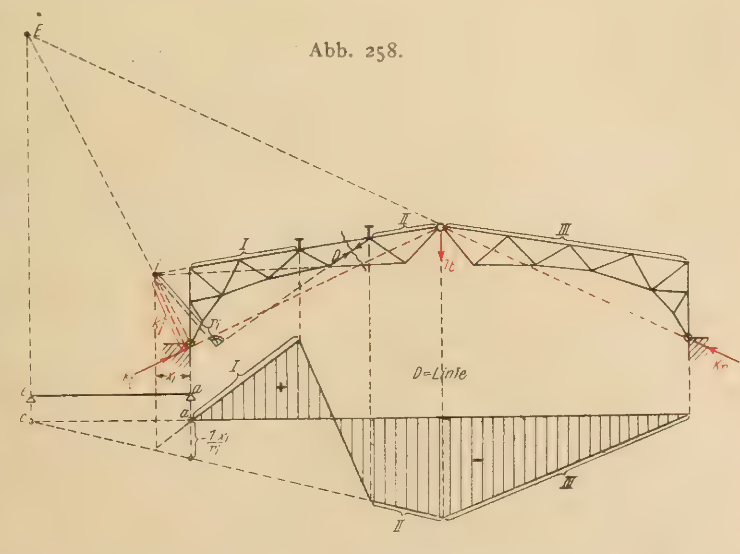
Nach Bestimmung des Punktes E zeichne man zunächst für einen einfachen Balken $a-e$ (Abb. 257a) die V-Linie, trage also unter dem Auflager a die Ordinate $-\frac{1\,x_i}{a_i}$ auf und zeichne die Gerade $b-e$ (Abb. 257b). Diese bringe man dann zum Schnitt mit der Senkrechten durch i in i', verbinde i' mit a, lote die Querträger des Schnittfeldes auf die so gefundenen Geraden

herunter und verbinde diese Punkte geradlinig miteinander. Alsdann vervollständige man die Einflußlinie mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben.

In den Abb. 258 u. 259 sind die D-Linien noch für andere mögliche Lagen der Punkte E bezw. i dargestellt. Man merke sich, daß die durch den Nullpunkt e gehende, der starren Scheibe II entsprechende Gerade II von der Senkrechten durch das Auflager a des stellvertretenden Balkens $a—e$ die Ordinate $\frac{x_i}{r_i}$ abschneiden und sich mit der durch a gehenden, der starren Scheibe I entsprechenden Geraden I senkrecht unter i schneiden muß (vergl. namentlich Abb. 258, wo im Gegensatz zu den bisherigen Einflußlinien a rechts und e links liegt).



Ist man im Zweifel über die Vorzeichen der Einflußlinie, so bringe man die Last 1 t im Scheitelgelenk an, wodurch die in den Abb. 258 u. 259 in roter Farbe eingezeichneten Kämpferdrücke K_l und K_r entstehen, und berechne am links abgetrennten Teil die Spannkraft D durch eine Momentengleichung für den Drehpunkt i. So ergibt sich z. B. für Abb. 258



$$D \cdot r_i + K_l \cdot k_i = 0, \text{ so daß } D = -\frac{K_l \cdot k_i}{r_i}$$

und für Abb. 259

$$D \cdot r_i - K_l \cdot k_i = 0, \text{ woraus } D = + K_l \cdot \frac{k_i}{r_i}.$$

D. h. senkrecht unter der Last 1 t muß das Vorzeichen der Ordinate in Abb. 258 negativ und in Abb. 259 positiv sein.

Endlich möge noch der Fall angenommen werden, daß i im Unendlichen liegt. Der Fall tritt ein, wenn die vom Ritterschen Schnitt getroffenen Gurtstäbe parallel verlaufen (Abb. 260). Alsdann ist das bisherige Verfahren nicht mehr anwendbar, da dann x_i und r_i unendlich groß werden.

Abb. 259.

Wir leiten uns zunächst für eine beliebige Belastung eine für die Bestimmung der Einflußlinie bequeme Formel her, und zwar mittels der am links abgetrennten Teil angesetzten Gleichgewichtsbedingung: „Summe aller Kräfte senkrecht zur Richtung der vom Schnitt getroffenen Gurtstäbe muß = 0 sein".

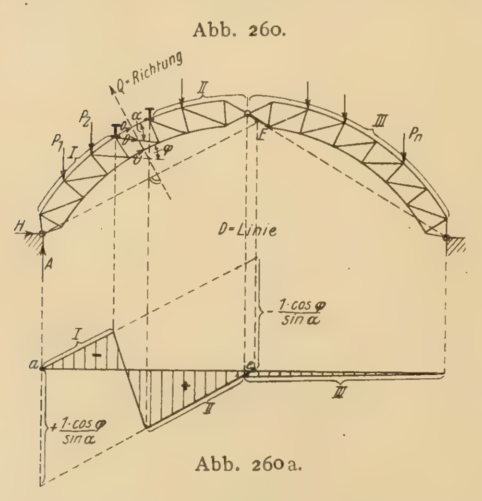


Abb. 260.

Abb. 260a.

Dann fallen O und U aus der Gleichgewichtsbedingung heraus und die Projektion der am abgetrennten Teil wirkenden äußeren Kräfte auf die zu den Gurtstäben senkrechte Richtung ist gleich der Querkraft für das Schnittfeld. Da diese nach oben (vergl. § 9, 1, A, Seite 173), die Seitenkraft $D \cdot \sin \alpha$ von der vorläufig als Zugkraft angenommenen Spannkraft D aber nach unten gerichtet ist, so erhalten wir die Gleichung

$$D \cdot \sin \alpha - Q = 0$$

$$D = + \frac{Q}{\sin \alpha}.$$

Die D-Linie (Abb. 260a) ist daher die mit $\frac{1}{\sin \alpha}$ multiplizierte Q-Linie (vergl. auch Abb. 254).

Sinngemäß wird die V-Linie (Abb. 261) hergeleitet. Es sei hier angenommen, daß V senkrecht zur Richtung der vom Ritterschen Schnitt getroffenen Gurtstäbe verläuft. Die am links abgetrennten Teil angesetzte Gleichgewichtsbedingung „Summe aller Kräfte senkrecht zu den vom Ritterschen Schnitt getroffenen parallelen Gurtstäben = o" liefert dann die Gleichung

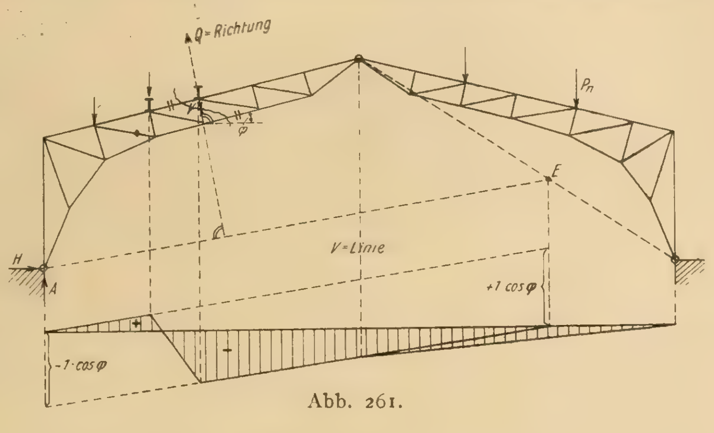


Abb. 261.

$$V + Q = 0; \quad V = -Q.$$

Die V-Linie ist daher die mit -1 multiplizierte Q-Linie (vergl. auch Abb. 254).

Ausnahmefälle.

Zur Berechnung von V_1 führen wir den Schnitt I—I (Abb. 262) und setzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Drehpunkt 2 an

$$V_1 \cdot a + A \cdot a - H \cdot y_2 = 0.$$

$$V_1 = -A + H \cdot \frac{y_2}{a}.$$

Abb. 262.

Man erhält also die V_1-Linie, wenn man zu der mit -1 multiplizierten A-Linie die $H \cdot \frac{y_2}{a}$-Linie addiert (Abbild. 262a). Letztere ist durch den Nullpunkt e bestimmt, der senkrecht unter E liegt. Bringt man nämlich in E die Last 1 t an, die die Kämpferdrücke K_l und K_r hervorruft, von denen K_l durch den Momentendrehpunkt 2 geht, und benutzt am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Drehpunkt 2, so erhält man $V_1 \cdot a = 0$. Da a

Abb. 262 a.

Abb. 262 b.

Abb. 262 c.

Abb. 262 d.

nicht $=0$ ist, muß $V_1 = 0$ werden. Die Last 1 t in E bringt daher $V_1 = 0$ hervor, so daß senkrecht unter E der Nullpunkt e liegt.

Zur Berechnung von U_1 setzen wir an demselben abgetrennten Teil die Summe aller wagerechten Kräfte $=0$: $U_1 \cdot \cos\gamma_1 + H = 0$; $U_1 = -H \cdot \sec\gamma_1$. Die U_1-Linie ist daher die mit $-\sec\gamma_1$ multiplizierte H-Linie (Abb. 262b).

Zur Bestimmung von U_2 führen wir den Schnitt II—II und benutzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt 1.

$$U_2 \cdot r_1 + H \cdot y_1 = 0; \quad U_2 = -\frac{H \cdot y_1}{r_1}.$$

Die U_2-Linie ist daher die mit $-\frac{y_1}{r_1}$ multiplizierte H-Linie (Abb. 262c).

Zur Berechnung von D_1 setzen wir an demselben abgetrennten Teil die Summe der Momente für den Punkt $i = 0$. Es muß also sein

$$D \cdot r_i + H \cdot y_i = 0; \quad D = -\frac{H \cdot y_i}{r_i}.$$

Die D-Linie ist daher die mit $-\frac{y_i}{r_i}$ multiplizierte H-Linie (Abb. 262d). Auch die D_2-Linie weicht von der normalen Form der D-Linie ab (Abb. 263). Steht die Last 1 t irgendwo rechts vom Schnittfeld, so erhalten wir durch eine am links abgetrennten Teil für den Punkt i angesetzte Momentengleichung

$$D_2 \cdot r_i + H \cdot y_i - A \cdot x_i = 0$$

$$D_2 = \frac{A \cdot x_i}{r_i} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}.$$

Rechts vom Schnittfeld ist daher die D_2-Linie die Differenz der $\frac{A \cdot x_i}{r_i}$-Linie und der $\frac{H \cdot y_i}{r_i}$-Linie. Letztere ist nach Zeichnung der $\frac{A \cdot x_i}{r_i}$-Linie durch den senkrecht unter E liegenden Nullpunkt e bestimmt (Abbild. 263a). Die durch E gehende Last 1 t ruft nämlich die Kämpferdrücke K_l und K_r hervor, von denen K_l durch i geht. Die am links abgetrennten Teil für den Punkt i aufgestellte Momentengleichung lautet sodann $D_2 \cdot r_i = 0$. Da r_i nicht $=0$ ist, muß $D_2 = 0$ sein. Senkrecht unter E liegt daher der Nullpunkt e der Einflußlinie. Die auf dem Querträger l stehende Last 1 t ruft ebenfalls $D_2 = 0$ hervor, da diese Last senkrecht über dem Widerlager steht, den Träger also nicht belastet.

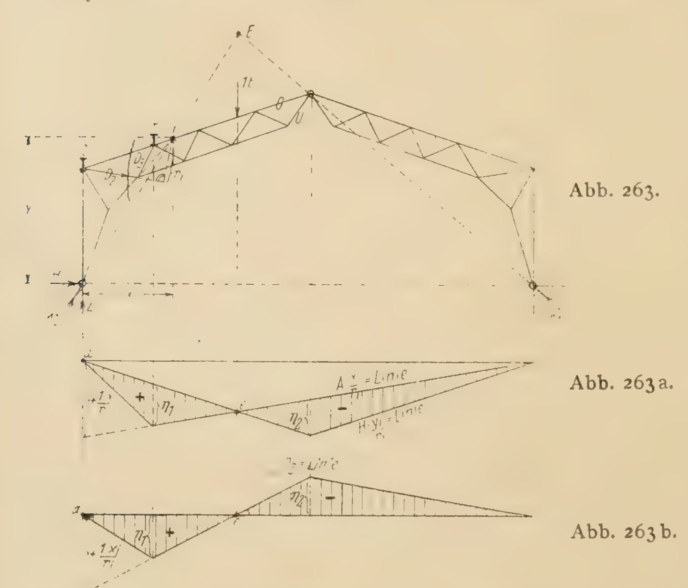


Abb. 263.

Abb. 263a.

Abb. 263b.

Zwischen den Querträgern l und r muß dann die Einflußlinie geradlinig verlaufen.

Trägt man die Ordinaten η_1 und η_2 von einer Wagerechten ab, so entsteht die in Abb. 263b dargestellte Form der Einflußlinie.

Zur Übung wird dem Leser noch empfohlen, auch die Einflußlinien für D_3, O und U (Abb. 263) herzuleiten, was nach dem Vorangegangenen keine Schwierigkeiten mehr bereitet.

3. Der Dreigelenkbogen mit überkragenden Enden und Schleppträgern (Einflußlinien).

In Abb. 264 ist ein Dreigelenkbogen mit überkragenden Enden dargestellt, mit denen auf beiden Seiten Schleppträger gelenkig verbunden sind. Die den Gelenken gegenüber liegenden Gurtstäbe müssen, damit die Schleppträger sich

Abb. 264.

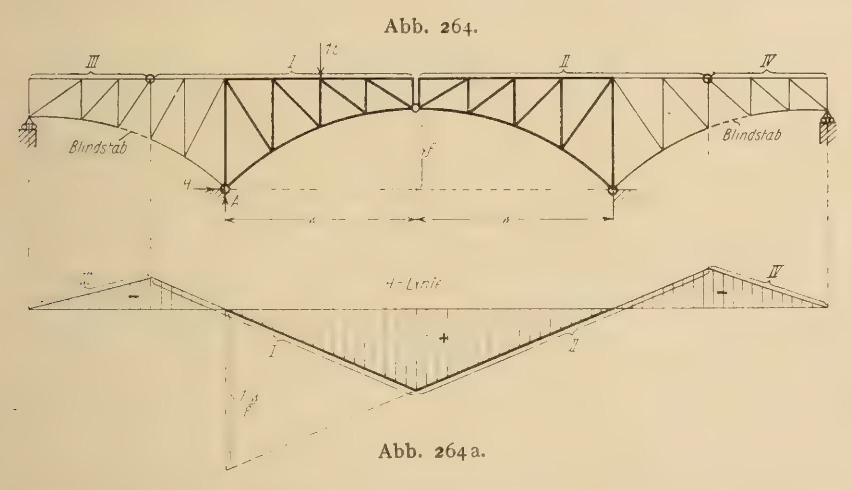


Abb. 264a.

um die mit ihnen verbundenen Kragträger drehen können, als Blindstäbe ausgebildet sein, d. h. als Stäbe, die an ihrem einen Ende fest vernietet sind,

Abb. 265.

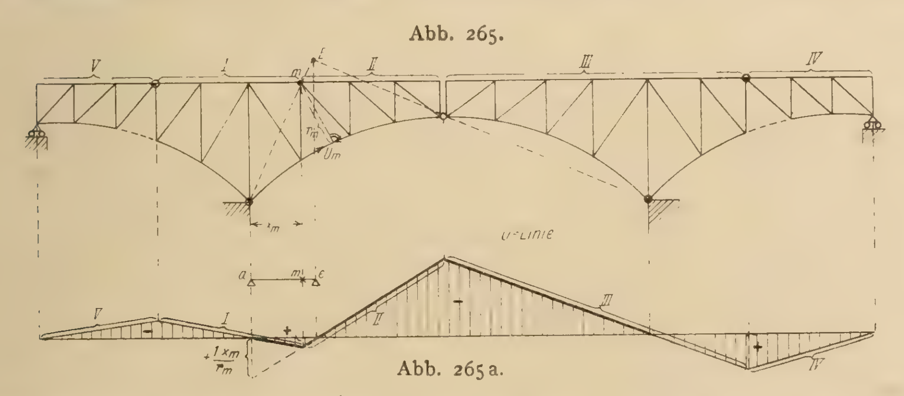


Abb. 265a.

während das andere Ende durch Schraubenbolzen angeschlossen ist, die durch Langlöcher gehen. Dadurch bleiben diese Stäbe spannungslos und ermöglichen die Drehung von Schlepp- und Kragträger gegeneinander. Statisch sind sie

daher als nicht vorhanden anzusehen, werden also nur des besseren Aussehens halber angeordnet.

Steht eine Last über der Mittelöffnung, so werden die Kragarme und Schleppträger spannungslos, da sie unbelastet sind. Der in Abb. 264 durch kräftige Linien dargestellte Teil des Systems wird dann wie ein gewöhnlicher Dreigelenkbogen beansprucht. Es gelten daher für die an diesem Teil in

Abb. 266.

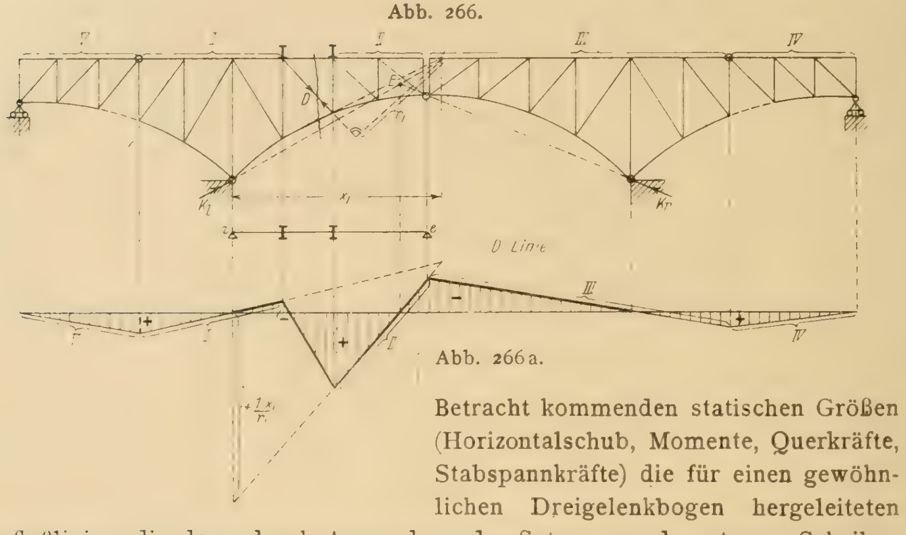


Abb. 266a.

Betracht kommenden statischen Größen (Horizontalschub, Momente, Querkräfte, Stabspannkräfte) die für einen gewöhnlichen Dreigelenkbogen hergeleiteten Einflußlinien, die dann durch Anwendung des Satzes von den starren Scheiben für die Kragarme und Schleppträger leicht vervollständigt werden können. Man zeichne daher zunächst die der betreffenden statischen Größe des Dreigelenkbogens entsprechende Einflußlinie und verlängere dann die Einflußgeraden soweit, wie die zugehörigen starren Scheiben reichen, wodurch zugleich auch die den Schleppträgern entsprechenden Einflußgeraden bestimmt sind.

Nach diesem Verfahren wurde die in Abb. 264a dargestellte H-Linie gefunden. Die Abb. 265a u. 266a zeigen die Einflußlinien für eine Untergurt- und Diagonalspannkraft.

4. Der vollwandige Dreigelenkbogen mit aufgehobenem Horizontalschub.

A. Der Bogen mit wagerechtem Zugband (Abb. 267).

Der Bogen erhält ein festes und ein bewegliches Auflager, so daß infolge senkrechter Lasten nur senkrechte Auflagerdrücke entstehen, die mit den Auflagerdrücken eines gewöhnlichen Balkens auf zwei Stützen übereinstimmen. Ein Horizontalschub tritt nicht auf. Er ist hier ersetzt durch die Spannkraft H im Zugband. Sämtliche für den Dreigelenkbogen hergeleiteten Einflußlinien gelten auch hier, da die Formeln für die entsprechenden statischen Größen beider Systeme miteinander übereinstimmen. So ist z. B.

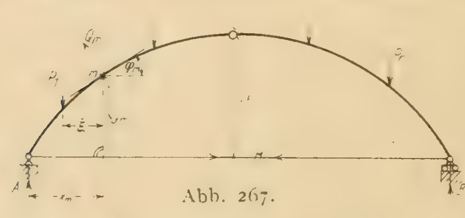


Abb. 267.

$$M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi - H \cdot y_m = \boldsymbol{M_{om} - H \cdot y_m}$$

$$M_C = M_{oC} - H \cdot f = 0; \quad \boldsymbol{H = \frac{M_{oC}}{f}}$$

$$\boldsymbol{Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m.}$$

B. Der Bogen mit gesprengtem Zugband.

1. Ableitung allgemeiner Formeln für die statischen Größen.

Die Auflagerdrücke A und B stimmen wieder mit den Auflagerdrücken eines einfachen Balkens überein. Zur Berechnung von M_m führen wir durch m einen senkrechten Schnitt (Abb. 268), zerlegen die vom Schnitt getroffene Spannkraft S im Zugband senkrecht unter m in die beiden Seitenkräfte H (wagerecht) und $H \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (senkrecht) und berechnen M_m vom links abgetrennten Teil aus. Da $H \cdot \operatorname{tg} \alpha$ durch m geht, also keinen Einfluß auf M_m hat, erhalten wir

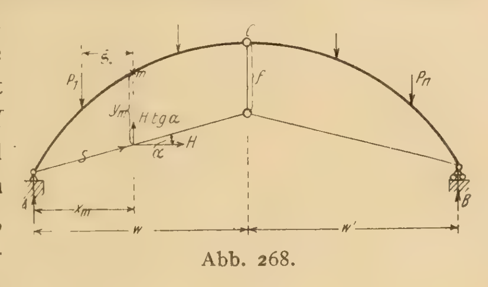


Abb. 268.

$$M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot \xi - H \cdot y_m = \boldsymbol{M_{om} - H \cdot y_m}.$$

Für den Gelenkpunkt C erhält man sinngemäß das Moment $M_C = M_{oC} - H \cdot f$. Da das Biegungsmoment im Scheitelgelenk $= 0$ sein muß, so besteht die Gleichung

$$M_{oC} - H \cdot f = 0; \quad \boldsymbol{H = \frac{M_{oC}}{f}}.$$

Für die Spannkraft S im Zugband findet man sodann $S = H \cdot \sec \alpha$.

Die Querkraft Q_m erhalten wir durch Projektion der am links abgetrennten Teil wirkenden Kräfte auf die Richtung des Krümmungsradius in m (Abb. 269a; vergl. auch Abb. 248a, Seite 177). Demnach wird

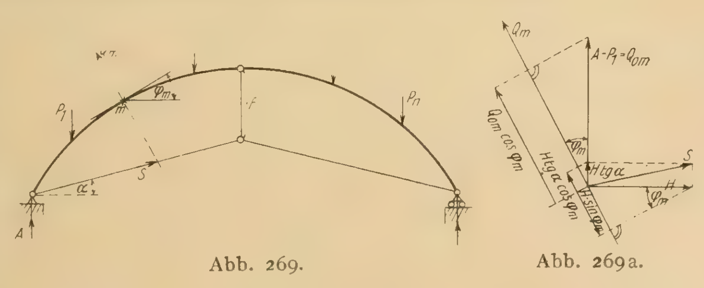


Abb. 269. Abb. 269a.

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m + H \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m$$
$$\boldsymbol{= Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H (\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m).}$$

2. Berechnung der Einflußlinien für die statischen Größen.

a) Die H-Linie.

Da $H = \frac{M_{oC}}{f}$, so ist die H-Linie die mit $\frac{1}{f}$ multiplizierte M_{oC}-Linie (Abb. 270a), d. i. ein Dreieck mit der Spitze unter C, das bestimmt ist durch die Ordinate $\frac{1\,w}{f}$ unter dem linken bezw. $\frac{1\,w'}{f}$ unter dem rechten Auflager.

Da $S = H \cdot \sec\alpha$, so ist die S-Linie die mit $\sec\alpha$ multiplizierte H-Linie. An die Stelle der Ordinaten $\frac{1\,w}{f}$ bezw. $\frac{1\,w'}{f}$ treten daher die Ordinaten $\frac{1\,w}{f} \cdot \sec\alpha$ bezw. $\frac{1\,w'}{f} \cdot \sec\alpha$.

Abb. 270.

Abb. 270a.

Abb. 270b.

Führt man einen Schnitt um den Knoten t, so müssen sich an dem abgetrennten Knoten die Kräfte S, V und S_1 das Gleichgewicht halten, d. h. ein Dreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden (Abb. 270b). Es wird daher

$$V = H \cdot \operatorname{tg}\alpha + H \cdot \operatorname{tg}\beta$$
$$= H(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

Die V-Linie ist daher die mit $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ multiplizierte H-Linie. An die Stelle der Ordinaten $\frac{1\,w}{f}$ bezw. $\frac{1\,w'}{f}$ der H-Linie treten daher die Ordinaten

$$\frac{w}{f}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) \text{ bezw. } \frac{w'}{f}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

b) Die M_m-Linie.

Da $M_m = M_{om} - H \cdot y_m$, so erhalten wir die M_m-Linie, wenn wir von der M_{om}-Linie die $H \cdot y_m$-Linie abziehen (Abb. 271 a). Letztere ist wieder durch den Nullpunkt e bestimmt, der senkrecht unter E liegt (Abb. 271).

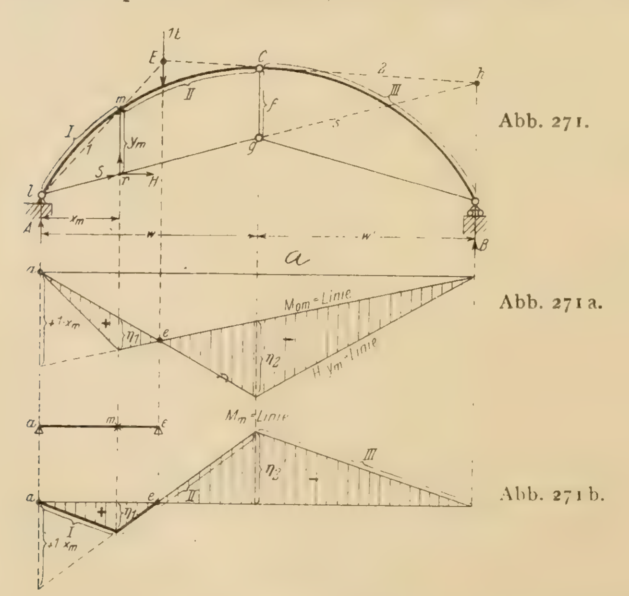


Abb. 271.

Abb. 271 a.

Abb. 271 b.

Berechnet man nämlich das Moment M_{om} infolge der Last 1 t in E mit Hilfe eines Seilpolygons mit den Seilstrahlen 1 und 2 und der Schlußlinie s und zieht in dem zugehörigen Kräftepolygon (Abb. 271 c) durch den Pol O die Parallele

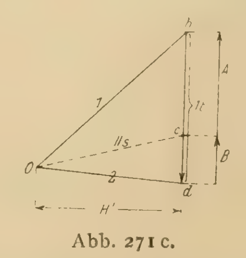


Abb. 271 c.

zu s, so schneidet diese von der Last 1 t die Auflagerdrücke A und B ab. In den ähnlichen Dreiecken $l\,m\,r$ und $O\,b\,c$ (Abb. 271 u. 271 c) verhält sich nun

$$\frac{H'}{A} = \frac{x_m}{y_m}; \text{ daher } H' \cdot y_m = A \cdot x_m = M_{om}.$$

Nun ist aber

$$M_m = M_{om} - H \cdot y_m = A \cdot x_m - H \cdot y_m = H' \cdot y_m - H \cdot y_m.$$

Ferner ist $$H = \frac{M_{oC}}{f} = \frac{B \cdot w'}{f}$$

und in den ähnlichen Dreiecken ghC und Ocd verhält sich

$$\frac{H'}{B} = \frac{w'}{f}, \text{ so daß } \boldsymbol{H'} = \frac{B \cdot w'}{f} = \boldsymbol{H}.$$

Daher $$M_m = H' \cdot y_m - H \cdot y_m = H \cdot y_m - H \cdot y_m = 0.$$

Die Last 1 t in E hat daher das Moment $M_m = 0$ zur Folge. Senkrecht unter E liegt also der Nullpunkt der M_m-Linie.

Trägt man dann die Ordinaten η_1 und η_2 von einer Wagerechten ab, so entsteht die in Abb. 271b dargestellte Form der Einflußlinie. Der zwischen a und e gelegene Teil der Einflußlinie hat dabei die Form der M_m-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite a—e. Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion der Einflußlinie:

Man ermittle zunächst nach der in Abb. 271 dargestellten Konstruktion den Punkt E, nehme dann einen einfachen Balken a–e an und zeichne die M_m-Linie für diesen Balken. Alsdann vervollständige man die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben.

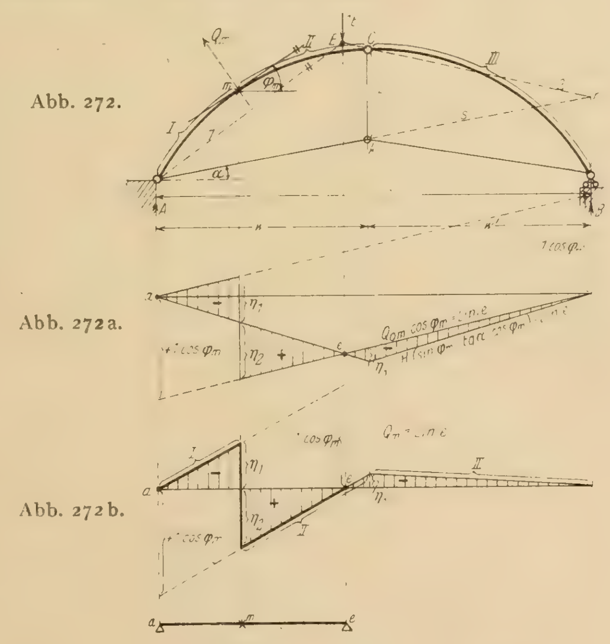


Abb. 272.

Abb. 272a.

Abb. 272b.

c) Die Q_m-Linie.

Die Q_m-Linie finden wir mittels der Formel

$$Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H(\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m),$$

indem wir von der $Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$-Linie die $H(\sin \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m)$-Linie abziehen. Letztere ist nach Zeichnung der $Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$-Linie bestimmt, sobald der Nullpunkt e der Einflußlinie bekannt ist. Dieser liegt senkrecht unter E (die Konstruktion von E ist aus Abb. 272 ersichtlich), wie nachfolgend bewiesen wird. Wir stellen die Last 1 t in E auf und zeichnen das Seilpolygon 1—2 (Abb. 272) zu dem dazugehörigen Kräftepolygon mit der Polweite H' (Abb. 272c).

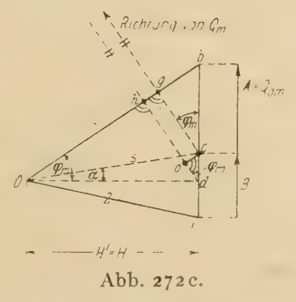


Abb. 272c.

Ziehen wir dann durch den Pol des Kräftepolygons eine Parallele zur Schlußlinie s des Seilpolygons 1—2, so teilt diese die Kraft 1 t in die Auflagerdrücke A und B. A ist dabei $= Q_{om}$, folglich $\overline{g-c} = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$. In den ähnlichen Dreiecken Oci und kCn in Abb. 272c u. 272 muß sich verhalten

$$\frac{H'}{B} = \frac{w'}{f}; \quad \boldsymbol{H'} = \frac{B \cdot w'}{f} = \frac{M_o\, c}{f} = \boldsymbol{H}.$$

In dem rechtwinkligen Dreieck Odb (Abb. 256c) ist sodann

$$\overline{b-d} = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m$$

und $\quad \overline{h-d} = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m \cdot \cos \varphi_m = H \cdot \dfrac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} \cdot \cos \varphi_m = H \cdot \sin \varphi_m.$

Ferner ist $\quad \overline{c-d} = H \cdot \operatorname{tg} \alpha$ und $\overline{d-o} = H \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m$.

Nun ist $\quad Q_m = Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - (H \cdot \sin \varphi_m - H \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \varphi_m)$

$$= \overline{g-c} - (\overline{h-d} - \overline{d-o}) = 0 \text{ (Abb. 272c).}$$

Die Last 1 t in E bringt daher $Q_m = 0$ hervor. Senkrecht unter E liegt also der Nullpunkt der Einflußlinie.

Trägt man dann die Ordinaten η_1, η_2 und η_3 noch von einer Wagerechten ab, so entsteht die in Abb. 272b dargestellte Form der Einflußlinie, in welcher der zwischen a und e befindliche Teil die Form der $Q_m \cdot \cos \varphi_m$-Linie für einen einfachen Balken $a—e$ hat. Daraus ergibt sich folgende einfache Konstruktion:

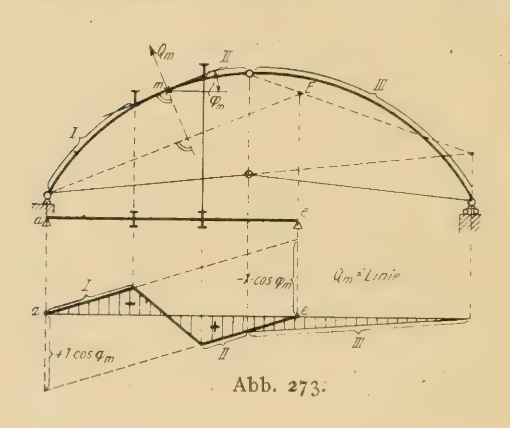


Abb. 273.

Man ermittle zunächst nach der in Abb. 272 durchgeführten Konstruktion den Punkt E, nehme dann einen einfachen Balken $a—e$ an, zeichne für diesen die $Q_{om} \cdot \cos \varphi_m$-Linie und vervollständige die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben.

In Abb. 273 ist die Q_m-Linie noch für den Fall dargestellt, daß der Punkt E rechts vom Scheitelgelenk und m zwischen zwei Querträgern liegt.

3. Einfluß beliebig schräg gerichteter Lasten.

Gesucht sei die Spannungsverteilung für den im Abstande x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt (Abb. 274).

R sei die Mittelkraft der schrägen Kräfte P. Der Auflagerdruck A ist seiner Richtung nach bestimmt durch die Bedingung, daß sich A, R und B in einem Punkte schneiden müssen. Die Größe von A finden wir dann entweder zeichnerisch durch Zerlegung von R nach den Richtungen von A und B (Abb. 274a) oder rechnerisch durch eine Momentengleichung für den rechten Auflagerpunkt r:

$$A \cdot a - R \cdot b_r = 0; \quad A = \frac{R \cdot b_r}{a}.$$

Ebenso ergibt sich B durch eine Momentengleichung für den linken Auflagerpunkt l:

$$B \cdot l - R \cdot b_l = 0; \quad B = \frac{R \cdot b_l}{l}.$$

Der Querschnitt sei gegeben (Abb. 274b). Die Kernpunkte o und u haben die Abstände

$$k_o = \frac{W_u}{F} = \frac{J_S}{a_u \cdot F} \text{ und } k_u = \frac{W_o}{F} = \frac{J_S}{a_o \cdot F}$$

von der wagerechten Schwerachse. Hierin ist J_S das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf die wagerechte Schwerachse, F der Flächeninhalt des Querschnitts. Die Randspannungen werden dann bestimmt mittels der Formeln

$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} \text{ und } \sigma_u = +\frac{M_o}{W_u}.$$

M_u und M_o, d. h. die Kernpunktmomente für die Kernpunkte u und o, werden am zweckmäßigsten vom links abgetrennten

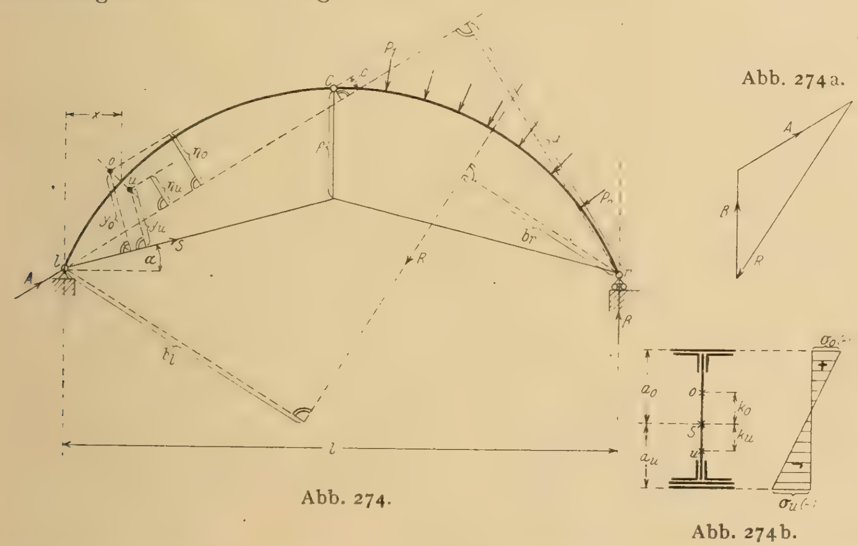


Abb. 274.

Abb. 274a.

Abb. 274b.

Teil aus berechnet, an welchem außer A noch die Spannkraft S im Zugband wirkt. Man findet daher

$$M_u = -A \cdot \eta_u - S \cdot y_u \text{ und } M_o = -A \cdot \eta_o - S \cdot y_o.$$

Hierin ist $\qquad S = H \cdot \sec\alpha$ und $H = \frac{M_{o\,c}}{f} = -\frac{A \cdot c}{f}.$

(Man beachte die negativen Vorzeichen der Momente, da die Kräfte unten um die Drehpunkte o, u bezw. C herumdrehen. Vergl. die unter § 3, 1, a, Seite 35 gegebene Vorzeichenregel.) Setzen wir diese Werte in die für σ_o und σ_u aufgestellten Formeln ein, so erhält man

$$\sigma_o = + \frac{\frac{R \cdot b_r}{a} \cdot \eta_u - \frac{R \cdot b_r}{a} \cdot \frac{c}{f} \cdot \sec\alpha \cdot y_u}{W_o} = \frac{R \cdot b_r}{a \cdot W_o}\left(\eta_u - \frac{c}{f} \cdot y_u \cdot \sec\alpha\right)$$

$$\sigma_u = -\frac{\frac{R \cdot b_r}{a} \cdot \eta_o - \frac{R \cdot b_r}{a} \cdot \frac{c}{f} \cdot \sec\alpha \cdot y_o}{W_u} = -\frac{R \cdot b_r}{a \cdot W_u}\left(\eta_o - \frac{c}{f} \cdot y_o \cdot \sec\alpha\right)$$

σ_o wird eine Zug- und σ_u eine Druckspannung.

Die errechneten Spannungen sind in Abb. 274b von einer Geraden abgetragen, womit das Spannungsdiagramm bestimmt ist. Alsdann kann für jeden Punkt des Querschnitts die Spannung angegeben werden, womit die Aufgabe gelöst ist.

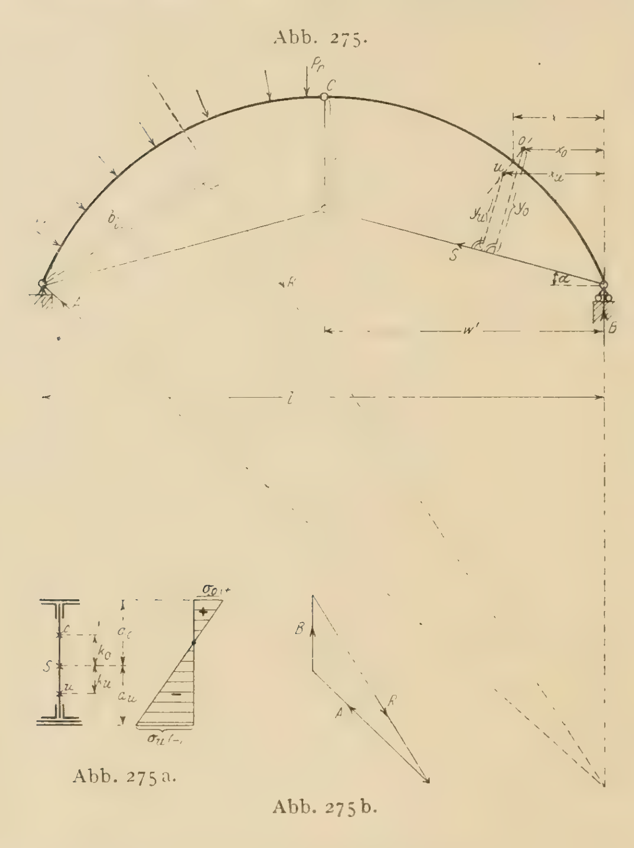


Abb. 275. Abb. 275a. Abb. 275b.

Gesucht sei ferner die Spannungsverteilung für den im Abstande x vom rechten Auflager gelegenen Querschnitt, wenn die Lasten von der Seite des festen Auflagers her wirken (Abb. 275). Gegeben sei wieder der Querschnitt mit den Kernpunkten o und u in den Abständen

$$k_o = \frac{W_u}{F} = \frac{J_S}{a_u \cdot F}$$

und

$$k_u = \frac{W_o}{F} = \frac{J_S}{a_o \cdot F}$$

von der wagerechten Schwerachse.

Die Kernpunktmomente findet man jetzt am schnellsten vom rechts abgetrennten Teil aus, an dem außer B nur noch die Spannkraft S im Zugband wirkt.

Es wird daher

$$M_o = B \cdot x_o - S \cdot y_o \text{ und } M_u = B \cdot x_u - S \cdot y_u.$$

Hierin ist $B = R \cdot \frac{b_l}{l}$ und $S = H \cdot \sec\alpha$,

erner

$$H = \frac{M_c}{f} = \frac{B \cdot w'}{f} = \frac{R \cdot b_l \cdot w'}{l \cdot f}.$$

Somit erhält man

$$\sigma_o = -\frac{M_u}{W_o} = \frac{\frac{R \cdot b_l \cdot w'}{l \cdot f} \cdot \sec\alpha \cdot y_u - \frac{R \cdot b_l}{l} \cdot x_u}{W_o} = \frac{R \cdot b_l}{l \cdot W_o}\left(\frac{w'}{f} \cdot y_u \cdot \sec\alpha - x_u\right)$$

$$\sigma_u = + \frac{M_o}{W_u} = - \frac{\frac{R \cdot b_l \cdot w'}{l \cdot f} \cdot \sec\alpha \cdot y_o - \frac{R \cdot b_l}{l} \cdot x_o}{W_u} = - \frac{R \cdot b_l}{l \cdot W_u}\left(\frac{w'}{f} \cdot y_o \cdot \sec\alpha - x_o\right).$$

σ_o wird eine Zug- und σ_u eine Druckspannung.

In Abb. 275a ist das Spannungsdiagramm dargestellt.

In Abb. 275b sind die Auflagerdrücke A und B noch zeichnerisch durch Zerlegung der gegebenen Mittelkraft R nach den Richtungen von A und B ermittelt.

5. Der fachwerkartige Dreigelenkbogen mit aufgehobenem Horizontalschub.

A. Der Bogen mit wagerechtem Zugband (Abb. 276).

Der Bogen wird wie ein gewöhnlicher Dreigelenkbogen beansprucht, übt jedoch keinen Schub auf die Widerlager aus, da dieser vom Zugband aufgenommen wird. Infolge senkrechter Lasten entstehen daher nur senkrechte Auflagerdrücke A und B. Alle für den Dreigelenkbogen aufgestellte Formeln gelten mithin offenbar auch hier, so daß auch die Einflußlinien für die Stabspannkräfte mit den entsprechenden Einflußlinien eines Dreigelenkbogens übereinstimmen.

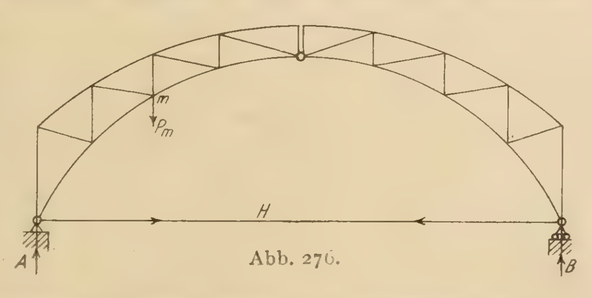


Abb. 276.

B. Der Bogen mit gesprengtem Zugband.

1. Ableitung allgemeiner Formeln für die Stabspannkräfte (Abb. 277).

Zur Berechnung von O_m führen wir den Schnitt I—I und setzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt m_u an, nachdem die vom Schnitt getroffene Stabkraft S senkrecht unter m_u in die Seitenkräfte H und $H \cdot \operatorname{tg}\alpha$ zerlegt ist. Da $H \cdot \operatorname{tg}\alpha$ den Momentendrehpunkt m_u schneidet, also keinen Einfluß auf das Moment M_{mu} hat, so muß sein:

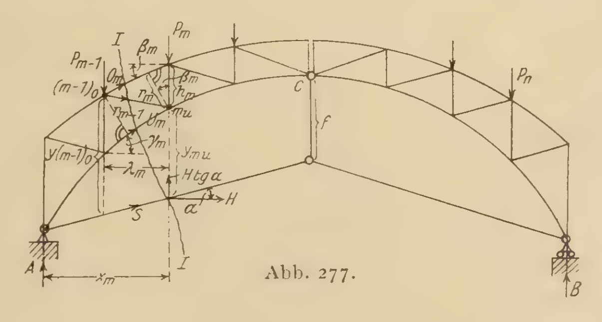


Abb. 277.

$$O_m \cdot r_m + A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - H \cdot y_{mu} = 0;$$

$$O_m = - \frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - H \cdot y_{mu}}{r_m} = - \frac{M_{om} - H \cdot y_{mu}}{r_m}.$$

$M_{om} - H \cdot y_{mu}$ ist aber das Moment für den Punkt m_u eines Bogens mit gesprengter Zugstange $= M_{mu}$ (vergl. 4, B, 1, Seite 189), so daß

$$\boldsymbol{O_m = - \frac{M_{mu}}{r_m}}.$$

Entsprechend erhält man

$$U_m = + \frac{M_{(m-1)o}}{r_{m-1}} = + \frac{M_{o(m-1)} - H \cdot y_{(m-1)o}}{r_{m-1}}; \quad H \text{ ist hierin} = \frac{M_{oC}}{f}$$

Setzt man noch

$$r_m = h_m \cdot \cos \beta_m \text{ bezw. } r_{m-1} = h_{m-1} \cdot \cos \gamma_m,$$

so kann man auch schreiben

$$O_m \cdot \cos \beta_m = - \frac{M_{mu}}{h_m} \text{ bezw. } U_m \cdot \cos \gamma_m = + \frac{M_{(m-1)o}}{h_{m-1}}.$$

Zur Berechnung von D_m (Abb. 278) führen wir wieder den Schnitt I—I und setzen am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt m_o an, nachdem vorher die von dem Schnitt getroffenen Kräfte U_m und S senkrecht unter m_o in die Seitenkräfte $U_m \cdot \cos \gamma_m$ und H (wagerecht) und $U_m \cdot \sin \gamma_m$ und $H \cdot \text{tg}\, \alpha$ (senkrecht) zerlegt worden sind. Die beiden letzteren schneiden den Momentenpunkt, haben also keinen Einfluß auf M_{mo}. Die Momentengleichung lautet mithin

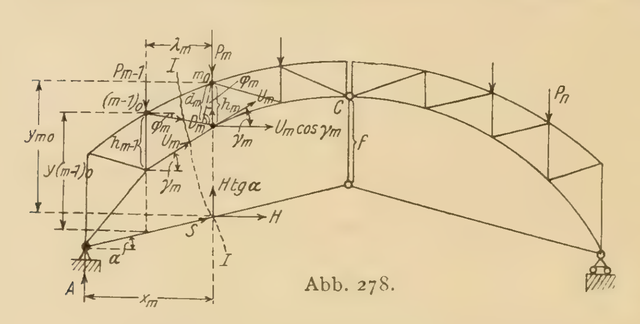


Abb. 278.

$$D_m \cdot d_m + P_1 \cdot \lambda_m + H \cdot y_{mo} + U_m \cdot \cos \gamma_m \cdot h_m - A \cdot x_m = 0$$

$$D_m = \frac{A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - U_m \cdot \cos \gamma_m \cdot h_m - H \cdot y_{mo}}{d_m}.$$

Hierin ist

$$A \cdot x_m - P_1 \cdot \lambda_m - H \cdot y_{mo} = M_{om} - H \cdot y_{mo} = M_{mo},$$

$$U_m \cdot \cos \gamma_m = \frac{M_{(m-1)o}}{h_{m-1}} = \frac{M_{o(m-1)} - H \cdot y_{(m-1)o}}{h_{m-1}} \text{ und } d_m = h_m \cdot \cos \varphi_m,$$

so daß

$$D_m \cdot \cos \varphi_m = \frac{M_{mo}}{h_m} - \frac{M_{(m-1)o}}{h_{m-1}}.$$

Zur Berechnung von V_m (Abb. 279) trennen wir den Knoten m_u der unbelasteten Gurtung ab und benutzen eine Momentengleichung in bezug auf den Punkt $(m-1)_o$. Die vom Schnitt getroffenen Stabkräfte U_m und U_{m+1} zerlegen wir vorher senkrecht unter $(m-1)_o$ in ihre wagerechten Seitenkräfte $U_m \cdot \cos \gamma_m$ bezw. $U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1}$ und in ihre durch $(m-1)_o$ gehenden senkrechten Seitenkräfte. Die Momentengleichung lautet alsdann

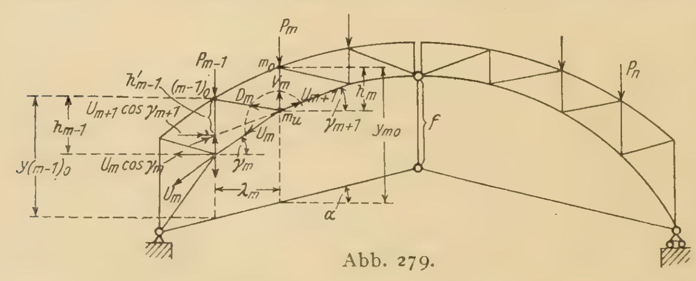


Abb. 279.

$$V_m \cdot \lambda_m + U_{m+1} \cdot \cos \gamma_{m+1} \cdot h'_{m-1} - U_m \cdot \cos \gamma_m \cdot h_{m-1} = 0.$$

Setzt man

$$U_m \cdot \cos\gamma_m = + \frac{M_{(m-1)o}}{h_{m-1}} \text{ und } U_{m+1} \cdot \cos\gamma_{m+1} = + \frac{M_{mo}}{h_m},$$

so wird

$$V_m = \frac{M_{(m-1)o}}{\lambda_m} - \frac{M_{mo}}{h_m} \cdot \frac{h'_{m-1}}{\lambda_m}.$$

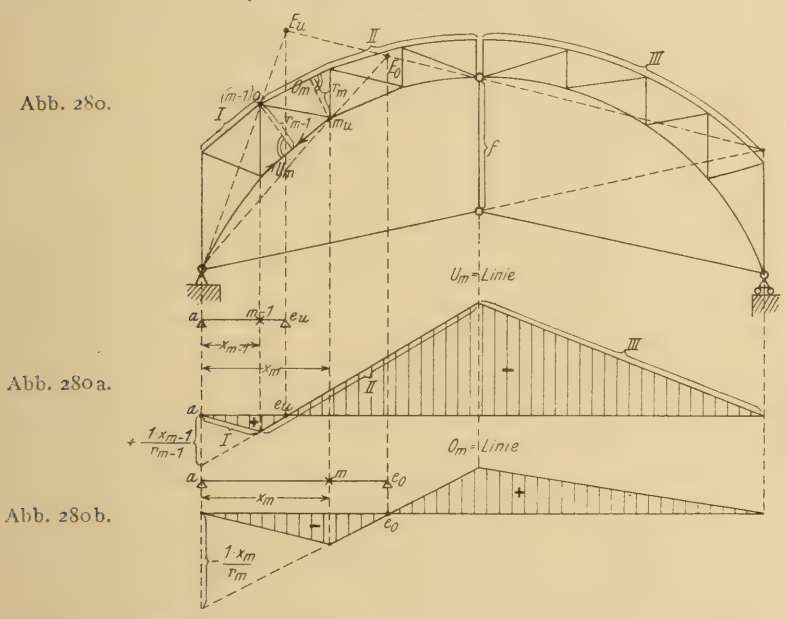
Hierin ist

$$M_{(m-1)o} = M_{o(m-1)} - H \cdot y_{(m-1)o} \text{ und } M_{mo} = M_{om} - H \cdot y_{mo},$$

$$H = \frac{M_{oC}}{f}.$$

2. Berechnung der Einflußlinien für die Stabspannkräfte

a) Die U_m-Linie (Abb. 280a).



Da $U_m = + \frac{M_{(m-1)o}}{r_{m-1}}$, so ist die U_m-Linie die mit $+\frac{1}{r_{m-1}}$ multiplizierte $M_{(m-1)o}$-Linie (vergl. Abb. 271b, Seite 190). Entsprechend wird die O_m-Linie mittels der Formel $O_m = -\frac{M_{mu}}{r_m}$ gefunden (Abb. 280b).

In Abb. 280 sind E_u und E_o die Lastenscheiden für die U_m- bezw. O_m-Linie

b) Die D_m-Linie.

Zur Ermittlung der D_m-Linie leiten wir uns zunächst für eine beliebige Belastung eine bequeme Formel her. (Die unter 1 abgeleitete Formel eignet sich nicht zur Bestimmung der Einflußlinie.) Wir führen den Schnitt I—I (Abb. 281) und zerlegen die vom Schnitt getroffene Stabkraft S senkrecht unter i nach H und $H \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Dann benutzen wir am links abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Drehpunkt i und erhalten

$$D_m \cdot r_i + H \cdot y_i + P_1 \cdot b_i - A \cdot x_i = 0; \quad D_m = \frac{A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i}{r_i} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}$$

Hierin ist $\frac{A \cdot x_i - P_1 \cdot b_i}{r_i} = D_{om}$ (vergl. Abb. 256a, Seite 182 und die zugehörige Beschreibung). Es wird daher $D_m = D_{om} - \frac{H \cdot y_i}{r_i}$.

Man erhält somit die D_m-Linie, wenn man von der D_{om}-Linie die $\frac{H \cdot y_i}{r_i}$-Linie abzieht (Abb. 281a). Letztere ist nach Zeichnung der D_{om}-Linie mittels des Nullpunktes e bestimmt, der senkrecht unter E liegt. Bringt man nämlich in E die Last 1 t an (Abb. 282) und bestimmt für diese Laststellung die Spannkraft D_m, so wird sich $D_m = 0$ ergeben, wie nachfolgend bewiesen wird.

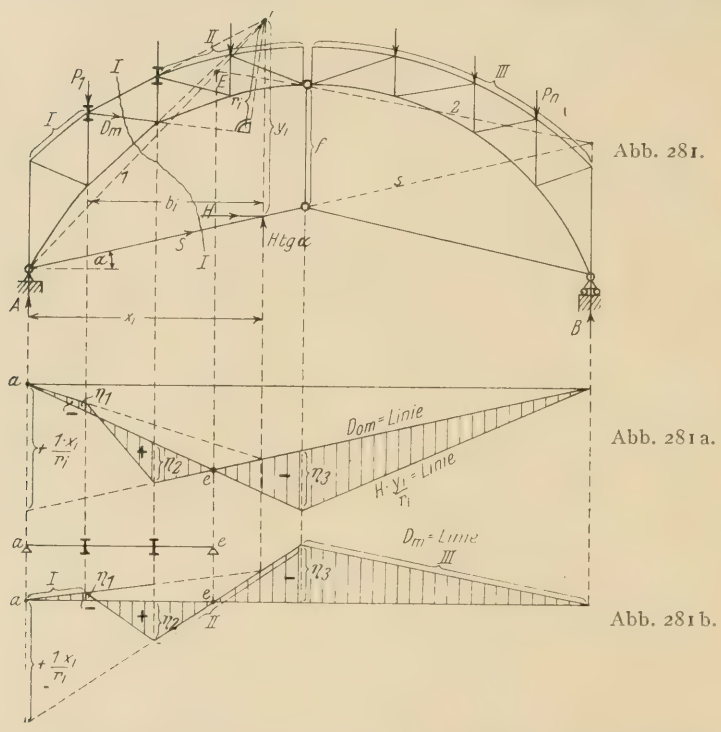


Abb. 281.

Abb. 281a.

Abb. 281b.

Wir zeichnen zu der Kraft 1 t mit der Polweite H' das Seilpolygon 1—2, dessen Polstrahl 1 durch i geht, während der Strahl 2 die Richtung g—C hat. Dann ist s die Schlußlinie des Seilpolygons. Die zu s durch den Pol O des Kräftepolygons (Abb. 282a) gezogene Parallele schneidet dann von der Last 1 t die Balkenauflagerdrücke A und B ab.

Abb. 282.

Abb. 282a.

In den ähnlichen Dreiecken Obc (Abb. 282a) und Cdg (Abb. 282) muß sich dann verhalten

$$\frac{H'}{B} = \frac{w'}{f}, \text{ woraus } H' = \frac{B \cdot w'}{f} = \frac{M_{oC}}{f} = H.$$

Nach der unter 5, B, 1 auf Seite 196 abgeleiteten Formel ist nun

$$D_m \cdot \cos \varphi_m = \left(\frac{M_{mo}}{h_m} - \frac{M_{(m-1)o}}{h_{m-1}} \right).$$

Hierin ist

$$M_{mo} = M_{om} - H \cdot y_m \text{ und } M_{(m-1)o} = M_{o(m-1)} - H \cdot y_{m-1}.$$

Mittels des Seilpolygons 1—2 finden wir

$$M_{om} = H' \cdot \eta_m = H \cdot \eta_m,$$

worin η_m die senkrecht unter m zwischen dem Seilstrahl 1 und der Schlußlinie s gemessene Ordinate ist. H' ist die Polweite des zugehörigen Kräftepolygons, die, wie eben nachgewiesen wurde, mit dem Horizontalzug H des Zugbands übereinstimmt.

Ferner ist $$M_{o(m-1)} = H \cdot \eta_{m-1}.$$

Somit wird

$$M_{mo} = H \cdot \eta_m - H \cdot y_m = H(\eta_m - y_m) = -H(y_m - \eta_m)$$
$$M_{(m-1)o} = H \cdot \eta_{m-1} - H \cdot y_{m-1} = H(\eta_{m-1} - y_{m-1}) = -H(y_{m-1} - \eta_{m-1}).$$

Folglich wird $D_m \cdot \cos \varphi_m = H \left(\frac{y_{m-1} - \eta_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{y_m - \eta_m}{h_m} \right).$

In den ähnlichen Dreiecken $i\,m\,h$ und $i\,m-1\,k$ muß sich verhalten

$$\frac{y_m - \eta_m}{y_{m-1} - \eta_{m-1}} = \frac{b_i - \lambda_m}{b_i}.$$

In den ähnlichen Dreiecken $i\,m\,o$ und $i\,m-1\,p$ muß sich ebenfalls verhalten

$$\frac{h_m}{h_{m-1}} = \frac{b_i - \lambda_m}{b_i}.$$

Daher $\frac{y_m - \eta_m}{y_{m-1} - \eta_{m-1}} = \frac{h_m}{h_{m-1}}$, so daß $\frac{y_m - \eta_m}{h_m} = \frac{y_{m-1} - \eta_{m-1}}{h_{m-1}}$

oder $$\frac{y_{m-1} - \eta_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{y_m - \eta_m}{h_m} = 0.$$

Der Klammerwert in der letzten für $D_m \cdot \cos \varphi_m$ aufgestellten Gleichung wird mithin $= 0$ und damit auch $D_m = 0$, weil φ_m nicht $= 0$ sein kann, d. h. die Last 1 t in E bringt $D_m = 0$ hervor. Senkrecht unter E liegt folglich der Nullpunkt der Einflußlinie. Trägt man dann noch die Einflußordinaten η_1, η_2 und η_3 in Abb. 281 a von einer Wagerechten ab, so erkennt man, daß der zwischen a und e gelegene Teil der Einflußlinie die Form der D_m-Linie eines einfachen Balkens von der Spannweite a—e hat (Abb. 281 b). Somit ergibt sich folgende einfache Konstruktion der D_m-Linie:

Abb. 283.

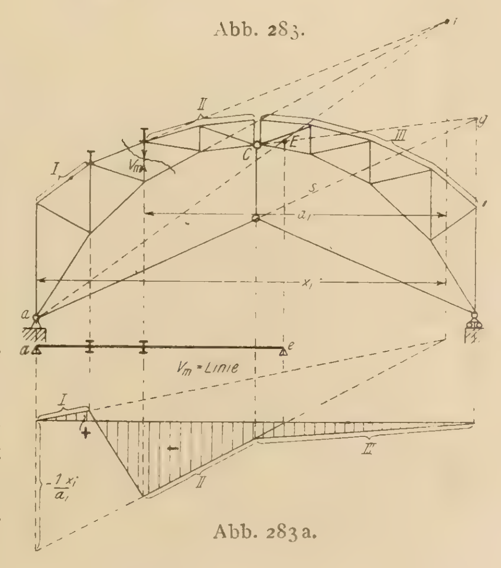


Abb. 283 a.

Man ermittle zunächst nach der in Abb. 282 durchgeführten Konstruktion den Punkt E, indem man die Gerade $\overline{ai}$ mit der Geraden $\overline{gC}$ zum Schnitt bringt, nehme dann einen einfachen Balken $a—e$ an, zeichne für diesen die D_m-Linie und vervollständige sodann die Einflußlinie mittels des Satzes von den starren Scheiben.

Sinngemäß wird mit der Einflußlinie für eine Spannkraft V_m verfahren (Abb. 283). Man bestimme zunächst i als Schnittpunkt der von dem Ritterschen Schnitt getroffenen Gurtstäbe und findet E als Treffpunkt der Geraden $\overline{ai}$ und $\overline{gC}$. Alsdann zeichne man für einen einfachen Balken $a—e$ die V_m-Linie, die dann mit Hilfe des Satzes von den starren Scheiben zu vervollständigen ist (Abb. 283a).

6. Einige Systeme, die auf den Dreigelenkbogen zurückgeführt werden können.[1]

A. Der Stabbogen mit darunter liegendem Versteifungsbalken (Langerscher Balken).

1. Der Versteifungsbalken sei vollwandig (Abb. 284).

Die Stäbe des Stabbogens sind theoretisch gelenkig miteinander verbunden zu denken. (In der Praxis sind die Gelenke ebenso wie bei den Fach-

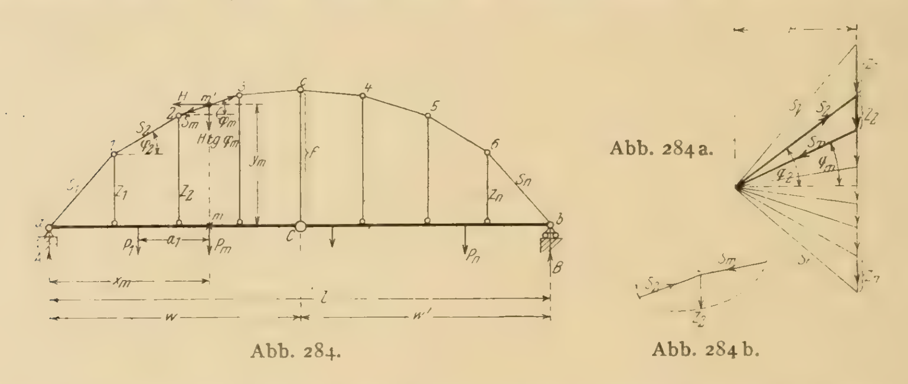


Abb. 284. Abb. 284a. Abb. 284b.

werken in der Regel durch steife Knotenbleche ersetzt.) Auch die Hängestangen sind gelenkig an dem Versteifungsbalken befestigt anzunehmen, so daß sowohl die Stäbe des Stabbogens als auch die Hängestangen nur Achsialkräfte aufnehmen können. Auf die Knotenpunkte des Stabbogens wirken nur die senkrecht gerichteten Spannkräfte Z in den Hängestangen, so daß die wagerechte Seitenkraft sämtlicher Spannkräfte in den Stäben des Stabbogens gleich groß sein muß; sie sei $= H$ gesetzt. Ist H bekannt, so sind auch die Spannkräfte S und Z bestimmt (Abb. 284a). So müssen sich z. B. an dem Knotenpunkt 2 die Spannkräfte S_2, S_m und Z_2 das Gleichgewicht halten; sie müssen daher ein Dreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden. Da die Hängestangenspannkraft Z_2 eine Zugkraft, d. h. für den Knoten 2 eine nach unten gerichtete Kraft ist, so sind die Pfeile von S_2 und S_m durch den stetigen Umfahrungssinn bestimmt. Überträgt man diese Pfeile auf den

[1]) Aus Müller-Breslau, Graph. Statik, Bd. I, § 49.

abgetrennten Knoten 2 (Abb. 284b), so erkennt man, daß S_2 und S_m Druckkräfte sind, und zwar wird nach Abb. 284a

$$S_2 = -H \cdot \sec \varphi_2, \; S_m = -H \cdot \sec \varphi_m$$

und $$Z_2 = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m = H(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_m).$$

Die Kräfte S und Z sind daher lediglich von H abhängig. Kennt man aber die Kräfte S und Z, so sind sämtliche an dem Versteifungsbalken wirkenden Kräfte bekannt, so daß dessen Untersuchung keine Schwierigkeiten mehr bietet. Es kommt also zunächst darauf an, H zu berechnen.

Die Auflagerdrücke A und B stimmen mit den Auflagerdrücken eines einfachen Balkens von der Spannweite l überein, wie ohne weiteres aus den Momentengleichungen für die Auflagerpunkte hervorgeht.

Zur Berechnung von M_m führen wir einen senkrechten Schnitt durch m und zerlegen die vom Schnitt getroffene Stabkraft S_m senkrecht über m (in m') in eine wagerechte Seitenkraft H und in eine durch m gehende senkrechte Seitenkraft $H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m$. Alsdann berechnen wir M_m vom links abgetrennten Teil aus, so daß

$$M_m = A \cdot x_m - P_1 \cdot a_1 - H \cdot y_m.$$

Hierin ist $A \cdot x_m - P_1 \cdot a_1$ das Moment eines einfachen Balkens für den Punkt $m = M_{om}$, so daß

$$\boldsymbol{M_m = M_{om} - H \cdot y_m.}$$

Für das Gelenk C ist $y_m = f$ zu setzen, so daß

$$M_C = M_{oC} - H \cdot f.$$

Da das Biegungsmoment in dem Gelenk $= 0$ sein muß, erhalten wir die Bedingungsgleichung

$$M_{oC} - H \cdot f = 0.$$

Hieraus

$$\boldsymbol{H = \frac{M_{oC}}{f}}.$$

Die Formeln für M_m und H stimmen überein mit den Formeln für den Horizontalschub und das Moment M_m eines steifen Dreigelenkbogens $a\,b\,c$, bei dem der Punkt m die Lage m' hat (Abb. 285). Folglich stimmen auch die Einflußlinien für H und M_m mit den auf Seite 177 u. 178 hergeleiteten Einflußlinien für einen derartigen Dreigelenkbogen überein (Abb. 285a u. 285b).

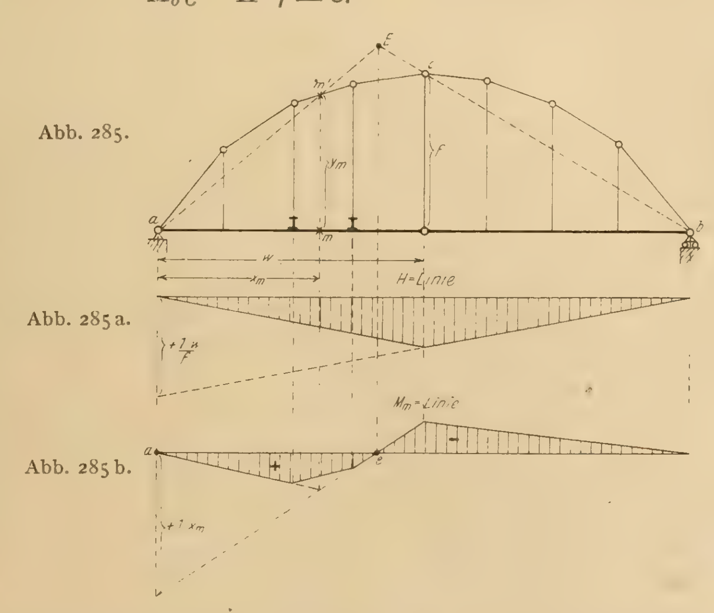


Abb. 285.

Abb. 285a.

Abb. 285b.

Die Querkraft für den Balkenquerschnitt m ist gleich der Summe aller am abgetrennten Teil in senkrechter Richtung wirkenden Kräfte (Abb. 286).

$$Q_m = + A - P_1 - P_2 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m = Q_{om} - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m$$
$$= Q_{om} - H \cdot \frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \frac{Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m}{\cos \varphi_m}.$$

Abb. 286.

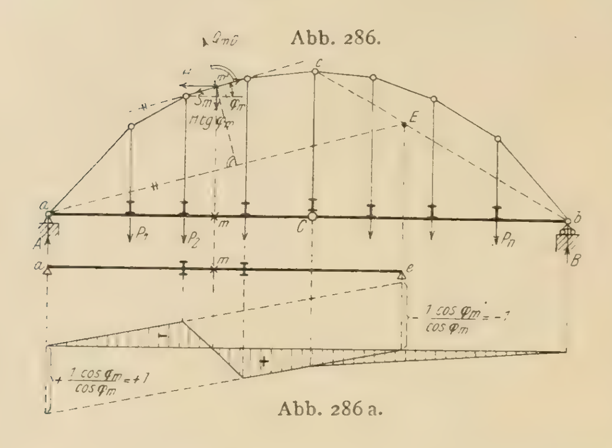


Abb. 286 a.

$Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m$ ist hierin die Querkraft für den Punkt m' eines steifen Dreigelenkbogens $abc = Q_{mD}$, so daß $Q_m = \frac{Q_{md}}{\cos \varphi_m}$.

Die Einflußlinie für Q_m ist daher die mit $\frac{1}{\cos \varphi_m}$ multiplizierte Q_{mD}-Linie für den Querschnitt m' eines steifen Dreigelenkbogens abc (Abbild. 286 a). An die Stelle der Ordinaten $+ 1 \cdot \cos \varphi_m$ bezw. $- 1 \cdot \cos \varphi_m$ unter den Auflagern des Balkens $a—e$ für die Q_{mD}-Linie treten hier die Ordinaten $+ \frac{1 \cos \varphi_m}{\cos \varphi_m} = + 1$ bezw. $- \frac{1 \cos \varphi_m}{\cos \varphi_m} = - 1$.

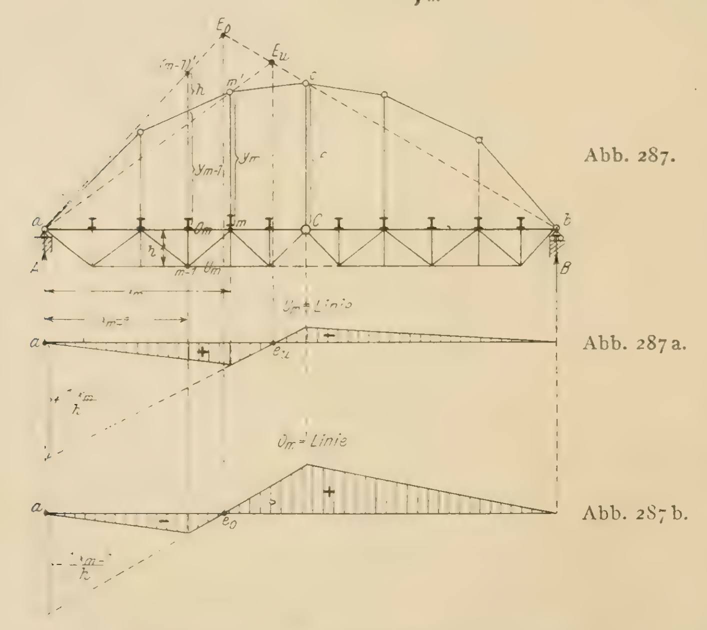


Abb. 287.

Abb. 287 a.

Abb. 287 b.

2. Mit Hilfe der Einflußlinien für M_m und Q_m ist es nun leicht, auch die Einflußlinien für die Stabspannkräfte eines fachwerkartigen Versteifungsbalkens zu ermitteln (Abb. 287).

Die U_m-Linie wird mittels der Formel

$$U_m = + \frac{M_m}{h} = + \frac{M_{om} - H \cdot y_m}{h}$$

gefunden. Die U_m-Linie ist daher die mit $\frac{1}{h}$ multiplizierte M_m-Linie für den Punkt m' des Dreigelenkbogens abc (Abb. 287 a). Zur Berechnung der O_m-Linie benutzen wir die Formel

$$O_m = - \frac{M_{m-1}}{h} = - \frac{M_{o(m-1)} - H (y_{m-1} + h)}{h}.$$

Die O_m-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{h}$ multiplizierte M_{m-1}-Linie für den Punkt $(m-1)'$ des Dreigelenkbogens $a\,b\,c$, den wir als Endpunkt der Strecke $y_{m-1}+h$ erhalten (Abb. 287b).

Zur Bestimmung der D_m-Linie leiten wir uns zunächst eine bequeme Formel für die Spannkraft D_m her, führen daher den Ritterschen Schnitt I—I und benutzen am links abgetrennten Teil die Bedingung $\Sigma V = 0$ (Abbild. 288).

Abb. 288.

Abb. 288a.

Demgemäß muß sein

$$D_m \cdot \sin\alpha_m + H \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_m + P_1 + P_2 - A = 0,$$

woraus

$$D_m = \frac{A - P_1 - P_2 - H \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_m}{\sin\alpha_m} = \frac{Q_{o\,m} - H \cdot \mathrm{tg}\,\varphi_m}{\sin\alpha_m}$$

$$= \frac{Q_{o\,m} - H \cdot \dfrac{\sin\varphi_m}{\cos\varphi_m}}{\sin\alpha_m} = \frac{Q_{o\,m}\cdot\cos\varphi_m - H\cdot\sin\varphi_m}{\cos\varphi_m\cdot\sin\alpha_m} = \frac{Q_{m\,D}}{\cos\varphi_m\cdot\sin\alpha_m}.$$

Die D_m-Linie ist daher die mit $\frac{1}{\cos\varphi_m\cdot\sin\alpha_m}$ multiplizierte $Q_{m\,D}$-Lini (Abb. 288a, vergl. auch Abb. 286a).

Für das in Abb. 289 dargestellte System wird

Abb. 289.

$$O_m = -\frac{M_m}{h}$$

$$= -\frac{1}{h}\left[M_{o\,m} - H\left(y_m + \frac{h}{2}\right)\right]$$

Abb. 289a.

Die O_m-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{h}$ multiplizierte M_m-Linie für den Punkt m' des Dreigelenkbogens $a\,b\,c$, den wir als Endpunkt der Strecke $y_m + \frac{h}{2}$ erhalten (Abb. 289a).

Abb. 289b.

Da $$U_m = + \frac{M_{m-1}}{h} = + \frac{1}{h}\left[M_{o\,m-1} - H\left(y_{m-1} - \frac{h}{2}\right)\right],$$

so ist die U_m-Linie die mit $\frac{1}{h}$ multiplizierte M_{m-1}-Linie für den Punkt $(m-1)'$ des Dreigelenkbogens (Abbild. 289b). Den Punkt $(m-1)'$ erhält man als Endpunkt der Strecke $y_{m-1} - \frac{h}{2}$ (Abb. 289).

Abb. 290.

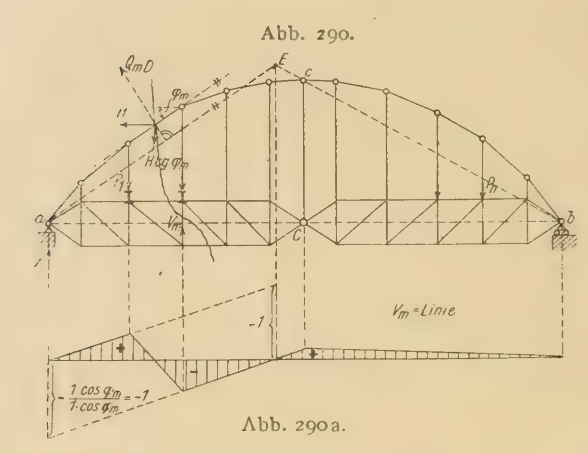


Abb. 290a.

Die Einflußlinie für eine Diagonale hat wieder dieselbe Form wie in Abb. 272a.

Zur Berechnung der Einflußlinie für V_m setzen wir am links abgetrennten Teil die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an (Abb. 290).

Demgemäß muß sein

$$V_m + A - P_1 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m = 0,$$

woraus $$V_m = -(A - P_1 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m) = -(Q_{o\,m} - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m)$$

$$= -\left(Q_{o\,m} - H \cdot \frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m}\right) = - \frac{Q_{o\,m} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = - \frac{Q_{m\,D}}{\cos \varphi_m}.$$

Die V_m-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{\cos \varphi_m}$ multiplizierte $Q_{m\,D}$-Linie (Abb. 290a).

B. Der Stabbogen mit darüber liegenden Versteifungsbalken (Abb. 291).

Die nachstehenden Entwicklungen sind an die Voraussetzung gebunden, daß der Versteifungsbalken derart montiert wird, daß sein volles Gewicht (einschließlich des Gewichts der Fahrbahn) durch die senkrechten Pfosten auf die Knotenpunkte des Stabbogens übertragen wird, so daß er nur durch die Verkehrslast beansprucht wird. Ist dann das Eigengewicht des Versteifungsbalkens $= g$/lfd. m (je Hauptträger), so erfährt der Knoten m' des Stabbogens die Belastung $Z_{m\,g} = \frac{1}{2}\, g\,(\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{p\,m} + G_{s\,m}$, worin $G_{p\,m}$ das Gewicht des Pfostens und $G_{s\,m}$ die Summe der Gewichte der halben Stabbogenstäbe s_m und s_{m+1} bedeutet. Da die Spannkräfte in den Stäben des Stabbogens mit den Kräften $Z_{m\,g}$ im Gleichgewicht sein müssen, so kann der Stabbogen als das Seilpolygon der Z-Kräfte aufgefaßt werden. Seine Form ist daher bekannt, sobald man die Kräfte Z mit genügender Genauigkeit angeben kann. $G_{p\,m}$ und $G_{s\,m}$ sind von der vorläufig noch unbekannten Form des Stabbogens abhängig, müssen daher zunächst geschätzt werden. Müller-Breslau empfiehlt, die Knotenpunkte des Stabbogens zunächst auf einer Parabel liegend anzunehmen, die durch die drei Punkte a', b' und c gelegt ist, was einer gleichförmig über die Horizontalprojektion der Brücke verteilten Belastung entsprechen würde, und auf Grund dieser Annahme die Gewichte $G_{p\,m}$ und $G_{s\,m}$ zu berechnen, wodurch die Kräfte $Z_{m\,g}$ bestimmt sind. Das zu diesen Kräften durch die

Punkte a', b' und c gelegte Seilpolygon wird dann der Form des Stabbogens zugrunde gelegt, die nur wenig von der Parabelform abweichen wird, so daß eine Neuberechnung der Gewichte G_{pm} und G_{sm} sich erübrigt. Bezüglich der Konstruktion eines Seilpolygons durch drei gegebene Punkte vergl. § 9, 1, B, 1, Seite 174. Aus dem zu dem Seilpolygon gehörenden Kräftepolygon findet man dann die Druckspannkräfte S_g in den Stäben des Stabbogens.

Würde man das Gewicht der Fahrbahn ohne einen Versteifungsbalken auf den Stabbogen wirken lassen, so würden unzulässige Formänderungen entstehen, die sich beim Übergange der Verkehrslast in einer wellenförmigen Bewegung der Fahrbahn bemerkbar machen würden. Diese wird durch den Versteifungsbalken wirksam verhindert, der zur Wahrung der statischen Bestimmtheit des Systems aus zwei durch ein Gelenk miteinander verbundenen Teilen bestehen muß, wie aus den folgenden Entwicklungen hervorgehen wird.

Macht man noch (wie bei den bisher behandelten Systemen) die Voraussetzung vollkommener Starrheit des Balkens, des Stabbogens und der Pfosten, setzt also derartig kleine elastische Formänderungen voraus, daß sie bei Berechnung der statischen Größen infolge der Verkehrslast vernachlässigt werden dürfen, dann kann man den Stabbogen auch als das Seilpolygon der Kräfte Z betrachten, die in den Pfosten nach Ausführung der Versteifung durch die Verkehrslasten P hervorgerufen werden, da sich dann die Form des Stabbogens nur verschwindend wenig ändern wird.

Da der Einfluß des Eigengewichts bereits bei der Bestimmung der Form des Bogens berücksichtigt wurde (der Versteifungsbalken bleibt unbeansprucht, die Pfosten erhalten die Druckspannkräfte $\frac{1}{2}\, g\,(\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{pm}$, die Stäbe des Stabbogens die Druckspannkräfte S_g, die gleich den Polstrahlen des Kräftepolygons sind, das dem durch die Punkte a', b' und c zu den Kräften $Z_{mg} = \frac{1}{2}\, g\,(\lambda_m + \lambda_{m+1}) + G_{pm} + G_{sm}$ gezeichneten Seilpolygon entspricht), so bleibt nur noch der Einfluß der Verkehrslast zu ermitteln.

Der Einfachheit halber mögen in den folgenden Untersuchungen die Punkte a und b als gleich hoch liegend angenommen werden. Die Verkehrslast bestehe aus einer Reihe von senkrechten Einzellasten P (Abb. 291).

Wir führen den Schnitt I—I, bringen in den vom Schnitt getroffenen senkrechten Pfosten die durch die Kräfte P verursachten Druckspannkräfte Z an, die auf den Versteifungsbalken nach oben wirken, und untersuchen den Gleichgewichtszustand des oberhalb des Schnittes I—I liegenden Trägerteils (Abb. 291b). Setzt man eine Momentengleichung in bezug auf das rechte Auflagergelenk an, so findet man

$$A \cdot l - \Sigma P \cdot b + \Sigma Z \cdot b = 0, \quad \text{woraus } A = \frac{\Sigma P \cdot b}{l} - \frac{\Sigma Z \cdot b}{l}.$$

$\frac{\Sigma P \cdot b}{l}$ ist = dem Auflagerdruck A_o eines einfachen Balkens auf zwei Stützen infolge der Kräfte P, $\frac{\Sigma Z \cdot b}{l}$ = dem Auflagerdruck A_z infolge der Kräfte Z, so daß man setzen kann $A = A_o - A_z$.

A_z läßt sich auch leicht zeichnerisch mit Hilfe eines Seilpolygons bestimmen. Als Seilpolygon dürfen wir dabei, wie oben begründet wurde, den Stabbogen benutzen (Abb. 291). Das zugehörige Kräftepolygon zeigt Abb. 291a, in welchem die Polstrahlen die Stabspannkräfte des Stabbogens darstellen, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man z. B. den Gleichgewichtszustand des Knotens m' des Stabbogens untersucht. An diesem Knoten sind nämlich Z_m, S_m und S_{m+1} miteinander im Gleichgewicht, müssen daher ein Dreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden (in Abb. 291a durch kräftige

Abb. 291.

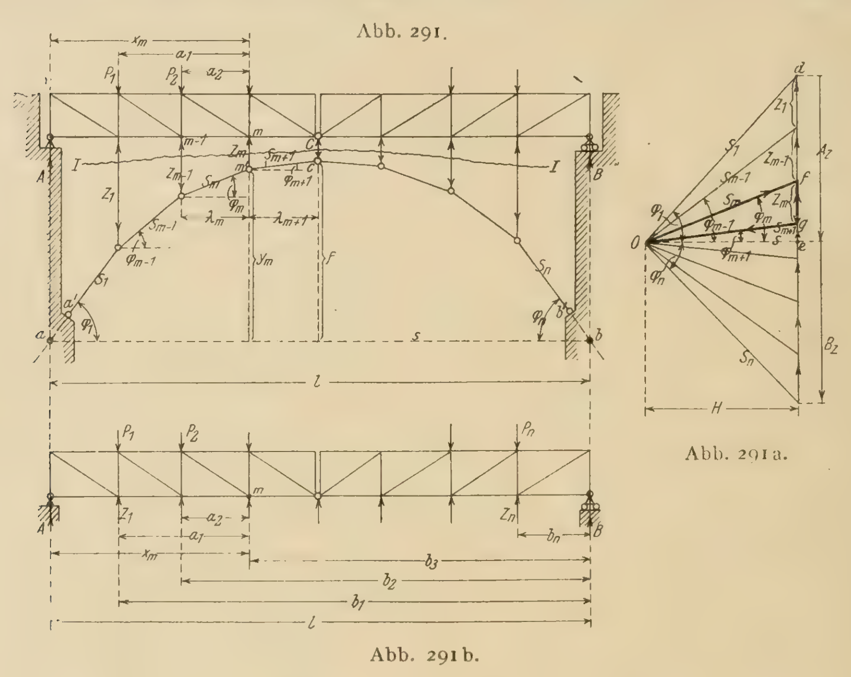


Abb. 291a.

Abb. 291b.

Linien angedeutet). Die wagerechte Seitenkraft H der Druckspannkräfte S_m und S_{m+1} ist somit gleich der Polweite des Kräftepolygons. Zieht man dann durch den Pol O eine Parallele zu der dem Balken entsprechenden Schlußlinie s, so schneidet diese von der Mittelkraft der nach oben auf den Balken wirkenden Kräfte Z die nach unten gerichteten Auflagerdrücke A_z und B_z ab (vergl. auch § 1, 7, Seite 6). In dem rechtwinkligen Dreieck $O\,d\,e$ der Abb. 291a ist sodann $A_z = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$ und $B_z = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_n$. Ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck $O\,e\,f$ $\boldsymbol{S_m = -H \cdot \sec \varphi_m}$, während Z_m gleich der Differenz der senkrechten Katheten der Dreiecke $O\,e\,f$ und $O\,e\,g$ ist, d. h.

$$\boldsymbol{Z_m} = -(H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) = \boldsymbol{-H\,(\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1})}.$$

Das negative Vorzeichen in den Formeln für S_m und Z_m soll diese Spannkräfte als Druckspannkräfte kennzeichnen. Setzt man in der Gleichung $A = A_0 - A_z$ für A_z den Wert $H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$ ein, so erhält man

$$\boldsymbol{A = A_0 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Entsprechend findet man

$$\boldsymbol{B = B_0 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_n}.$$

Das Moment für den Punkt m des Versteifungsbalkens berechnen wir nach Abb. 291 b vom links abgetrennten Teil aus und finden

$$\begin{aligned} M_m &= A \cdot x_m - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + Z_1 \cdot a_1 + Z_{m-1} \cdot a_2 \\ &= (A_o - A_z) \cdot x_m - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 + Z_1 \cdot a_1 + Z_{m-1} \cdot a_2 \\ &= (A_o \cdot x_m - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2) - (A_z \cdot x_m - Z_1 \cdot a_1 - Z_{m-1} \cdot a_2). \end{aligned}$$

Hierin ist $A_o \cdot x_m - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2$ gleich dem Moment M_{om} eines einfachen Balkens, während $A_z \cdot x_m - Z_1 \cdot a_1 - Z_{m-1} \cdot a_2$ das Moment M_{zm} infolge der Kräfte Z bedeutet. Dieses Moment ist nach § 1, 8, Seite 7 gleich dem Produkt aus der Polweite H des Kräftepolygons und der auf die Schlußlinie s bezogenen Ordinate y_m des Seilpolygons, d. h $M_{zm} = H \cdot y_m$ Infolgedessen erhält man

$$\boldsymbol{M_m = M_{om} - M_{zm} = M_{om} - H \cdot y_m}.$$

Für den Gelenkpunkt C wird dann sinngemäß

$$M_C = M_{oC} - H \cdot f.$$

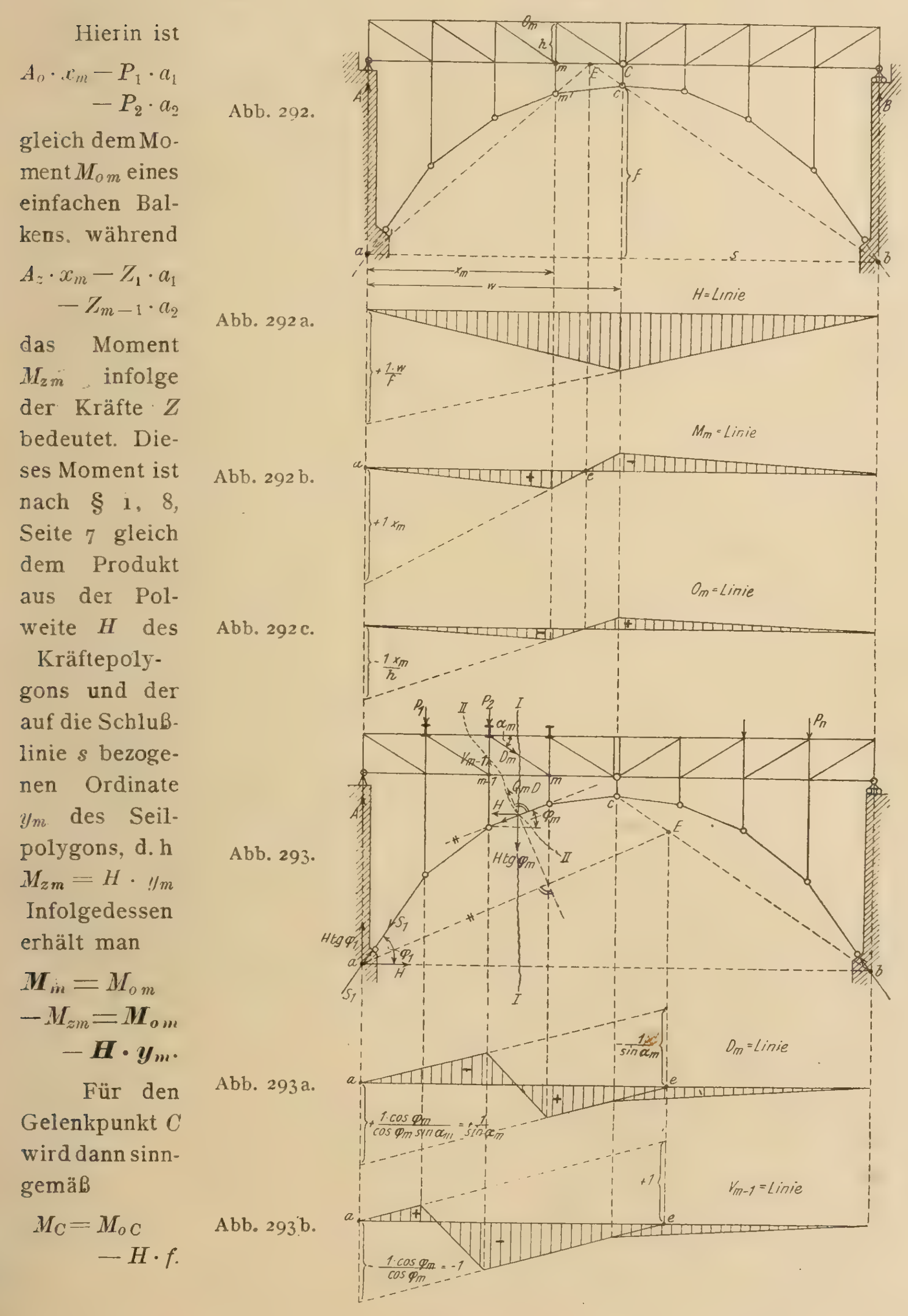


Abb. 292.

Abb. 292 a.

Abb. 292 b.

Abb. 292 c.

Abb. 293.

Abb. 293 a.

Abb. 293 b.

Dieses Moment muß aber $= 0$ sein, so daß wir die Bedingungsgleichung erhalten

$$M_{oC} - H \cdot f = 0, \quad \text{woraus } \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{M}_{oC}}{f}.$$

Die für M_m und H abgeleiteten Formeln stimmen überein mit den Formeln für das Moment M_m und den Horizontalschub H eines steifen Dreigelenkbogens abc, bei dem der Punkt m die Lage m' hat. Folglich stimmen auch die Einflußlinien für H und M_m mit den auf Seite 177 u. 178 hergeleiteten Einflußlinien für einen derartigen Dreigelenkbogen überein (Abb. 292a u. 292b).

Die durch die Verkehrslasten verursachten Spannkräfte in den senkrechten Zwischenstäben und den Stäben des Stabbogens sind, wie Abb. 291a zeigt, nur von H abhängig, erhalten also gleichzeitig mit H ihren Größtwert. Man bestimmt daher mit Hilfe der H-Linie H_{max} und findet dann nach Abb 291 bezw. mit Hilfe der Formeln $S_m = -H \cdot \sec \varphi_m$ und $Z_m = -H(\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1})$ die Größtwerte S und Z. Diese Kräfte sind dann noch zu den durch das Eigengewicht verursachten Kräften zu addieren.

Der Versteifungsbalken wird nur durch die Verkehrslasten beansprucht. Die Berechnung der Größtwerte für die Stabspannkräfte O, D, V sowie für die Auflagerdrücke A und B erfolgt daher mit Hilfe von Einflußlinien, die nachfolgend berechnet werden sollen.

Da $O_m = -\dfrac{M_m}{h}$ ist, so ist die O_m-Linie die mit $-\dfrac{1}{h}$ multiplizierte M_m-Linie (Abb. 292c).

Zur Berechnung der Einflußlinie für D_m leiten wir zunächst für beliebige Belastung eine bequeme Formel her (Abb. 293). Wir führen den Schnitt I—I und setzen am links abgetrennten Teil die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an.

Demgemäß muß sein

$$D_m \cdot \sin \alpha_m + P_1 + P_2 + H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - A = 0$$

$$D_m = \frac{A - P_1 - P_2 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m + H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \alpha_m}.$$

Hierin ist
$$A = A_o - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1,$$

so daß
$$D_m = \frac{A_o - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - P_1 - P_2 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m + H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}{\sin \alpha_m}$$

$$= \frac{A_o - P_1 - P_2 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m}{\sin \alpha_m};$$

$A_o - P_1 - P_2$ ist aber die Querkraft für das entsprechende Schnittfeld eines einfachen Balkens $= Q_{om}$, so daß

$$D_m = \frac{Q_{om} - H \cdot \dfrac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m}}{\sin \alpha_m} = \frac{Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m}{\cos \varphi_m \cdot \sin \alpha_m};$$

$Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m$ ist hierin die Querkraft Q_{mD} für einen Querschnitt des Schnittfeldes eines gewöhnlichen Dreigelenkbogens $a\,b\,c$. Somit wird

$$D_m = \frac{Q_{mD}}{\cos \varphi_m \cdot \sin \alpha_m}.$$

Die D_m-Linie ist daher die mit $\frac{1}{\cos\varphi_m \cdot \sin\alpha_m}$ multiplizierte Q_{mD}-Linie (Abb. 293a).

Führt man den Schnitt II—II und benutzt am links abgetrennten Teil die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$, so erhält man

$$V_{m-1} + A + H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 - P_1 - H \cdot \operatorname{tg}\varphi_m = 0.$$

Setzt man $A = A_o - H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1$ und $A_o - P_1 = Q_{o(m-1)}$, so wird

$$V_{m-1} = -(Q_{o(m-1)} - H \cdot \operatorname{tg}\varphi_m)$$

$$= -\frac{Q_{o(m-1)} \cdot \cos\varphi_m - H \cdot \sin\varphi_m}{\cos\varphi_m} = -\frac{Q_{(m-1)D}}{\cos\varphi_m}.$$

Die V_{m-1}-Linie ist daher die mit $-\frac{1}{\cos\varphi_m}$ multiplizierte $Q_{(m-1)D}$-Linie (Abb. 293b). Man beachte, daß die Einflußlinie zwischen den Querträgern des $(m-1)$ten Feldes (durch welches der Schnitt II—II hindurchgeht) geradlinig verlaufen muß.

Zur Herleitung der Einflußlinie für den Auflagerdruck A benutzen wir die Formel

$$A = A_o - H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1.$$

Wir erhalten daher die A-Linie, wenn wir von der A_o-Linie die $H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1$-Linie abziehen. Letztere ist durch den Nullpunkt e bestimmt, der senkrecht unter E liegen muß (Abb. 294), wie nachfolgend bewiesen wird. Wir bringen in E die Last 1 t an und zeichnen für diese Belastung ein Seilpolygon, dessen Seilstrahlen mit den Strahlen I und II zusammenfallen. Das zugehörige Kräftepolygon erhalten wir, indem wir durch den Anfangs- und Endpunkt der Kraft 1 t Parallele zu I und II ziehen, die sich in O schneiden. Ziehen wir dann durch O eine Parallele zur Schlußlinie s, so schneidet diese von der Last 1 t die Auflagerdrücke A_o und B_o ab. In den ähnlichen Dreiecken Odg (Abb. 294b) und bch (Abb. 294) muß sich dann verhalten

Abb. 294.

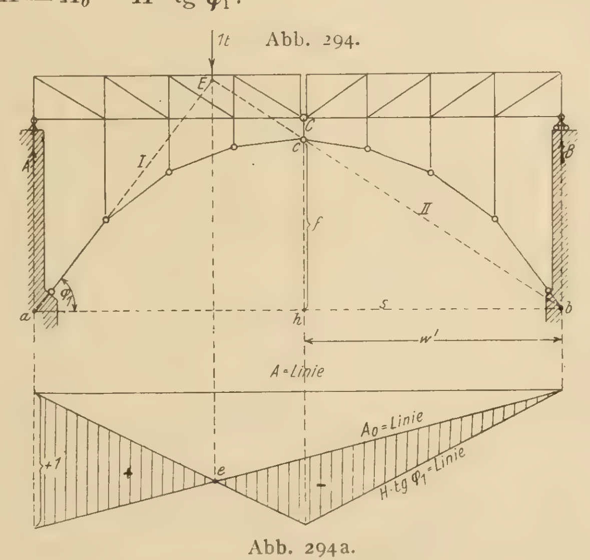


Abb. 294a.

$$\frac{H'}{B_o} = \frac{w'}{f}, \text{ so daß } H' = \frac{B_o \cdot w'}{f} = \frac{M_{oC}}{f} = H.$$

Ferner ist nach Abb. 294b

$$A_o = H' \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1.$$

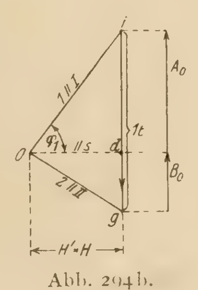


Abb. 294b.

Setzen wir diesen Wert in die für A hergeleitete Formel

$$A = A_o - H \cdot \operatorname{tg}\varphi_1$$

ein, so erhalten wir

$$A = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 0.$$

Die Last 1 t in E bringt daher $A = 0$ hervor. Senkrecht unter E muß also der Nullpunkt der Einflußlinie liegen.

Wir zeichnen daher zunächst die A_0-Linie, bestimmen E und finden mit Hilfe von e die $H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$-Linie, die von der A_0-Linie abzuziehen ist (Abb. 294a).

C. Die durch einen Balken versteifte Kettenbrücke.

Die durch einen Balken versteifte Kettenbrücke kann als die Umkehrung des unter B behandelten Stabbogens aufgefaßt werden. Die Spannkräfte in

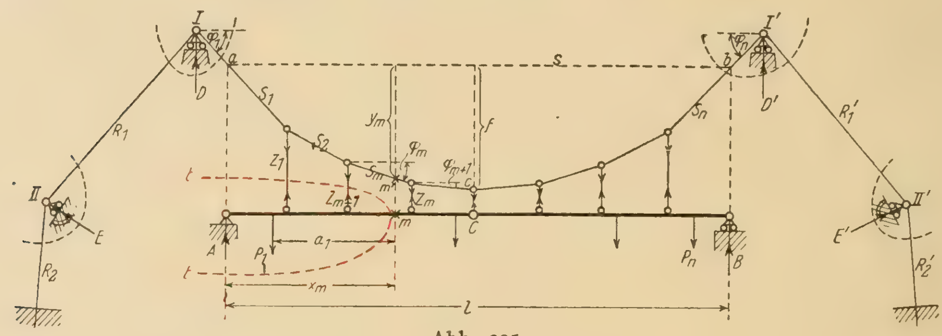


Abb. 295.

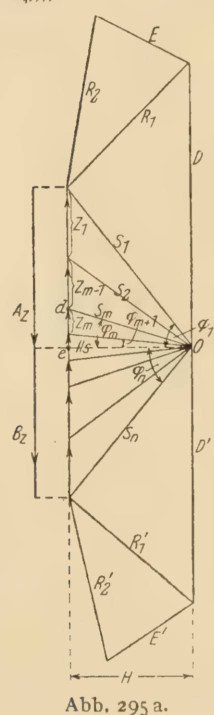


Abb. 295a.

den Hängestangen und den Kettengliedern sind Zugkräfte. Im übrigen gelten alle für den Stabbogen gemachten Ausführungen auch für die Kettenbrücke. Man beachte namentlich das über die Formbestimmung des Stabbogens und die Beanspruchung infolge des Eigengewichts Gesagte. Der Versteifungsbalken muß also auch im vorliegenden Fall so montiert werden, daß sein ganzes Gewicht einschließlich des Fahrbahngewichts an der Kette hängt, so daß er infolge des Eigengewichts spannungslos ist und nur durch die Verkehrslast beansprucht wird.

Der Einfachheit halber wurde in den nachfolgenden Entwicklungen angenommen, daß die Punkte a und b (Abb. 295) gleich hoch liegen. Auf den Versteifungsbalken wirken genau wie beim Stabbogen die nach unten gerichteten Verkehrslasten P und die nach oben gerichteten durch die Kräfte P verursachten Zugspannkräfte Z in den Hängestangen.

Der Gleichgewichtszustand des Versteifungsbalkens stimmt daher überein mit dem Gleichgewichtszustand des in Abb. 291b auf Seite 206 dargestellten Versteifungsbalkens des Stabbogens, so daß die dort entwickelten Formeln für A und M_m auch für den vorliegenden Fall benutzt werden dürfen. Demgemäß ist

$$A = A_0 - A_z \text{ und } M_m = M_{0m} - M_{zm}.$$

A_z und M_{zm} werden wie bei dem Stabbogen mit Hilfe eines Seilpolygons gefunden. Da die Kettenspannkräfte S mit den auf die Kette wirkenden

Kräften Z im Gleichgewicht sein müssen, kann die Kette als das Seilpolygon der Z-Kräfte aufgefaßt werden. Das zugehörige Kräftepolygon zeigt Abb. 295a, in welchem die Polstrahlen S_1 bis S_n die Spannkräfte in den Kettenstäben darstellen und von der im Abstande H von dem Pol O gezogenen Senkrechten die Spannkräfte Z in den Hängestangen abschneiden. H ist der Horizontalzug der Kette. Ist H bekannt, so sind die Kettenspannkräfte S_1 bis S_n sowie die Z-Kräfte bestimmt, desgl. die Spannkräfte R_1, R_2, R_1', R_2' in den Rückhaltketten sowie die Auflagerdrücke D, E, D' und E'. Am abgetrennten Knoten I sind nämlich S_1, D und R_1 miteinander im Gleichgewicht. S_1 ist daher nach D und R_1 zu zerlegen. Ebenso müssen sich am Knoten II R_1, E und R_2 das Gleichgewicht halten, so daß man E und R_2 durch Zerlegung von R_1 nach den Richtungen von E und R_2 erhält. Entsprechend findet man an den Knoten I' und II' die Kräfte D', R_1' bezw. E' und R_2'.

Zieht man dann durch den Pol O des Kräftepolygons eine Parallele zu der dem Balken entsprechenden Schlußlinie s, so schneidet diese von der Mittelkraft der nach oben auf den Balken wirkenden Z-Kräfte die nach unten gerichteten Auflagerdrücke A_z und B_z ab. Somit wird nach Abb. 295a

$$A_z = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{und} \quad B_z = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_n,$$

ferner
$$\boldsymbol{S_m = H \cdot \sec \varphi_m}$$

und
$$Z_m = H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_{m+1} = \boldsymbol{H (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \varphi_{m+1})}.$$

Man erhält somit $\quad \boldsymbol{A} = A_o - A_z = \boldsymbol{A_o - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1}.$

Entsprechend findet man $\quad \boldsymbol{B = B_o - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_n}.$

Für das Moment in m besteht die Formel

$$M_m = M_{om} - M_{zm},$$

worin M_{zm} das durch die Kräfte Z in m hervorgerufene Moment ist. Dieses findet man wieder wie bei dem Stabbogen mit Hilfe eines Seilpolygons als Produkt aus der Polweite H des Kräftepolygons und der über m liegenden, auf die Schlußlinie s bezogenen Ordinate y_m des Seilpolygons, das durch die Kette selbst gebildet wird. Mithin wird

$$\boldsymbol{M_{zm}} = H \cdot y_m \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M_m = M_{om} - H \cdot y_m}.$$

Für das Gelenk C gilt dann die Gleichung

$$M_C = M_{oC} - H \cdot f.$$

Da dieses Moment $= 0$ sein muß, so entsteht die Bedingungsgleichung

$$M_{oC} - H \cdot f = 0, \quad \text{woraus} \quad \boldsymbol{H = \frac{M_{oC}}{f}}.$$

Die für M_m und H abgeleiteten Formeln stimmen überein mit den Formeln für das Moment M_m und den Horizontalschub H eines steifen Dreigelenkbogens $a\,b\,c$, wenn der Punkt m die Lage m' hat. Folglich stimmen auch die Einflußlinien für H und M_m mit den auf Seite 177 u. 178 hergeleiteten Einflußlinien für einen derartigen Dreigelenkbogen überein (Abb. 296a u. 296b).

Da die durch die Verkehrslasten verursachten Spannkräfte in den Hängestangen, den Stäben der Kette und der Rückhaltketten, ferner die Auflagerdrücke D, E, D' und E' nur von H abhängig sind (wie ein Blick auf Abb. 295a zeigt), so erhält man deren Größtwerte gleichzeitig mit dem Größtwert von H,

der mit Hilfe der Einflußlinie für H gefunden werden kann. Nach Ermittlung von $H_{\max}$ erhält man dann nach Abb. 295a die Größtwerte für die Spannkräfte Z, S, R, E und D.

Diese Kräfte sind dann noch zu den durch das Eigengewicht verursachten Kräften zu addieren.

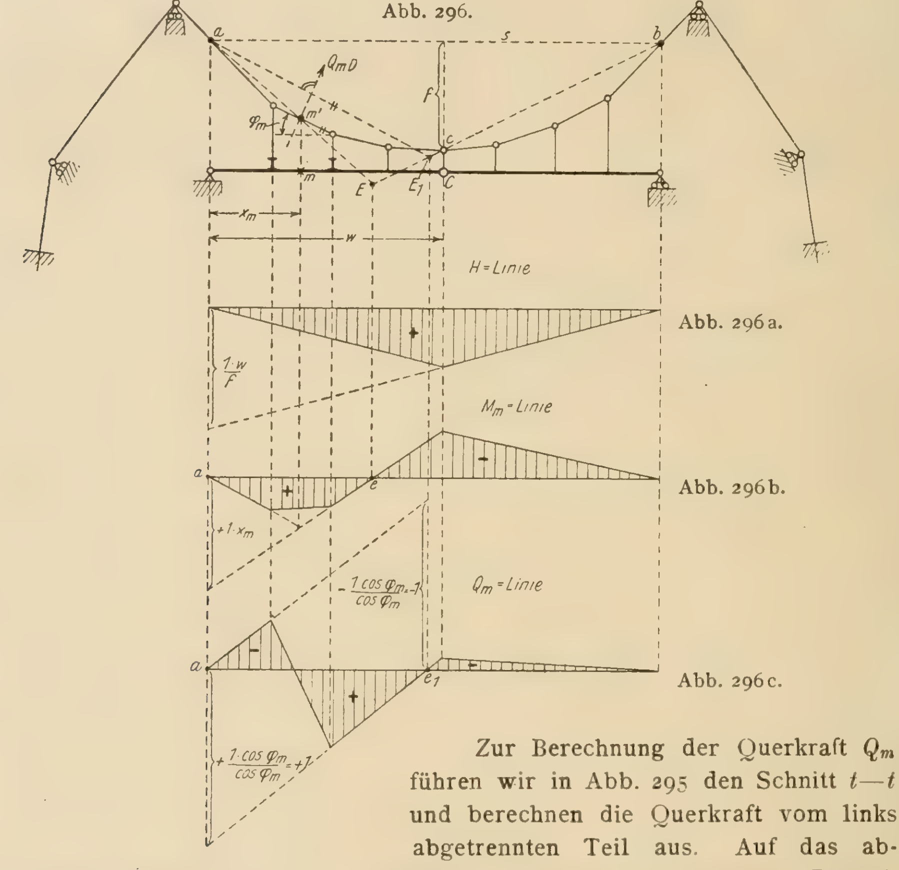


Abb. 296.

Abb. 296a.

Abb. 296b.

Abb. 296c.

Zur Berechnung der Querkraft Q_m führen wir in Abb. 295 den Schnitt $t—t$ und berechnen die Querkraft vom links abgetrennten Teil aus. Auf das abgetrennte Balkenstück wirken die Kräfte A, Z_1 und Z_{m-1} nach oben, P_1 nach unten, so daß man erhält

$$Q_m = A + Z_1 + Z_{m-1} - P_1.$$

Setzt man $A = A_o - A_z$, so ergibt sich

$$Q_m = A_o - P_1 - (A_z - Z_1 - Z_{m-1}).$$

$A_z - Z_1 - Z_{m-1}$ ist nach Abb. 295a gleich der Kathete de des rechtwinkligen Dreiecks Ode, mithin $= H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m$.

Ferner ist $A_o - P_1 = Q_{om} =$ der Querkraft eines einfachen Balkens. Setzt man diese Werte in die für Q_m aufgestellte Gleichung ein, so erhält man

$$Q_m = Q_{om} - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_m = Q_{om} - H \cdot \frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m}$$

$$= \frac{Q_{om} \cdot \cos \varphi_m - H \cdot \sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \frac{Q_{mD}}{\cos \varphi_m},$$

worin Q_{mD} = der Querkraft für das dem $m$ten Balkenfelde entsprechende Schnittfeld eines steifen Dreigelenkbogens $a—b—c$ ist. Die Q_m-Linie ist daher die mit $\frac{1}{\cos \varphi_m}$ multiplizierte Q_{mD}-Linie (Abb. 296c).

Abb. 297.

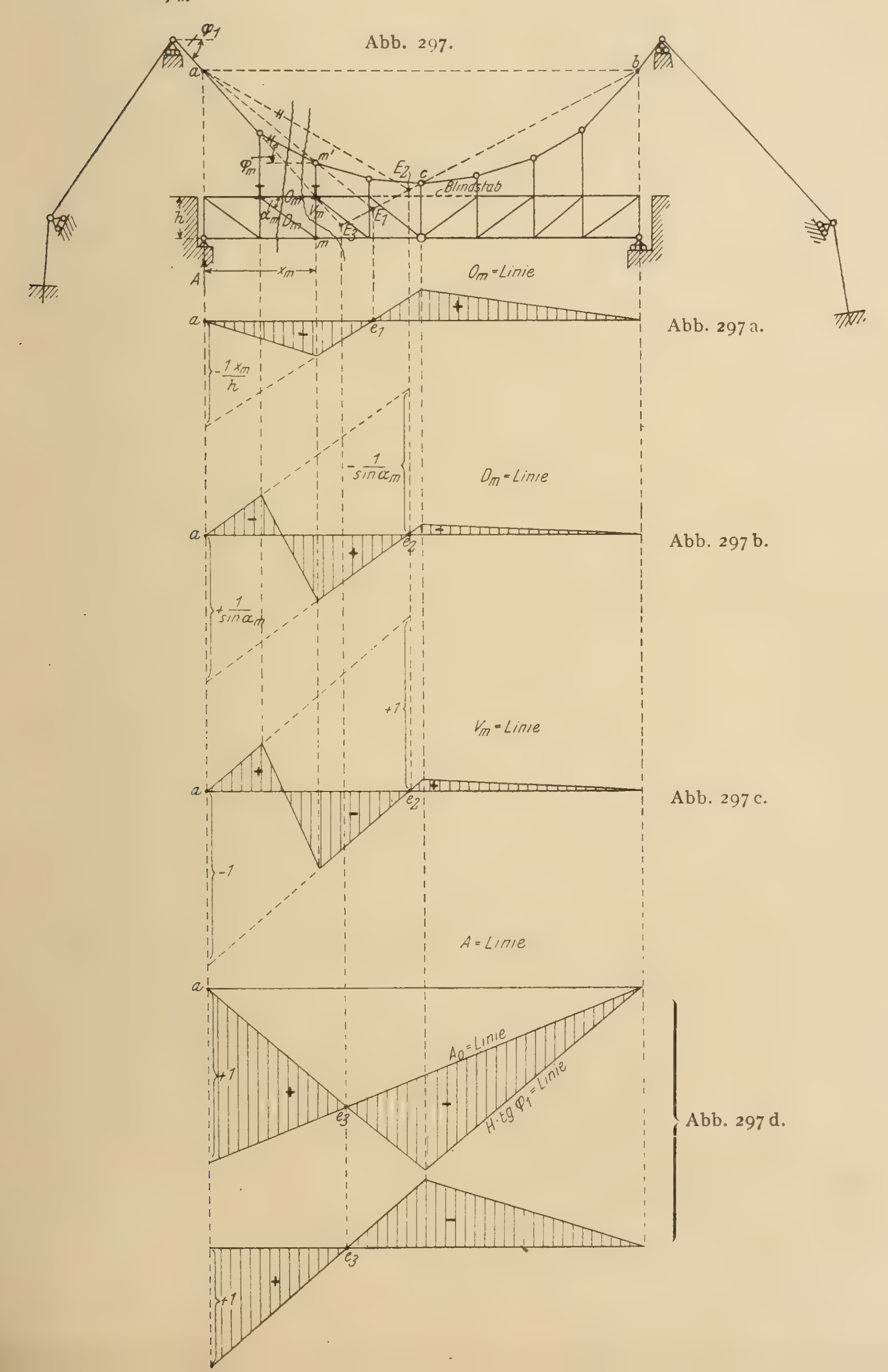


Abb. 297a.

Abb. 297b.

Abb. 297c.

Abb. 297d.

Mit Hilfe der gefundenen Einflußlinien ist es nun leicht, auch die Einflußlinien für die Stabspannkräfte eines fachwerkartigen Versteifungsbalkens herzuleiten (Abb. 297).

So ist z. B. $O_m = -\frac{M_m}{h}$, die O_m-Linie daher die mit $-\frac{1}{h}$ multiplizierte M_m-Linie (Abb. 297a).

Ferner ist $D_m = \frac{Q_m}{\sin \alpha_m}$. Die D_m-Linie ist daher die mit $\frac{1}{\sin \alpha_m}$ multiplizierte Q_m-Linie (Abb. 297b).

Endlich ist $V_m = -Q_m$, die V_m-Linie daher die mit -1 multiplizierte Q_m-Linie (Abb. 297c).

Da $A = A_o - H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$, so erhält man die A-Linie, wenn man von der A_o-Linie die $H \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$-Linie abzieht. Letztere ist nach Zeichnung der A_o-Linie mittels des Nullpunktes e_3 bestimmt, der senkrecht unter E_3 liegt (Abb. 297d). Der auf Seite 209 aufgestellte Beweis für die Richtigkeit der Lage des Nullpunktes e_3 gilt auch hier (vergl. Abb. 294, 294a u. 294b).

§ 10. Kinematische Theorie des ebenen Fachwerks.[1]

1. Allgemeines über die Bewegung einer starren Scheibe.

Eine starre Scheibe $a\,b\,c$ werde durch irgend eine Kraftwirkung in die Lage $a'\,b'\,c'$ verschoben (Abb. 298). Errichtet man auf den Verbindungslinien zweier gleichliegender Punkte, z. B. von a—a' und b—b' die Mittelsenkrechten und bestimmt deren Schnittpunkt $\mathfrak{P}$, so sind die Dreiecke $\mathfrak{P}\,a\,b$ und $\mathfrak{P}\,a'\,b'$ gleichliegend kongruent, denn $\overline{\mathfrak{P}a} = \overline{\mathfrak{P}a'}$ und $\overline{\mathfrak{P}b} = \overline{\mathfrak{P}b'}$ als Seiten der gleichschenkligen Dreiecke $\mathfrak{P}\,a\,a'$ und $\mathfrak{P}\,b\,b'$. Ferner ist $\overline{a\,b} = \overline{a'\,b'}$ nach Voraussetzung. Schlägt man um $\mathfrak{P}$ mit den Radien $\overline{\mathfrak{P}a}$ und $\overline{\mathfrak{P}b}$ Kreisbogen s_a und s_b, so erkennt man, daß die Punkte a und b durch Drehung um den Punkt $\mathfrak{P}$ in die Lage a' bezw. b' gelangt sind. Man kann daher die Bewegung der starren Scheibe $a\,b\,c$ als eine Drehbewegung um den Punkt $\mathfrak{P}$ auffassen. Die Geschwindigkeit des Punktes a hat bei Beginn der Bewegung die Richtung der in a an den Kreisbogen s_a gezeichneten Tangente. Ebenso fällt die Geschwindigkeitsrichtung des Punktes b mit der in b an den Kreisbogen s_b gezeichneten Tangente zusammen. Dasselbe gilt von c und von jedem beliebigen Punkte der starren Scheibe.

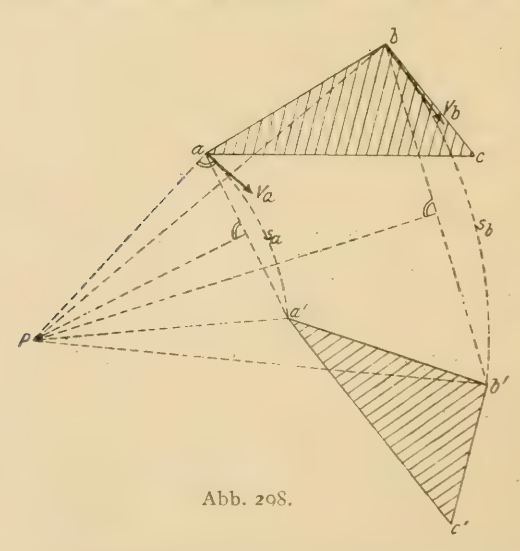


Abb. 298.

Ist die Zeitdauer der Bewegung unendlich klein, so sind auch die Kreisbogen s_a und s_b und damit auch die Strecken $a\,a'$ und $b\,b'$ unendlich klein.

[1]) Nach Müller-Breslau, Graph. Statik, Bd. I, § 54 und 55.

Sie fallen dann zusammen mit den Bogenelementen ds, die senkrecht zu $\overline{\mathfrak{P}a}$ bezw. $\overline{\mathfrak{P}b}$ gerichtet sind (Abb. 299). In dieselben Richtungen fallen dann auch die Geschwindigkeiten V_a und V_b.

Man kann sich nun offenbar die Bewegung einer Scheibe zusammengesetzt denken aus unendlich vielen Drehbewegungen um ebenso viele Drehpunkte $\mathfrak{P}$. In jedem Augenblick dreht sich die Scheibe um einen anderen Punkt $\mathfrak{P}$, der bestimmt ist, sobald man die augenblicklichen Geschwindigkeitsrichtungen zweier Punkte der Scheibe kennt, und zwar als Schnittpunkt der senkrecht zu diesen Geschwindigkeiten gerichteten Strahlen. Damit ist dann aber auch die augenblickliche Geschwindigkeitsrichtung jedes anderen Punktes der Scheibe bestimmt. So hat z. B. die Geschwindigkeit des Punktes c die Richtung $V_c \perp \overline{\mathfrak{P}c}$, während $V_x \perp \overline{\mathfrak{P}x}$ gerichtet ist.

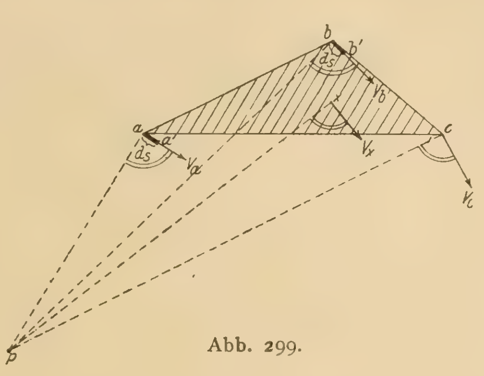


Abb. 299.

Die Strahlen $\overline{\mathfrak{P}a}$, $\overline{\mathfrak{P}b}$, $\overline{\mathfrak{P}c}$, $\overline{\mathfrak{P}x}$ heißen die Polstrahlen der Punkte a, b, c, x, der Punkt $\mathfrak{P}$ der augenblickliche Drehpol oder auch Momentanpol.

Trägt man die Geschwindigkeiten V_a, V_b, V_c in irgend einem Maßstabe als Strecken auf und dreht dann diese Strecken um 90° so, daß sie in ihre Polstrahlen fallen $\left(\overline{a\,a'} \perp V_a,\ \overline{b\,b'} \perp V_b,\ \overline{c\,c'} \perp V_c\right.$ (Abb. 300)$\left.\right)$, so nennt man die um 90° gedrehten Geschwindigkeiten die lotrechten Geschwindigkeiten (V_a', V_b', V_c'). Ist die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehbewegung $= \omega$, so ist die Lineargeschwindigkeit irgend eines Punktes der sich drehenden Scheibe gleich dem Produkt aus dem Krümmungsradius und der Winkelgeschwindigkeit des Punktes. Es wird daher

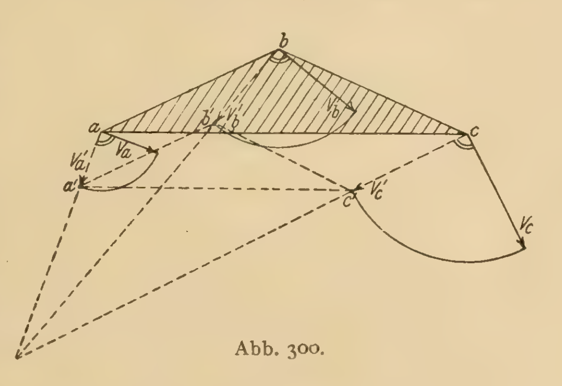


Abb. 300.

$$V_a = \overline{\mathfrak{P}a} \cdot \omega,\ \ V_b = \overline{\mathfrak{P}b} \cdot \omega,\ \ V_c = \overline{\mathfrak{P}c} \cdot \omega \ \text{ usw.}$$

Dividiert man diese Gleichungen durcheinander, so entsteht die Proportion

$$V_a : V_b : V_c : \ldots = \overline{\mathfrak{P}a} : \overline{\mathfrak{P}b} : \overline{\mathfrak{P}c} : \ldots$$

D. h. die Polstrahlen von Punkten einer sich drehenden starren Scheibe verhalten sich wie die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Da $\quad V_a = V_a',\ \ V_b = V_b',\ \ V_c = V_c'$ usw.,

so gilt auch $\quad V_a' : V_b' : V_c' : \ldots = \overline{\mathfrak{P}a} : \overline{\mathfrak{P}b} : \overline{\mathfrak{P}c} : \ldots$

D. h. die Polstrahlen verhalten sich auch wie die zugehörigen lotrechten Geschwindigkeiten.

Verbindet man daher die Endpunkte a', b', c' der lotrechten Geschwindigkeiten miteinander, so entsteht eine Figur, deren Seiten zu den Seiten der ursprünglichen Figur parallel verlaufen müssen. Denn dann besteht nach Abb. 300 die Proportion

$$\overline{a\,a'} : \overline{b\,b'} : \overline{c\,c'} = \overline{\mathfrak{P}\,a} : \overline{\mathfrak{P}\,b} : \overline{\mathfrak{P}\,c}$$

und mit $a\,a' = V_a'$, $b\,b' = V_b'$ und $c\,c' = V_c'$

$$V_a' : V_b' : V_c' = \overline{\mathfrak{P}\,a} : \overline{\mathfrak{P}\,b} : \overline{\mathfrak{P}\,c}.$$

Wir wollen in Zukunft die ursprüngliche Figur der Kürze halber mit F und die durch Verbindung der Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten entstandene Parallelfigur mit F' bezeichnen.

2. Kennzeichen der Starrheit oder Beweglichkeit einer Figur.

A. Geometrisches Kennzeichen.

Die in Abb. 301 dargestellte Figur F bestehe aus vier starren Scheiben I bis IV, die gelenkig miteinander verbunden sind. Die Scheiben seien hier Fachwerkstäbe. Es soll untersucht werden, ob die Figur starr oder beweglich ist.

Wir denken uns der Figur eine willkürliche Bewegung erteilt. Die irgend einem Augenblick der Bewegung entsprechende Figur F' sei dargestellt durch das Viereck 1' 2' 3' 4', so daß also $\overline{1'\,2'} \parallel \overline{1\,2}$, $\overline{2'\,3'} \parallel \overline{2\,3}$, $\overline{3'\,4'} \parallel \overline{3\,4}$ und $\overline{4'\,1'} \parallel \overline{4\,1}$. Die lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2, 3 und 4 sind dann durch die Strecken $\overline{1\,1'}$, $\overline{2\,2'}$, $\overline{3\,3'}$ und $\overline{4\,4'}$ dargestellt, da eine Figur F' durch die Verbindung der Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten entsteht. Die Polstrahlen der zur Scheibe I gehörenden Punkte 1 und 2 haben dann die Richtungen $\overline{1\,1'}$ und $\overline{2\,2'}$, da die Richtungen der Polstrahlen mit den Richtungen der entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten zusammenfallen. Diese Polstrahlen schneiden sich aber in dem Momentanzentrum der Scheibe I, d. h. in $\mathfrak{P}_I$. Entsprechend finden wir den Momentanpol der Scheibe II ($\mathfrak{P}_{II}$) als Schnittpunkt der Polstrahlen der zur Scheibe II gehörenden Punkte 2 und 3, die mit den Richtungen der lotrechten Geschwindigkeiten $\overline{2\,2'}$ bezw. $\overline{3\,3'}$ zusammenfallen müssen. Sinngemäß werden noch $\mathfrak{P}_{III}$ und $\mathfrak{P}_{IV}$ bestimmt.

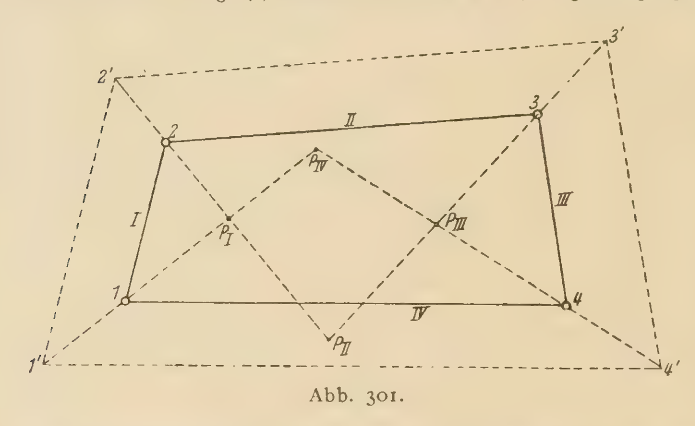


Abb. 301.

Bei der angenommenen Bewegung der Figur F würde sich daher in dem der Figur F' entsprechenden Augenblick jede Scheibe um einen besonderen Pol drehen. Die Figur ist daher beweglich. Würden die Pole $\mathfrak{P}_I$ bis $\mathfrak{P}_{IV}$ bei jeder möglichen Bewegung in einem Punkte zusammenfallen, so würden sich die vier Scheiben der Figur F bei jeder Bewegung um einen gemeinsamen

Pol drehen. Die Figur F wäre dann eine starre Figur. Dieser Fall tritt ein, wenn sich nur ähnliche Figuren F' zu der Figur F zeichnen lassen, deren Ähnlichkeitspunkt dann der gemeinsame Pol der vier Scheiben ist. Man kann daher sagen: **Gelingt es, zu einer Figur F auch nur eine einzige unähnliche Figur F' zu zeichnen, so ist die Figur F beweglich.**

Das aus drei Scheiben bestehende Fachwerkdreieck ist daher eine starre Figur. Denn es lassen sich zu ihr **nur** ähnliche Figuren F' zeichnen (Abb. 302 u. 303).

Wie man auch die Figur F' zeichnet, immer werden sich die Verbindungslinien der Punkte 1 und 1', 2 und 2', 3 und 3' in einem Punkte $\mathfrak{P}$ schneiden.

Wenn man die lotrechten Geschwindigkeiten in einem derartigen Maßstabe aufträgt, daß sie gleich den zugehörigen Polstrahlen werden, so schrumpft die Figur F' zu einem Punkte zusammen, der in dem Momentanzentrum $\mathfrak{P}$ liegt, wie aus Abb. 304 hervorgeht. Ist daher das Momentanzentrum einer Scheibe bekannt, so erhält man die einfachste Figur F', wenn man die lotrechte Geschwindigkeit eines Punktes gleich dessen Polstrahl macht, so daß ihr Endpunkt in das Momentanzentrum fällt. Alsdann müssen auch die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte der Scheibe in dem Momentanzentrum liegen, eine Beziehung, die wir später für die Berechnung von Stabspannkräften häufiger verwenden werden.

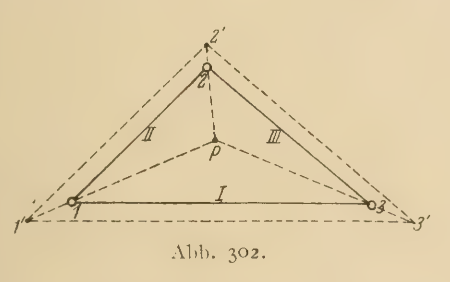


Abb. 302.

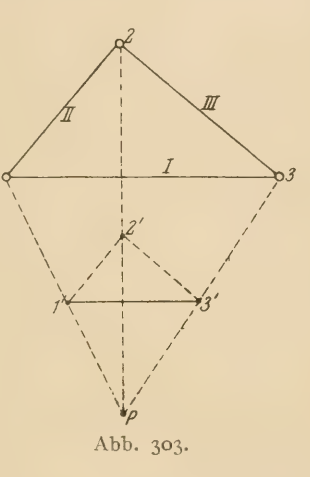


Abb. 303.

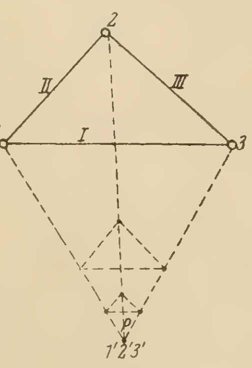


Abb. 304.

Lagert man den Stab 1—3 (Abb. 305) mittels eines festen und eines beweglichen Lagers und schließt den Punkt 2 durch zwei Stäbe an den Stab 1—3 an, so entsteht eine statisch bestimmte starre Figur. Bringt man nämlich im Punkte 2 eine beliebig gerichtete Kraft an, so lassen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die Auflagerdrücke A und B bestimmen. In jedem Knotenpunkt der Figur greifen dann gegebene äußere Kräfte an. Zerlegt man diese nach den Richtungen der in dem Knotenpunkt zusammentreffenden Stäbe, so erhält man deren Spannkräfte.

Abb. 305.

Schließt man an das starre Dreieck 1—2—3 (Abb. 306) einen weiteren Knotenpunkt 4 zweistäbig an, so ist das so entstandene Stabnetz ebenfalls statisch bestimmt und starr. Auf diese Weise kann man beliebig viele Knotenpunkte mit zwei bereits festliegenden Punkten in Verbindung bringen und erhält so ein statisch bestimmtes Stabnetz, dessen Knotenpunkte sich nicht gegeneinander bewegen können. Lagert man dieses mittels eines festen und eines beweglichen Auflagers, so können die durch die äußeren Kräfte P verursachten Auflagerdrücke mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden, wodurch auch die Stabkräfte bestimmt sind. So findet man durch Zerlegung der an dem Knoten 1 wirkenden Mittelkraft der Auflagerdrücke A und C nach den Richtungen der in 1 zusammentreffenden Stäbe 1—2 und 1—3 die Spannkräfte U_1 und O_1. Auf den Knoten 2 wirken dann U_1 und P_3, deren Mittelkraft nach den Richtungen der Stäbe 2—3 und 2—4 zerlegt wird, wodurch man die Spannkräfte D_1 und U_2 erhält. Zerlegt man ferner die auf den Knoten 3 wirkende Mittelkraft von O_1 und D_1 nach den Richtungen der Stäbe 3—4 und 3—5, so findet man deren Spannkräfte D_2 und O_2. Auf diese Weise trifft man an jedem Knotenpunkt nur auf zwei unbekannte Stabkräfte, die jedesmal durch Zerlegung der an dem Knotenpunkt wirkenden bereits bekannten Kräfte nach den Richtungen der beiden Unbekannten bestimmt werden können. Das aus lauter Dreiecken zusammengesetzte Fachwerk ist daher ein statisch bestimmtes, starres System.

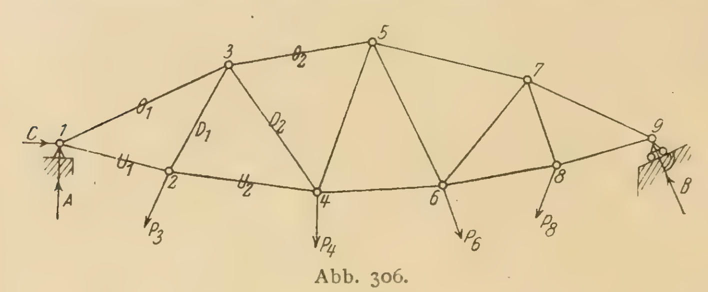


Abb. 306.

B. Analytisches Kennzeichen.

An einem Fachwerk sei $s =$ Anzahl der Stäbe
$b =$ „ „ beweglichen Auflager
$f =$ „ „ festen „
$k =$ „ „ Knotenpunkte.

An einem festen Auflager ist der Widerstand bei beliebiger Richtung der auf das System wirkenden Kräfte der Größe und Richtung nach unbekannt, an einem beweglichen Auflager nur der Größe nach, da er unter der Annahme einer reibungslosen Gleitbahn in deren Normale fallen muß.

Es treten daher an jedem festen Auflager zwei, an jedem beweglichen Auflager eine Unbekannte auf. Außerdem sind noch s unbekannte Stabkräfte S vorhanden, so daß die Anzahl der Unbekannten im ganzen $s + b + 2f$ beträgt.

Da für Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt zwei Gleichgewichtsbedingungen (z. B. $\Sigma H = 0$ und $\Sigma V = 0$) notwendig und hinreichend sind (nur für Kräfte, die nicht an einem Punkt angreifen, müssen drei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein, z. B. $\Sigma H = 0$, $\Sigma V = 0$ und $\Sigma M = 0$), so können an jedem Knotenpunkt zwei Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Es

lassen sich daher zur Berechnung der $s + b + 2f$ Unbekannten im ganzen $2k$ Gleichungen aufstellen.

Ist nun $s + b + 2f = 2k$, so sind sämtliche Unbekannten eindeutig bestimmt. In diesem Falle ist also die für den zweistäbigen, d. h. starren Anschluß der Knotenpunkte erforderliche Stabzahl vorhanden. Es liegt daher ein statisch bestimmtes, starres Fachwerk vor.

Ist dagegen $s + b + 2f < 2k$, so ist, vorausgesetzt, daß die zur statisch bestimmten Lagerung notwendigen Auflager vorhanden sind, die zum zweistäbigen Anschluß der Knotenpunkte erforderliche Stabzahl nicht vorhanden. Das Fachwerk ist dann beweglich, also unbrauchbar. Fehlen z. B. n Stäbe, so nennt man das Fachwerk n fach beweglich.

Ist endlich $s + b + 2f > 2k$, so sind entweder Stäbe überzählig oder mehr Auflager vorhanden, als zur statisch bestimmten Lagerung erforderlich sind. Zur Berechnung der Unbekannten reichen alsdann die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr aus. Es müssen noch soviel Elastizitätsgleichungen zu Hilfe genommen werden, als überzählige Unbekannte vorhanden sind. Ein derartiges Fachwerk nennt man überstarr oder statisch unbestimmt, und zwar innerlich, wenn Stäbe, äußerlich, wenn Auflager überzählig sind.

In dem in Abb. 306 dargestellten Fachwerk ist beispielsweise $s = 15$, $b = 1$, $f = 1$, $k = 9$, so daß $s + b + 2f = 2k$ wird, nämlich $15 + 1 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 9$, d. h. $18 = 18$.

Es liegt also ein statisch bestimmtes, starres Fachwerk vor.

In dem Fachwerk nach Abb. 307 ist $s = 40$, $b = 1$, $f = 1$, $k = 21$. Es ergibt sich $s + b + 2f > 2k$, denn es wird $40 + 1 + 2 \cdot 1 > 2 \cdot 21$, d. h. $43 > 42$.

Es kann nur ein Stab überzählig sein, da die zur statisch bestimmten Lagerung erforderlichen Auflager vorhanden sind. Das Fachwerk ist daher innerlich einfach statisch unbestimmt.

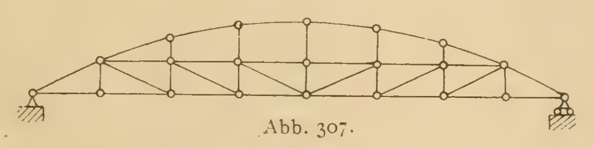


Abb. 307.

Für das in Abb. 308 dargestellte Fachwerk ist $s = 33$, $f = 2$, $b = 1$, $k = 18$. Es wird $s + b + 2f > 2k$, nämlich $33 + 1 + 2 \cdot 2 > 2 \cdot 18$, d. h. $38 > 36$.

Hier können nur zwei Auflagerdrücke überzählig sein, da die Fachwerkscheibe aus lauter Dreiecken zusammengesetzt, also sicher eine starre Figur ist, die keinen überzähligen Stab besitzt. Das Fachwerk ist daher zweifach äußerlich statisch unbestimmt.

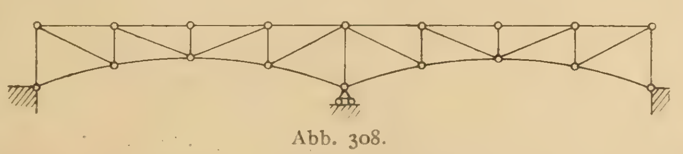


Abb. 308.

Man nennt das hergeleitete Kriterium für die Starrheit oder Beweglichkeit eines Fachwerks auch wohl kurz das Abzählungskriterium.

Das Kriterium ist jedoch nicht unbedingt zuverlässig, wie der in Abb. 309 dargestellte Fall zeigt. In dem zweiten Feld mögen sich zwei Diagonalen kreuzen, ohne an der Kreuzungsstelle miteinander verbunden zu sein, so daß

diese nicht als Knotenpunkt gilt. Das dritte Feld ist ein Gelenkviereck, das, wie unter 2, A auf Seite 216 nachgewiesen wurde, beweglich ist. Nach dem Abzählungskriterium würde das System aber ein starres sein, da $s + b + 2f = k$ wird ($s = 21$, $b = 1$, $f = 1$, $k = 12$, also $21 + 1 + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 12$; $24 = 24$).

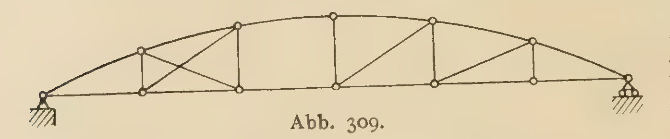


Abb. 309.

Wir müssen daher noch ein zweites Kriterium herleiten, das unbedingt zuverlässig ist.

Berechnet man die $2k$ Unbekannten nach der Determinantentheorie, so erscheint irgend eine Unbekannte in der Form $x = \frac{\text{Zählerdeterminante}}{\text{Nennerdeterminante}}$.

Es kann nun der Fall eintreten, daß die Nennerdeterminante $= 0$ wird. Das würde bedeuten, daß die Unbekannten x (also Stabkräfte oder Auflagerdrücke) entweder nicht alle eindeutig bestimmt oder nicht alle endlich sind oder daß ihre Berechnung nur für ganz bestimmte Belastungszustände möglich ist. Auf jeden Fall ist dann das Fachwerk unbrauchbar. Das zweite Kriterium lautet daher:

Die Nennerdeterminante der $2k$ Gleichgewichtsbedingungen muß $\gtrless 0$ werden.

Erst dann, wenn auch diese zweite Bedingung zutrifft, hat man die Gewähr, daß ein starres, brauchbares Fachwerk vorliegt.

3. Ableitung des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ (Abb. 310).

Das Gelenkviereck 1 2 3 4 ist, wie bereits unter 2, A nachgewiesen wurde, beweglich, und zwar einfach beweglich, da es einen Stab zu wenig besitzt. Würden wir die Diagonale 1—3 einziehen, so entstände ein starres System, da es dann aus zwei Fachwerkdreiecken zusammengesetzt wäre, die, wie oben gezeigt, starre Figuren sind.

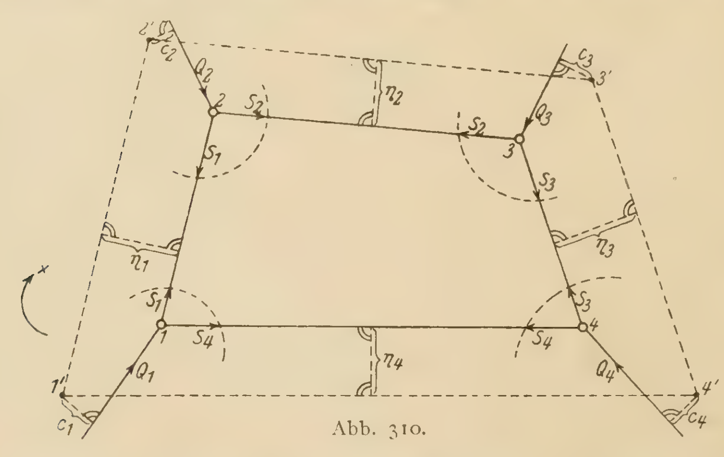


Abb. 310.

Auf ein derartiges einfach bewegliches System mögen in den Knotenpunkten äußere Kräfte Q (zu denen auch Auflagerdrücke gehören können) wirken, die miteinander im Gleichgewicht sind. In den Stäben des Gelenkvierecks werden alsdann Spannkräfte S_1, S_2, S_3, S_4 entstehen. Führen wir jetzt einen Schnitt um den Knoten 1 und ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte S_1 und S_4, die vorläufig als Zugkräfte eingeführt sein

mögen, so müssen Q_1, S_1 und S_4, sich das Gleichgewicht halten, da vor Führung des Schnittes nach Voraussetzung ebenfalls Gleichgewicht vorhanden war. Wir zeichnen jetzt eine beliebige Figur F', d. h. eine Figur, deren Seiten zu den Seiten des Gelenkvierecks parallel verlaufen, und benutzen für den abgetrennten, im Gleichgewicht befindlichen Knoten 1 die Gleichgewichtsbedingung: „Die Summe der Momente aller am Knoten wirkenden Kräfte in bezug auf den Punkt 1', den Endpunkt der lotrechten Geschwindigkeit des Punktes 1, muß = 0 sein.“ Dabei möge der in Abb. 310 durch einen Pfeil angedeutete Drehsinn für alle noch anzusetzenden Gleichgewichtsbedingungen als der positive eingeführt werden. Somit wird

1) $$+ S_4 \cdot \eta_4 - S_1 \cdot \eta_1 - Q_1 \cdot c_1 = 0.$$

An dem abgetrennten Knoten 2 benutzen wir die Momentengleichung für den Punkt 2' und erhalten

2) $$+ S_1 \cdot \eta_1 + Q_2 \cdot c_2 - S_2 \cdot \eta_2 = 0.$$

Am abgetrennten Knoten 3 setzen wir die Summe der Momente in bezug auf den Punkt 3' = 0, so daß

3) $$+ S_2 \cdot \eta_2 - S_3 \cdot \eta_3 - Q_3 \cdot c_3 = 0.$$

Endlich benutzen wir noch für den abgetrennten Knoten 4 eine Momentengleichung für den Punkt 4' und erhalten

4) $$+ S_3 \cdot \eta_3 + Q_4 \cdot c_4 - S_4 \cdot \eta_4 = 0.$$

Addieren wir jetzt diese vier Gleichungen, so heben sich sämtliche Werte $S \cdot \eta$ fort und es entsteht die Gleichung

$$\Sigma Q \cdot c = 0.$$

Die Gleichung gilt für jedes unter dem Einfluß äußerer Kräfte Q im Gleichgewicht befindliche, einfach bewegliche System. Die Hebelarme c dürfen dabei einer ganz beliebigen Figur F' entnommen werden und sind jedesmal bezogen auf die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der betreffenden äußeren Kräfte Q.

4. Berechnung von Stabspannkräften und Einflußlinien mittels des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$.

A. Zunächst möge die Anwendung der Gleichung ganz allgemein an der zwangläufigen, kinematischen Kette gezeigt werden. Darunter ist (nach Reuleaux) ein bewegliches Gebilde zu verstehen, dessen Glieder derart miteinander verkettet sind, daß sie nach Feststellung eines Gliedes gezwungen sind, ganz bestimmte Bahnen zu beschreiben. Die einfachste Form der zwangläufigen Kette ist das Gelenkviereck, das nach Abb. 311 aus der (festliegenden) Widerlagerscheibe und drei Stäben besteht. Das System ist, wie unter 2, A auf Seite 216 nachgewiesen wurde, einfach beweglich.

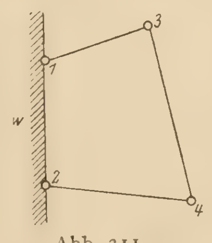


Abb. 311.

Schließt man an diese zwangläufige Kette weitere Knotenpunkte zweistäbig an, so ist das dadurch entstandene System ebenfalls einfach beweglich. So ist in Abb. 312 Punkt 5 zweistäbig an 1 und 4 durch die Stäbe 1—5 und 4—5, Punkt 6 an 3 und 5 durch die

Stäbe 3—6 und 5—6 und Punkt 7 an 4 und 6 durch die Stäbe 4—7 und 6—7 angeschlossen. Erteilt man nun diesem einfach beweglichen System irgend eine Verschiebung, so sind sämtliche Punkte gezwungen, bestimmte Bahnen zu beschreiben. Nehmen wir z. B. an, daß sich der Punkt 7 auf der Kurve k_1 bewegt, so sagen wir, er wird mittels einer zwangläufigen Kette auf der Bahn k_1 geführt. Verbindet man nun den Punkt durch einen Stab (7—8) mit dem festliegenden Widerlager, so wird er gezwungen, sich auf einer zweiten, die Bahn k_1 kreuzenden Bahn k_2 zu bewegen, die auf einem Kreisbogen mit dem Radius 7—8 liegt. Ein Punkt kann sich aber nicht auf zwei verschiedenen Bahnen bewegen. Daraus folgt, daß der Punkt 7 in der Ebene des Stabnetzes festgehalten ist. Das vorher bewegliche System ist mithin starr geworden. Bedingung für die Starrheit des Systems ist daher, daß die beiden Bahnen k_1 und k_2 sich kreuzen. Sie dürfen keine gemeinsame Tangente haben, da sich dann der Punkt 7 mindestens auf eine unendlich kleine Strecke, die mit dem Bogenelement beider Bahnen an der Berührungsstelle zusammenfällt, auf den Bahnen k_1 und k_2 bewegen könnte. Es läge also eine unendlich kleine Beweglichkeit vor, die nach Müller-Breslau bereits genügt, das System für praktische Zwecke unbrauchbar zu machen. Müller-Breslau geht sogar noch einen Schritt weiter und empfiehlt, dafür zu sorgen, daß sich die beiden Bahnen nicht unter zu spitzen Winkeln schneiden, damit die von der Elastizität der Stäbe und Widerlagerherrührenden Verschiebungen der Knotenpunkte nicht zu groß ausfallen.

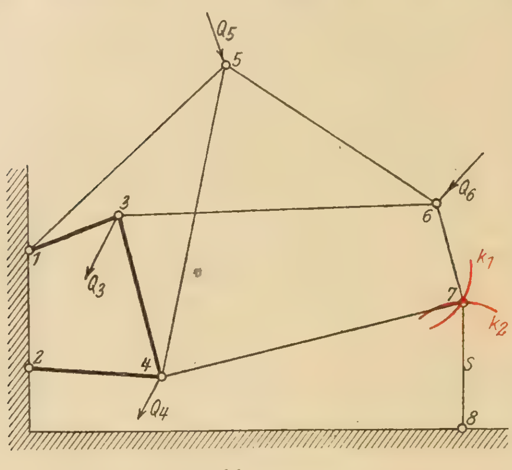


Abb. 312.

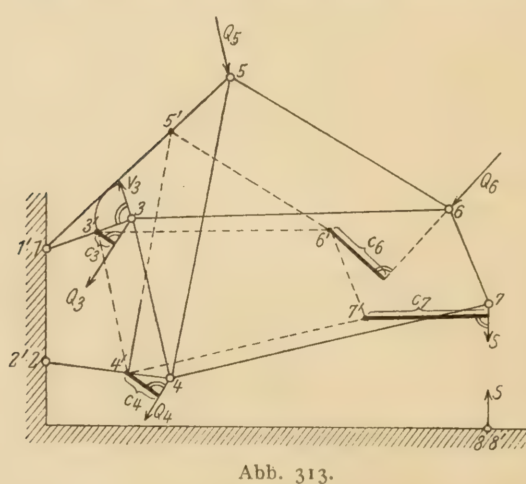


Abb. 313.

Das durch den Stab 7—8 starr gemachte System sei nun durch beliebig gerichtete äußere Kräfte Q belastet. Gesucht ist die Spannkraft S in dem Stabe 7—8.

Wir denken uns zunächst den Stab 7—8 wieder beseitigt und durch seine Spannkraft S ersetzt (Abb. 313), die vorläufig als Zugkraft angebracht ist und nunmehr zu den äußeren Kräften Q zählt. Dadurch wird das System wieder zur zwang-

läufigen Kette, also einfach beweglich, so daß für die Berechnung der Spannkraft S das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$, das für ein einfach bewegliches System abgeleitet wurde, angewandt werden darf. Dazu benötigen wir eine Figur F', und zwar, wie nachgewiesen wurde, eine ganz beliebige. Wir denken uns daher dem beweglichen System eine willkürliche Bewegung erteilt und zeichnen die dieser Bewegung entsprechende Figur F'. Die lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2 und 8 sind $= 0$, da diese Punkte festliegen. 1', 2' und 8' fallen daher mit den Punkten 1, 2 und 8 zusammen. Da der Punkt 3 sich nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 1 — 3 bewegen kann, fällt die Richtung seiner wirklichen Geschwindigkeit mit der Richtung der in 3 an den Kreisbogen gezeichneten Tangente zusammen. Die lotrechte Geschwindigkeit ist senkrecht dazu gerichtet, fällt also in die Stabrichtung 1 — 3. Wir wählen sie willkürlich gleich der Strecke 3 — 3'. Aus demselben Grunde muß 4' in die Stabrichtung 2—4 fallen und 2'—4' muß parallel zu 2 — 4 werden, da die Seiten der Figur F' zu den Seiten der Figur F parallel sein müssen. Damit ist 4' bestimmt. Da der Punkt 5 zweistäbig an 1 und 4 mittels der Stäbe 1 — 5 und 4 — 5 angeschlossen ist, ist 5' bestimmt durch die Bedingung: 1'—5' 1—5 und 4'—5' 4—5. Punkt 6 ist zweistäbig an 3 und 5 durch die Stäbe 3—6 und 5—6 angeschlossen. 6' ist daher bestimmt als Schnittpunkt der zu den Stäben 3—6 und 5—6 parallelen Geraden 3'—6' und 5'—6'. Endlich findet man noch 7' als Schnittpunkt der zu den Stäben 4 — 7 und 6 — 7 parallelen Geraden 4' — 7' und 6' — 7', da 7 zweistäbig an 4 und 6 durch die Stäbe 4 — 7 und 6 — 7 angeschlossen ist.

Nunmehr werden die Hebelarme c_3, c_4, c_5, c_6 und c_7 der äußeren Kräfte Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 und S in bezug auf die Punkte 3', 4', 5', 6' und 7' aus der Zeichnung abgegriffen und die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ angesetzt, wobei irgend ein Drehsinn willkürlich als positiver eingeführt werden kann. Man erhält dann

$$S \cdot c_7 + Q_3 \cdot c_3 + Q_4 \cdot c_4 + Q_5 \cdot c_5 + Q_6 \cdot c_6 = 0$$

$$S = -\frac{Q_3 \cdot c_3 + Q_4 \cdot c_4 + Q_5 \cdot c_5 + Q_6 \cdot c_6}{c_7}.$$

Das negative Vorzeichen besagt, daß S nicht, wie vorläufig angenommen wurde, eine Zugkraft, sondern eine Druckkraft ist.

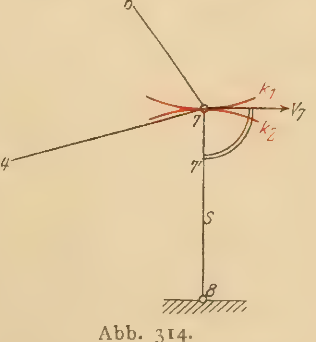


Abb. 314.

Fällt der Punkt 7' in die Richtung des Stabes S (Abb. 314), so daß seine lotrechte Geschwindigkeit gleich der Strecke 7 — 7' ist, dann ist die wirkliche Geschwindigkeit V_7 senkrecht zu S gerichtet. In diesem Falle wird daher der Punkt 7 in dem durch Beseitigung des Stabes S zur zwangläufigen Kette gewordenen System auf einer Bahn k_1 geführt, an welche die Richtung von V_7 im Punkte 7 tangential verläuft. Durch den Stab S wird nun der Punkt 7 auf der Bahn k_2 geführt (Kreisbogen um den Mittelpunkt 8), an die V_7 ebenfalls tangential verläuft, so daß beide Bahnen eine gemeinschaftliche Tangente haben. Es liegt daher der vorhin erwähnte Fall einer mindestens unendlich

kleinen Beweglichkeit vor, so daß das System in diesem Falle als unbrauchbar bezeichnet werden muß.

B. Das mehrteilige Netzwerk.

Man spricht von einem n-teiligen Netzwerk, wenn ein von Gurtung zu Gurtung reichender Füllungsstab durch eine Schar ihn kreuzender anderer Füllungsstäbe in n Teile geteilt wird. In Abb. 315 ist ein zweiteiliges Netzwerk dargestellt, welches folgendermaßen entstanden ist:

An die zwangläufige Kette 1, 2, 3, 4, also ein einfach bewegliches Gebilde, sind die Knotenpunkte 5 bis 12 zweistäbig angeschlossen, und zwar

5	an	1	und	3	durch	die	Stäbe	1—5	und	3—5
6	,,	4	,,	5	,,	,,	,,	4—6	,,	5—6
7	,,	4	,,	5	,,	,,	,,	4—7	,,	5—7
8	,,	6	,,	7	,,	,,	,,	6—8	,,	7—8
9	,,	6	,,	7	,,	,,	,,	6—9	,,	7—9
10	,,	8	,,	9	,,	,,	,,	8—10	,,	9—10
11	,,	8	,,	9	,,	,,	,,	8—11	,,	9—11
12	,,	10	,,	11	,,	,,	,,	10 12	,,	11—12.

Das so entstandene System ist daher ebenfalls eine zwangläufige Kette, also einfach beweglich. Wir machen es nun dadurch starr, daß wir den Punkt 11 durch den Stab 11—13 mit dem starren Widerlager verbinden. Gesucht sei die Spannkraft S in diesem Stabe infolge der Kräfte P_3, P_5, P_7 und P_9.

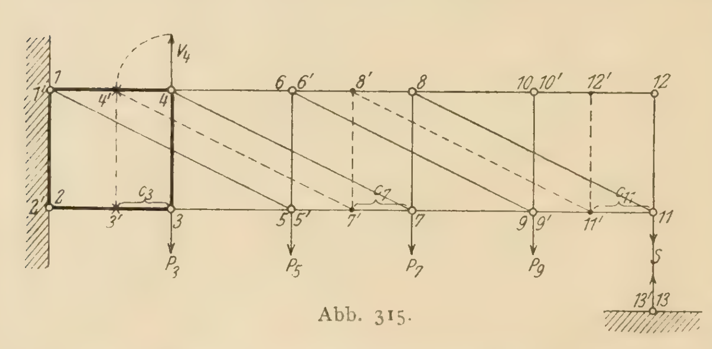


Abb. 315.

Wir denken uns den Stab beseitigt und durch seine Spannkraft S ersetzt, die nunmehr zu den äußeren Kräften zählt. Dadurch ist das System wieder eine zwangläufige Kette, also einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Man kann daher zur Berechnung von S das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ anwenden. Zur Bestimmung der Hebelarme c zeichnen wir nun eine beliebige Figur F'. Die lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte 1, 2 und 13 sind $= 0$, da diese Punkte in dem feststehenden Widerlager liegen. 1', 2' und 13' fallen daher mit 1, 2 und 13 zusammen. Der Punkt 4 kann sich nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 1—4 bewegen, da er durch den Stab 1—4 mit dem Widerlager gelenkig verbunden ist. Die wirkliche Geschwindigkeit V_4 hat daher die Richtung der in 4 an den Kreisbogen gezeichneten Tangente. Die lotrechte Geschwindigkeit ist senkrecht dazu gerichtet, fällt also in den Stab 1—4 hinein. Wir wählen, da die Figur F' beliebig sein darf, 4—4' beliebig groß. Aus demselben Grunde muß auch 3' in die Stabrichtung 2—3 fallen. Außerdem muß 4'—3' ‖ 4—3 verlaufen. Damit ist

auch 3′ bestimmt. Da 5 an 1 und 3 mittels der Stäbe 1—5 und 3—5 angeschlossen ist, findet man 5′ als Schnittpunkt der zu 1—5 und 3—5 parallelen Geraden 1′—5′ und 3′—5′. 5′ fällt daher mit 5 zusammen. Zur Bestimmung von 6′ zeichnen wir 4′—6′ ∥ 4—6 und 5′—6′ ∥ 5—6, da 6 an 4 und 5 mittels der Stäbe 4—6 und 5—6 angeschlossen ist. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist der mit 6 zusammenfallende Punkt 6′. Ebenso ist 7′ der Schnittpunkt der zu 4—7 und 5—7 parallelen Geraden 4′—7′ und 5′—7′, da 7 an 4 und 5 durch die Stäbe 4—7 und 5—7 angeschlossen war. So bestimmen wir der Reihe nach noch 8′, 9′, 10′, 11′ und 12′.

Nunmehr können die Hebelarme c_3, c_5, c_7, c_9 und c_{11} aus der Zeichnung abgegriffen werden. Es wird $c_3 = \overline{3-3'}$, $c_5 = \overline{5-5'} = 0$, $c_7 = \overline{7-7'}$, $c_9 = \overline{9-9'} = 0$, $c_{11} = \overline{11-11'}$. Setzen wir jetzt das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ an, so erhalten wir die Gleichung

$$S \cdot c_{11} + P_7 \cdot c_7 + P_3 \cdot c_3 = 0.$$

$$S = -\frac{P_7 \cdot c_7 + P_3 \cdot c_3}{c_{11}} \text{ (Druck).}$$

Die Auflagerdrücke in den Punkten 1, 2 und 13, die auch zu den äußeren Kräften Q zählen, fallen aus der Gleichung heraus, da die Hebelarme c_1, c_2 und $c_{13} = 0$ sind. Bei gleichen Feldweiten ist $c_3 = c_7 = c_{11}$, so daß alsdann $S = -(P_3 + P_7)$ wird.

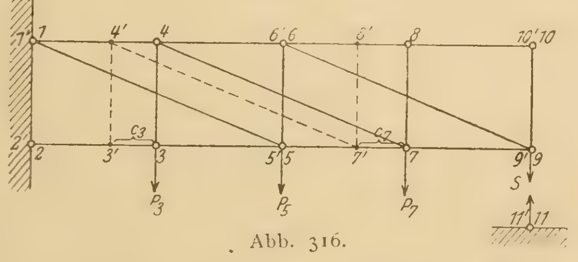


Abb. 316.

Es fällt zunächst auf, daß die Kräfte P_5 und P_9 keinen Einfluß auf die Stabkraft S haben. Man übersieht jedoch leicht, daß diese Kräfte durch den Stabzug 9—6—5—1 auf das linksseitige Widerlager übergeleitet werden, während P_3 und P_7 durch den Stabzug 3—4—7—8—11 auf das rechte Widerlager übergehen.

Eine weitere Eigentümlichkeit des Systems besteht darin, daß es bei einer geraden Anzahl von Feldern unbrauchbar wird (Abb. 316). Beim Zeichnen der Figur F' ergibt sich nämlich, daß 9′ mit 9 zusammenfällt, so daß $c_9 = 0$ wird. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet mithin:

$$S \cdot c_9 + P_7 \cdot c_7 + P_3 \cdot c_3 = 0,$$

woraus $$S = -\frac{P_7 \cdot c_7 + P_3 \cdot c_3}{c_9} = -\frac{P_7 \cdot c_7 + P_3 \cdot c_3}{0} = \infty.$$

Das System ist daher nur brauchbar, wenn es eine ungerade Anzahl von Feldern hat, da man nur dann für S einen bestimmten, endlichen Wert erhält.

Nachfolgend möge noch die Einflußlinie für den Auflagerdruck A bestimmt werden (Abb. 317). Die Pendelstütze S ist hier durch ein bewegliches Auflager ersetzt, wodurch an der Beanspruchung des Fachwerks nichts geändert wird, da der Druck in der Pendelstütze und der Auflagerdruck A nach Größe und Richtung miteinander übereinstimmen. Der Einfachheit halber seien gleiche Feldweiten λ vorausgesetzt.

Wir denken uns zunächst das Auflager bei A beseitigt und durch den Auflagerdruck A ersetzt, wodurch das System wieder einfach beweglich gemacht wird, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Wählt man dann die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes 4 derart, daß 4′ mit 1 zusammenfällt, so fällt 3′ mit 2, 7′ mit 5, 8′ mit 6, 11′ mit 9 und 12′ mit 10 zusammen, da dann die in Abb. 315 gestrichelt gezeichneten Parallelen in dem Stabzug 2—1—5—6—9—10 liegen, wodurch das Zeichnen der Parallelen erspart wird.

Abb. 317.

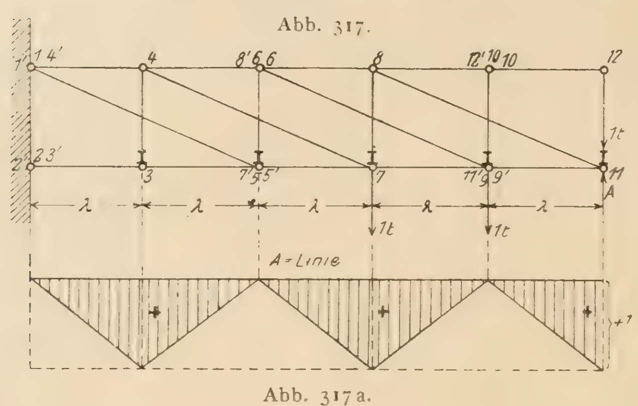


Abb. 317a.

Jetzt untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t und berechnen den Auflagerdruck A für die jeweilige Laststellung mit Hilfe des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$.

1. Die Last 1 t stehe in 11. Alsdann greifen A und 1 t in demselben Punkt 11 an, haben also in bezug auf 11′ denselben Hebelarm λ. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher:

$$A \cdot \lambda - 1\,\lambda = 0; \quad A = +1.$$

Senkrecht unter 11 ist also die Ordinate der Einflußlinie $= +1$.

2. Die Last 1 t stehe in 9. Da der Hebelarm der Last in bezug auf 9′ $= 0$ ist, so erhält man mit Hilfe der auf diesen Belastungszustand angewandten Bedingung $\Sigma Q \cdot c = 0$ die Gleichung $A \cdot \lambda = 0$. Da λ nicht $= 0$ ist, muß $A = 0$ werden. Senkrecht unter 9 liegt daher ein Nullpunkt der Einflußlinie.

3. Die Last 1 t stehe in 7. Da die in 11 angreifende Kraft A in bezug auf 11′ den Hebelarm λ, die in 7 stehende Last 1 t in bezug auf 7′ ebenfalls den Hebelarm λ hat, so lautet die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$:

$$A \cdot \lambda - 1\,\lambda = 0; \quad A = +1.$$

Senkrecht unter 7 ist daher die Ordinate der Einflußlinie $= +1$.

4. Für die in 5 stehende Last 1 t ergibt sich dann wieder $A = 0$, da der Hebelarm c_5 (in bezug auf 5′) $= 0$ ist.

5. Steht die Last 1 t in 3, so wird c_3 (in bezug auf 3′) $= \lambda$. Man erhält daher

$$A \cdot \lambda - 1\,\lambda = 0; \quad A = +1.$$

Für die in 2 stehende Last 1 t wird endlich $A = 0$, da die Last bereits auf dem Widerlager steht, das Fachwerk also unbelastet ist.

Trägt man die errechneten Auflagerdrücke unter den jeweiligen Lastangriffspunkten als Ordinaten auf und berücksichtigt, daß die Einflußlinie zwischen den Querträgern jedesmal geradlinig verlaufen muß, so entsteht die in Abb. 317a dargestellte Einflußlinie für den Auflagerdruck A.

Es sei noch einmal daran erinnert, daß das System erst dadurch starr geworden ist, daß der Punkt 11 mit dem Widerlager durch einen Stab bezw. ein bewegliches Auflager in Verbindung gebracht wurde. Das Widerlager bei A

ist daher eine Starrheitsbedingung, durch deren Beseitigung das System einfach beweglich wird im Gegensatz zu einem einfachen, aus Fachwerkdreiecken bestehenden Balken auf zwei Stützen, der bereits an und für sich eine starre Scheibe ist und auch starr bleibt, wenn man die Widerlager beseitigt und an ihrer Stelle die Auflagerdrücke des Balkens anbringt. Man kann jedoch auch einen derartigen einfachen Balken kinematisch behandeln, wie an folgendem Beispiel gezeigt werden möge (Abb. 318).

Gesucht sei die Einflußlinie für die Diagonalspannkraft D. Es seien gleiche Feldweiten vorausgesetzt, so daß die Diagonalen zueinander parallel verlaufen.

Wir beseitigen zunächst den fraglichen Stab und ersetzen ihn durch die in ihm herrschende Spannkraft D, die nunmehr zu den äußeren Kräften zählt. Dadurch ist das vorher starre System einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Die schraffierten Teile bleiben starre Scheiben, da sie aus starren Dreiecken zusammengesetzt sind. Zur Berechnung von D darf daher das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ benutzt werden. Auch die Widerlager wollen wir uns beseitigt und durch die Auflagerdrücke A und B ersetzt denken (Abb. 318 a). Da die Widerlager hier keine Starrheitsbedingungen sind — das aus lauter Dreiecken bestehende System ist ja schon an und für sich eine starre Scheibe —, so ist durch ihre Beseitigung keine neue Beweglichkeit hinzugekommen. Das System bleibt daher einfach beweglich. Jetzt machen wir das System dadurch zu einer zwangläufigen Kette, daß wir uns einen Teil derselben, z. B. die rechte starre Scheibe, festgehalten denken, erteilen dann dem übrigen (beweglichen) Teil eine willkürliche Verschiebung und zeichnen die dieser Verschiebung entsprechende Figur F'. Da die rechte Scheibe jetzt festliegt, erleiden die Punkte 1, 2, a, b, c und d keine Verschiebung. Es fallen daher 1' mit 1, 2' mit 2, a' mit a, b' mit b, c' mit c und d' mit d zusammen. Der Punkt 3 kann sich, da er lediglich durch den Stab 1—3 mit der feststehenden Scheibe gelenkig verbunden ist (Stab D ist ja beseitigt), nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 1—3 bewegen, so daß seine wirkliche Geschwindigkeit V_3 senkrecht zu 1—3 gerichtet ist. Seine lotrechte Geschwindigkeit fällt daher in die Stabrichtung 1—3 hinein. Wir wählen sie derart, daß 3' mit 1 zusammenfällt. Da auch 4' aus demselben Grunde in die Stab-

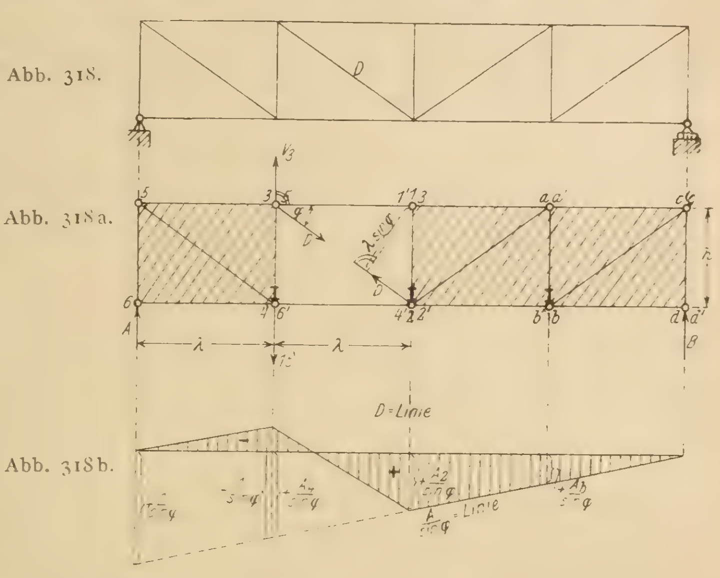


Abb. 318.
Abb. 318a.
Abb. 318b.

richtung 4—2 fallen und 3′—4′ parallel zu 3—4 sein muß, so liegt 4′ in 2. 5′ wird dann bestimmt als Schnittpunkt der zu 3—5 und 4—5 parallelen Geraden 3′—5′ und 4′—5′, da 5 durch die Stäbe 3—5 und 4—5 angeschlossen ist. 5′ fällt daher mit 3 zusammen. Endlich finden wir noch, da 6 durch die Stäbe 5—6 und 4—6 angeschlossen ist, 6′ als Schnittpunkt der zu 5—6 und 4—6 parallelen Geraden 5′—6′ und 4′—6′.

Nunmehr untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t.

1. Die Last 1 t stehe im Punkte 4. Der Auflagerdruck A infolge dieser Laststellung sei A_4. Zur Berechnung von D benutzen wir das Gesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$. Die in 6 und 4 angreifenden Kräfte A_4 und 1 t haben in bezug auf 6′ bezw. 4′ beide den Hebelarm λ, während der Hebelarm der in 3 angreifenden Kraft D in bezug auf 3′ gleich $\lambda \cdot \sin \varphi$ ist. Die Hebelarme der in 2 und d angreifenden Kräfte D und B sind $= 0$, da 2′ mit 2 und d' mit d zusammenfallen. Somit lautet die Gleichung:

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi + 1\, \lambda - A_4 \cdot \lambda = 0.$$

$$D = + \frac{A_4}{\sin \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Dieser Wert muß senkrecht unter dem Punkte 4 als Ordinate aufgetragen werden. Wir zeichnen daher zunächst die mit $\frac{1}{\sin \varphi}$ multiplizierte A-Linie und finden unter dem Punkte 4 die Ordinate $\frac{A_4}{\sin \varphi}$. Von dieser wird dann die Ordinate $\frac{1}{\sin \varphi}$ abgezogen.

2. Die Last 1 t stehe im Punkte 2. Der dieser Belastung entsprechende Auflagerdruck A sei $= A_2$. Da A_2 in 6 angreift, bleibt der Hebelarm für 6′ gleich λ; ebenso behält die in 3 angreifende Kraft D ihren Hebelarm $\lambda \cdot \sin \varphi$ in bezug auf 3′. Dagegen ist der Hebelarm der in 2 stehenden Last 1 t in bezug auf $2' = 0$, da 2′ mit 2 zusammenfällt. Die Gleichung lautet daher

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi - A_2 \cdot \lambda = 0.$$

$$D = + \frac{A_2}{\sin \varphi}.$$

Senkrecht unter der Last 1 t muß daher die Ordinate der Einflußlinie $= \frac{A_2}{\sin \varphi}$ sein, ist daher gleich der senkrecht unter 2 gemessenen Ordinate der $\frac{A}{\sin \varphi}$-Linie. Auch für alle übrigen Laststellungen auf dem festgehaltenen Teil erhalten wir die Gleichung

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi - A \cdot \lambda = 0.$$

$$D = + \frac{A}{\sin \varphi}.$$

Denn die lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der wandernden Last 1 t sind hier $= 0$, also auch die Hebelarme der wandernden Last. Unter dem festgehaltenen Teil stimmt daher die D-Linie mit der $\frac{A}{\sin \varphi}$-Linie überein.

Zu demselben Ergebnis sind wir bereits auf anderem Wege gelangt (vergl. § 7, 1, B, Abb. 129c, Seite 94).

In derselben Weise verfahre man bei der Berechnung der Einflußlinien für das in Abb. 319 dargestellte zweiteilige Netzwerk.

Zunächst sei die Einflußlinie für einen Obergurtstab O gesucht. Die Feldweiten seien gleich groß mit Ausnahme der ersten und letzten, die halb so groß sein mögen wie die übrigen. Die Diagonalen verlaufen daher parallel. Die Fahrbahn liege unten.

Das System besteht aus einer statisch bestimmt gelagerten starren Scheibe. Sämtliche Knotenpunkte sind zweistäbig an das starre Dreieck 1—2—3 angeschlossen (Abb. 319), nämlich

Knotenpunkt	4	an	1	und	2		Knotenpunkt	*a*	an	1	und	2
,,	5	,,	3	,,	4		,,	*b*	,,	1	,,	2
,,	6	,,	3	,,	4		,,	*c*	,,	*a*	,,	*b*
,,	7	,,	5	,,	6		,,	*d*	,,	*a*	,,	*b*
,,	8	,,	5	,,	6		,,	*e*	,,	*c*	,,	*d*
,,	9	,,	7	,,	8		,,	*f*	,,	*c*	,,	*d*
,,	10	,,	7	,,	8		,,	*g*	,,	*e*	,,	*f*
,,	11	,,	9	,,	10		,,	*h*	,,	*e*	,,	*f*
,,	12	,,	10	,,	11		,,	*i*	,,	*g*	,,	*h*
,,	13	,,	9	,,	11		,,	*k*	,,	*g*	,,	*i*
							,,	*l*	,,	*h*	,,	*i*.

Wir beseitigen jetzt den fraglichen Obergurtstab und bringen zum Ersatz seine Spannkraft O als äußere Kraft an (Abb. 319a). Dadurch ist das System einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Man darf daher zur Berechnung von O das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ anwenden. Der schraffierte Teil des Systems ist starr geblieben, denn rechts von dem starren Dreieck 1—2—3 sind die Knotenpunkte a bis l sämtlich zweistäbig angeschlossen. Links von dem Dreieck können nach Beseitigung des Gurtstabes aber nur noch 4 an 1 und 2 sowie 5 an 3 und 4 durch je zwei Stäbe angeschlossen werden. Der übrige Teil ist beweglich geworden. Jetzt denken wir uns wieder den starren Teil festgehalten, dem beweglichen eine willkürliche Verschiebung gegen den starren Teil erteilt und zeichnen die dieser Verschiebung entsprechende Figur F'. Die lotrechten Geschwindigkeiten der auf dem starren Teil liegenden Knotenpunkte sind $= 0$, da dieser Teil festgehalten ist. Es fallen also zusammen $1'$ mit 1, $2'$ mit 2, $3'$ mit 3, $4'$ mit 4, $5'$ mit 5, a' mit a, b' mit b usw. Der Punkt 6 kann sich gegen den festgehaltenen Teil nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 3—6 bewegen, da er lediglich mittels des Stabes 3—6 mit dem festgehaltenen Teil zusammenhängt. Die wirkliche Geschwindigkeit V_6 ist daher senkrecht zu 3—6 gerichtet, so daß die lotrechte mit der Stabrichtung 3—6 zusammenfällt. Da die Figur F' beliebig gezeichnet werden darf, lassen wir $6'$ mit 3 zusammenfallen. $7'$ ist dann bestimmt als Schnittpunkt der zu 5—7 und 6—7 parallelen Geraden $5'—7'$ und $6'—7'$, da der Punkt 7 zweistäbig an 5 und 6 durch die Stäbe 5—7 und 6—7 angeschlossen ist. $7'$ fällt daher mit 3 zusammen. Zur Bestimmung von $8'$ zeichnen wir die

zu 5—8 und 6—8 parallelen Geraden 5′—8′ und 6′—8′, weil 8 zweistäbig durch die Stäbe 5—8 und 6—8 angeschlossen ist. 8′ fällt daher mit 5 zusammen. 9′ ist dann bestimmt als Schnittpunkt der zu 7—9 und 8—9 parallelen Geraden 7′—9′ und 8′—9′, weil 9 durch die Stäbe 7—9 und 8—9 angeschlossen ist. Da 10 durch 7—10 und 8—10 angeschlossen ist, liegt 10′ im Schnittpunkt der zu 7—10 und 8—10 parallelen Geraden 7′—10′ und 8′—10′. Dann folgt 11 als Schnittpunkt der zu 9—11 und 10—11 parallelen Geraden 9′—11′ und 10′—11′, während 12′ bestimmt ist als Schnittpunkt der zu 10—12 und 11—12 gezeichneten Parallelen 10′—12′ und 11′—12′. Endlich finden wir noch 13′ als Schnittpunkt der zu 9—13 und 11—13 parallelen Geraden 9′—13′ und 11′—13′ (Abb. 319a).

Nunmehr untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t.

1. 1 t stehe in 9. Der Auflagerdruck A infolge dieser Laststellung sei $= A_9$. Da A_9 in 13 angreift, ist sein Hebelarm in bezug auf $13' = \frac{\lambda}{2} + \lambda + \lambda + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda$. Die in 9 angreifende Last 1 t hat in bezug auf 9′ den Hebelarm 2λ und die

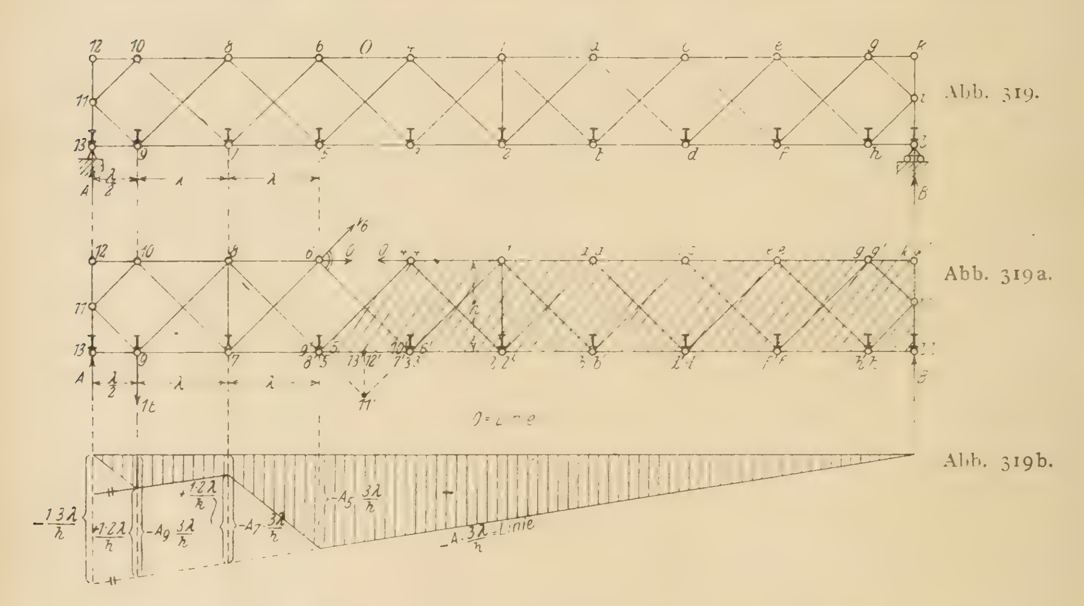


Abb. 319. Abb. 319a. Abb. 319b.

in 6 angreifende Kraft O in bezug auf 6′ den Hebelarm h. Die Hebelarme der in 4 angreifenden Kraft O und des in l angreifenden Auflagerdrucks B in bezug auf 4′ bezw. l' sind $= 0$, da 4′ mit 4 und l' mit l zusammenfällt. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$O \cdot h + A_9 \cdot 3\lambda - 1 \cdot 2\lambda = 0$$

$$O = -A_9 \cdot \frac{3\lambda}{h} + \frac{1 \cdot 2\lambda}{h}.$$

Den Wert $A_9 \cdot \frac{3\lambda}{h}$ finden wir senkrecht unter 9 aus der mit $-\frac{3\lambda}{h}$ multiplizierten A-Linie. Hierzu addieren wir dann noch den Wert $\frac{1 \cdot 2\lambda}{h}$. Die Differenz

der beiden Strecken ist dann die Ordinate der Einflußlinie senkrecht unter 9. Sie wird negativ, da $-A_9 \cdot \frac{3\lambda}{h} > +\frac{1 \cdot 2\lambda}{h}$ (Abb. 319b).

2. Die Last 1 t stehe in 7. Der Hebelarm in bezug auf 7′ ist $= 2\lambda$. A_7 und O behalten ihre Hebelarme 3λ bezw. O bei, da sie ja immer an demselben Punkte angreifen. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$O \cdot h + A_7 \cdot 3\lambda - 1 \cdot 2\lambda = 0.$$

$$O = -A_7 \cdot \frac{3\lambda}{h} + \frac{1 \cdot 2\lambda}{h}.$$

Der Wert $-A_7 \cdot \frac{3\lambda}{h}$ ist senkrecht unter 7 aus der $-A \cdot \frac{3\lambda}{h}$-Linie abzugreifen. Dazu ist dann noch die Strecke $+\frac{1 \cdot 2\lambda}{h}$ zu addieren. Die Differenz der beiden Strecken ist dann die Einflußordinate senkrecht unter 7. Sie ergibt sich negativ, da $-A_7 \cdot \frac{3\lambda}{h} > +\frac{1 \cdot 2\lambda}{h}$.

3. Die Last 1 t stehe in 5. Alsdann ist ihr Hebelarm in bezug auf $5' = 0$, da 5′ mit 5 zusammenfällt. Die Anwendung des Grundgesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ liefert daher die Gleichung

$$O \cdot h + A_5 \cdot 3\lambda = 0; \quad O = -A_5 \cdot \frac{3\lambda}{h}.$$

Senkrecht unter 5 ist mithin die Einflußordinate $= -A_5 \cdot \frac{3\lambda}{h}$. Sie wird der $-A \cdot \frac{3\lambda}{h}$-Linie entnommen.

Auch für alle übrigen Laststellungen auf dem festgehaltenen Teil gilt die Gleichung

$$O \cdot h + A \cdot 3\lambda = 0, \quad \text{so daß } O = -A \cdot \frac{3\lambda}{h},$$

denn die lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der wandernden Last 1 t sind hier $= 0$, also auch die Hebelarme der wandernden Last.

Unter dem festgehaltenen Teil stimmt daher die O-Linie mit der mit -1 multiplizierten $A \cdot \frac{3\lambda}{h}$-Linie überein (Abb. 319b).

Die *D*-Linie (Abb. 320).

Zunächst beseitigen wir die Diagonale D und bringen zum Ersatz ihre Spannkraft als äußere Kraft an. Dadurch ist das System einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Zur Berechnung von D kann daher die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ angewandt werden. Der schraffierte Teil des Systems ist starr geblieben, da rechts von dem starren Dreieck 1—2—3 sämtliche Knotenpunkte zweistäbig angeschlossen sind. Links von dem Dreieck können noch Punkt 4 durch die Stäbe 1—4 und 2—4 und 5 durch die Stäbe 3—5 und 4—5 angeschlossen werden. Der übrige Teil ist beweglich geworden.

Wir denken uns jetzt den starren Teil festgehalten, dem beweglichen eine willkürliche Verschiebung gegen den festgehaltenen erteilt und zeichnen die dieser Verschiebung entsprechende Figur F'. Da der Punkt 6 lediglich

durch den Stab 4—6 mit dem festgehaltenen Teil verbunden ist, kann er sich nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 4—6 bewegen. Seine wirkliche Geschwindigkeit hat also die Richtung $V_6 \perp 4—6$, die lotrechte Geschwindigkeit fällt daher in die Stabrichtung 4—6 hinein. Wir wählen sie derart, daß 6′ mit 4 zusammenfällt. Da 7 durch die Stäbe 5—7 und 6—7 angeschlossen ist, finden wir 7′ als Schnittpunkt der zu 5—7 und 6—7 parallelen Geraden 5′—7′ und 6′—7′. 7′ fällt daher mit 5 zusammen. 8′ fällt in den Schnittpunkt der zu 5—8 und 6—8 gezeichneten Parallelen 5′—8′ und 6′—8′, da 8 durch die Stäbe 5—8 und 6—8 angeschlossen ist. Entsprechend bestimme man noch die Punkte 9′, 10′, 11′, 12′ und 13′ (Abb. 320). Die Punkte 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, a', b'

Abb. 320.

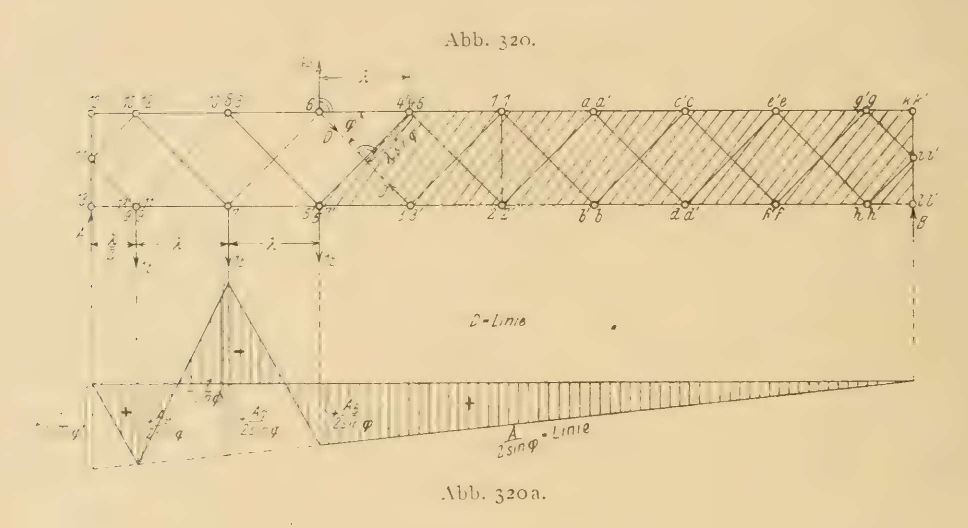


Abb. 320a.

bis l' fallen mit den entsprechenden Punkten 1, 2, 3 ... bis l zusammen, da sie dem festgehaltenen Teil angehören, also keine Verschiebung erleiden.

Nunmehr untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t.

1. 1 t stehe in 9. Da 9′ mit 9 zusammenfällt, ist der Hebelarm der Last in bezug auf 9′ = 0. Die in 6 angreifende Kraft D hat in bezug auf 6′ den Hebelarm $\lambda \cdot \sin \varphi$, der in 13 angreifende Auflagerdruck A für 13′ den Hebelarm $\frac{\lambda}{2}$. Die Hebelarme der in 3 und l angreifenden Kräfte D und B sind = 0, weil 3′ mit 3 und l' mit l zusammenfällt. Demgemäß erhalten wir mit Hilfe des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ die Gleichung

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi \quad A_9 \cdot \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$D = + \frac{A_9}{2 \sin \varphi}.$$

Senkrecht unter 9 ist die Einflußordinate $= + \frac{A_9}{2 \sin \varphi}$, die der mit $\frac{1}{2 \sin \varphi}$ multiplizierten A-Linie entnommen wird.

2. 1 t stehe in 7. Ihr Hebelarm in bezug auf 7′ ist $= \lambda$. D und A_7 behalten ihre Hebelarme, da sie nach wie vor in denselben Punkten 13 bezw. 6 angreifen. Das Gesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ liefert daher die Gleichung

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi + 1 \lambda - A_7 \cdot \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$D = + \frac{A_7}{2 \sin \varphi} - \frac{1}{\sin \varphi}.$$

Von der aus der $\frac{A}{2 \sin \varphi}$-Linie senkrecht unter 7 abzugreifenden Ordinate $\frac{A_7}{2 \sin \varphi}$ muß daher die Ordinate $\frac{1}{\sin \varphi}$ abgezogen werden. Die Differenz ist dann die Einflußordinate für D senkrecht unter 7. Sie ergibt sich hier negativ, weil die abzuziehende Strecke $\frac{1}{\sin \varphi} > \frac{A_7}{2 \sin \varphi}$.

3. Die Last 1 t stehe in 5. Ihr Hebelarm in bezug auf 5' ist $= 0$. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi - A_5 \cdot \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$D = + \frac{A_5}{2 \sin \varphi}.$$

Senkrecht unter 5 ist daher die aus der $\frac{A}{2 \sin \varphi}$-Linie abzugreifende Ordinate $\frac{A_5}{2 \sin \varphi}$ die Einflußordinate für D.

Auch für alle übrigen Laststellungen auf dem festgehaltenen Teil lautet die Gleichung

$$D \cdot \lambda \cdot \sin \varphi - A \cdot \frac{\lambda}{2} = 0, \text{ so daß } D = + \frac{A}{2 \sin \varphi}.$$

Unter diesem Teil stimmt daher die D-Linie mit der $\frac{A}{2 \sin \varphi}$-Linie überein (Abb. 320a).

Die *V*-Linie.

Zur Ermittlung der V-Linie beseitigen wir die Vertikale V (Abb. 321) und bringen zum Ersatz ihre Spannkraft als äußere Kraft an. Damit ist das System einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Es gilt daher das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$. Nur die schraffierten Teile sind starr geblieben, alles übrige ist beweglich geworden, wie leicht zu erkennen ist, da kein Knotenpunkt zweistäbig an eine starre Scheibe angeschlossen werden kann. Wir machen das bewegliche System jetzt dadurch zu einer zwangläufigen Kette, daß wir uns ein Glied, z. B. die starre Scheibe 1—2—3 festgehalten denken. Dem übrigen (beweglichen) Teil erteilen wir sodann eine willkürliche Verschiebung und zeichnen die dieser Verschiebung entsprechende Figur F'. Da der Punkt 5 sich gegen die festgehaltene Scheibe 1—2—3 nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius 2—5 bewegen kann, seine wirkliche Geschwindigkeit V_5 daher $\perp$ 2—5 gerichtet ist, so muß seine lotrechte Geschwindigkeit in die Stabrichtung 2—5 fallen. Wir wählen sie, da die Figur F' eine beliebige sein darf, derart, daß 5' mit 2 zusammenfällt. Damit sind die lotrechten Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte bestimmt. 1', 2' und 3' müssen mit 1, 2 und 3 zusammenfallen, da die Scheibe 1—2—3 festgehalten

ist, also keine Geschwindigkeit erfährt. 6' liegt, da der Punkt 6 durch die Stäbe 3—6 und 5—6 an 3 und 5 angeschlossen ist, im Schnittpunkt der zu 3—6 und 5—6 parallelen Geraden 3'—6' und 5'—6', fällt also mit 3 zusammen. 7' liegt im Schnittpunkt der zu 5—7 und 3—7 parallelen Geraden 3'—7' und 5'—7', weil 7 zweistäbig durch die Stäbe 3—7 und 5—7 angeschlossen ist. 8' ist bestimmt durch die zu 6—8 und 7—8 parallelen Geraden 6'—8' und 7'—8', da 8 zweistäbig durch 6—8 und 7—8 angeschlossen ist usw. So bestimme man noch der Reihe nach die lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte 9, 10 usw. bis 24.

Alsdann untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t.

1. 1 t stehe in 20. Ihr Hebelarm in bezug auf 20' ist $= 4\lambda = \frac{8}{2}\lambda$. Der in Punkt 24 angreifende Auflagerdruck A_{20} hat in bezug auf 24' den Hebel-

Abb. 321.

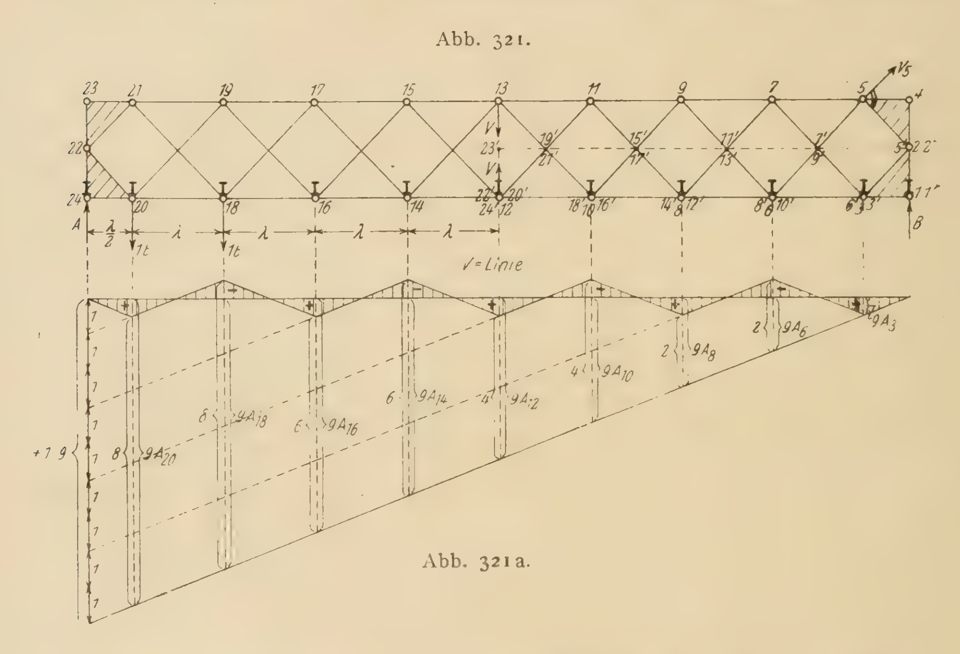


Abb. 321a.

arm $4{,}5\lambda = \frac{9}{2}\lambda$. Der Hebelarm der in 13 angreifenden Kraft V in bezug auf 13' ist $2{,}5\lambda = \frac{5}{2}\lambda$, während die in 12 angreifende Kraft V in bezug auf 12' den Hebelarm $2\lambda = \frac{4}{2}\lambda$ hat. Der Hebelarm der in 1 angreifenden Kraft B in bezug auf 1' ist $= 0$, weil 1 mit 1 zusammenfällt. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$V \cdot \frac{5}{2}\lambda - V \cdot \frac{4}{2}\lambda + 1 \cdot \frac{8}{2}\lambda - A_{20} \cdot \frac{9}{2}\lambda = 0.$$

$$V = +9 \cdot A_{20} - 8.$$

Die Ordinate $9 \cdot A_{20}$ finden wir senkrecht unter 20 aus der mit 9 multiplizierten A-Linie. Diese ist eine Gerade, die von der Senkrechten durch das Auflager A die Strecke $+1 \cdot 9$, also 9 Einheiten abschneidet. Von der Ordinate

$9\,A_{20}$ müssen dann noch acht Einheiten abgezogen werden. Die Differenz ist dann die Einflußordinate für V senkrecht unter 20. Sie ergibt sich hier positiv.

2. 1 t stehe in 18. Ihr Hebelarm in bezug auf 18' ist $= 4\,\lambda = \frac{8}{2}\,\lambda$

Die Hebelarme der übrigen Kräfte bleiben dieselben wie vor, da sie ja immer an denselben Punkten wirken. Das Gesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$V \cdot \frac{5}{2}\,\lambda + V \cdot \frac{4}{2}\,\lambda + 1 \cdot \frac{8}{2}\,\lambda - A_{18} \cdot \frac{9}{2}\,\lambda = 0$$

$$V = +\,9 \cdot A_{18} - 8.$$

Von der aus der $9 \cdot A$-Linie senkrecht unter 18 gefundenen Ordinate $9\,A_{18}$ müssen also acht Einheiten abgezogen werden. Die Differenz wird hier negativ.

3. Die Last 1 t stehe in 16. Sie hat daher in bezug auf 16' den Hebelarm $3\,\lambda = \frac{6}{2}\,\lambda$, so daß die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet:

$$V \cdot \frac{5}{2}\,\lambda - V \cdot \frac{4}{2}\,\lambda + 1 \cdot \frac{6}{2}\,\lambda - A_{16} \cdot \frac{9}{2}\,\lambda = 0$$

$$V = +\,9 \cdot A_{16} - 6.$$

Von der Ordinate A_{16} sind daher sechs Einheiten abzuziehen. Die Differenz wird positiv. Auf diese Weise ermittle man noch die Einflußordinaten für die übrigen Laststellungen (Last 1 t in 14, 12, 10, 8, 6, 3). Verbindet man die Endpunkte der Einflußordinaten zwischen den Querträgern geradlinig, so entsteht die in Abb. 321 a dargestellte Einflußlinie.

Verlaufen die Gurtstäbe und Diagonalen nicht parallel, so fallen die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten nicht mehr mit den Knotenpunkten zusammen. Es empfiehlt sich dann, der besseren Übersichtlichkeit halber, die Figur F' außerhalb des Stabnetzes besonders herauszuzeichnen. Gesucht sei z. B. die U-Linie (Abb. 322).

Zunächst beseitigen wir wieder den fraglichen Untergurtstab und bringen zum Ersatz seine Spannkraft als äußere Kraft an, wodurch das System einfach beweglich geworden ist, da eine Starrheitsbedingung beseitigt wurde. Somit gilt das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = 0$. Der schraffierte Teil des Systems ist starr geblieben, da rechts von dem starren Dreieck 1—2—3 sämtliche Knotenpunkte zweistäbig angeschlossen sind. Links von dem Dreieck sind noch 4 an 1 und 2 durch 1—4 und 2—4 und 5 an 3 und 4 durch 3—5 und 4—5 angeschlossen. Der übrige Teil ist beweglich geworden. Dem beweglichen Teil erteilen wir jetzt eine willkürliche Bewegung gegen den festgehaltenen starren Teil und zeichnen die dieser Bewegung entsprechende Figur F'. Dem Punkte 6 erteilen wir die beliebige lotrechte Geschwindigkeit 6—6' (Abb. 322a). Da 6 sich auf einem Kreisbogen mit dem Radius 6—4 gegen den starren Teil bewegt, ist seine wirkliche Geschwindigkeit $V_6 \perp 6-4$ gerichtet. Seine lotrechte Geschwindigkeit fällt daher in die Stabrichtung 6—4 hinein. 6—6' ist daher parallel zu 6—4 aufzutragen. Da 8 durch die Stäbe 6—8 und 5—8 an 6 und 5 angeschlossen ist, finden wir 8' als Schnittpunkt der zu 6—8 und 5—8 parallelen Geraden 6'—8' und 5'—8' (5' ist in Abb. 322a im Abstande h_5 senkrecht über 6 aufgetragen, da der Punkt auch in dem Stabnetz diesen Abstand hat). 7' ist dann der

Schnittpunkt der zu 5—7 und 6—7 parallelen Geraden 5′—7′ und 6′—7′, da 7 zweistäbig durch 5—7 und 6—7 angeschlossen ist. Zur Bestimmung von 9′ müssen 7′—9′ ‖ 7—9 und 8′—9′ ‖ 8—9 gezeichnet und zum Schnitt gebracht werden, weil 9 durch die Stäbe 7—9 und 8—9 angeschlossen ist. 11′ ist endlich bestimmt als Schnittpunkt der zu 8—11 und 9—11 parallelen Geraden 8′—11′ und 9′—11′, weil 11 durch 8—11 und 9—11 angeschlossen ist. 10′ brauchen wir nicht, da in 10 keine Kraft angreift. Auf diese Weise ist der in Abb. 322 a dargestellte Geschwindigkeitsplan entstanden.

Nunmehr untersuchen wir den Einfluß der wandernden Last 1 t.

1. Die Last 1 t stehe in 8. Ihr Hebelarm in bezug auf 8′ ist $= c_8$. Der in 11 angreifende Auflagerdruck A_8 hat den Hebelarm c_{11} in bezug auf 11′, während der Hebelarm der in 6 angreifenden Kraft U für den Punkt $6' = u_6$ ist. Die Hebelarme der in 3 und i angreifenden Kräfte U und B sind $= 0$, weil 3

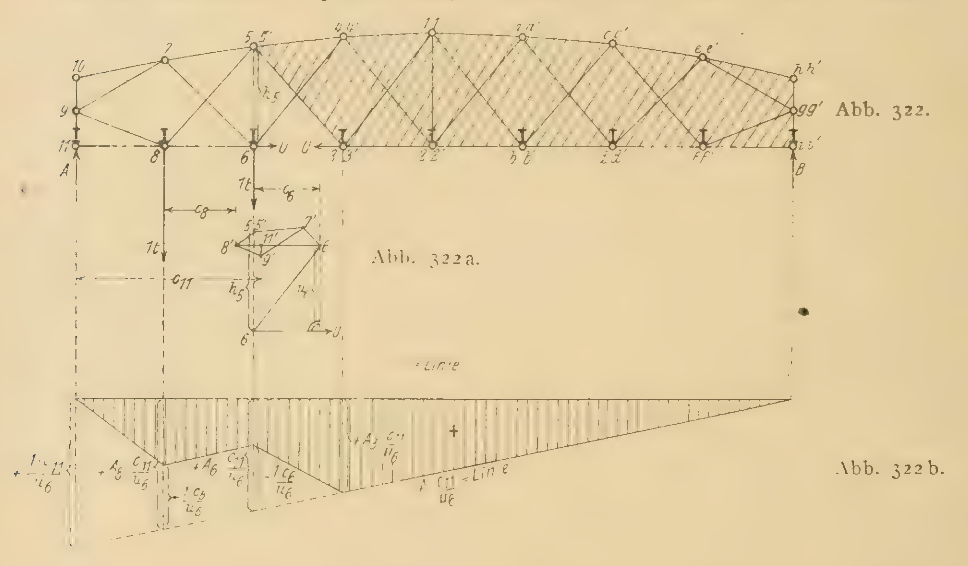


Abb. 322.

Abb. 322a.

Abb. 322b.

und i' mit 3 und i zusammenfallen. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher für diese Laststellung

$$U \cdot u_6 + 1\, c_8 - A_8 \cdot c_{11} = 0$$

$$U = + A_8 \cdot \frac{c_{11}}{u_6} - \frac{1\, c_8}{u_6}.$$

Die Einflußordinate unter 8 ist daher die Differenz der Ordinaten $A_8 \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$ und $\frac{1\, c_8}{u_6}$. $A_8 \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$ wird aus der mit $\frac{c_{11}}{u_6}$ multiplizierten A-Linie entnommen.

2. Die Last 1 t stehe in 6. Ihr Hebelarm in bezug auf 6′ ist $= c_6$. A_6 und U haben dieselben Hebelarme wie unter 1, da sie an denselben Punkten angreifen. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$U \cdot u_6 + 1\, c_6 - A_6 \cdot c_{11} = 0$$

$$U = + A_6 \cdot \frac{c_{11}}{u_6} - \frac{1\, c_6}{u_6}.$$

Von der aus der $A \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$-Linie zu entnehmenden Ordinate $A_6 \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$ ist die Ordinate $\frac{1 \cdot c_6}{u_6}$ abzuziehen. Die Differenz ist sodann die Einflußordinate senkrecht unter 6.

3. Die Last 1 t stehe in 3. Ihr Hebelarm in bezug auf 3' ist dann $= 0$, weil 3' mit 3 zusammenfällt. Die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ lautet daher

$$U \cdot u_6 - A_3 \cdot c_{11} = 0$$

$$U = + A_3 \frac{c_{11}}{u_6} \cdot$$

Dieser Wert wird senkrecht unter 3 aus der $A \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$-Linie entnommen Auch für alle übrigen Laststellungen auf dem festgehaltenen Teil lautet die Gleichung

$$U \cdot u_6 - A \cdot c_{11} = 0$$

$$U = + A \cdot \frac{c_{11}}{u_6} \cdot$$

Denn die lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte der wandernden Last sind sämtlich $= 0$.

Für den festgehaltenen Teil ist daher die $A \cdot \frac{c_{11}}{u_6}$-Linie die Einflußlinie. Verbindet man noch die Endpunkte der errechneten Einflußordinaten zwischen den Querträgern geradlinig miteinander, so entsteht die in Abb. 322b dargestellte Einflußlinie für U.

Zur Übung wird dem Leser empfohlen, auch eine D-Linie und die V-Linie für die Mittelvertikale nach diesem Verfahren zu ermitteln.

5. Berechnung von Einflußlinien mit Hilfe der Momentanpole. (Polkonfiguration.)

A. Allgemeines.

In Abb. 323 ist ein Gelenkviereck $a—b—c—d$, also ein einfach bewegliches System dargestellt, dessen starre Scheiben I und II mit dem starren Widerlager (w) gelenkig verbunden sind. Erteilt man diesem System irgend eine Bewegung, so drehen sich die Scheiben I und II gegen das Widerlager um die Gelenkpunkte a und b. Wir wollen diese Drehpole kurz mit I w und II w (sprich: I gegen w und II gegen w) bezeichnen. Die Scheibe III dreht sich gegen die Scheibe I um den Gelenkpunkt c, den wir mit I III (I gegen III) und gegen die Scheibe II um den Gelenkpunkt d, den wir mit II III (II gegen III) bezeichnen wollen. Gesucht sei nun der momentane Drehpol der Scheibe III gegen das Widerlager w (III w). Da der Punkt c der Scheibe III angehört und sich nur auf einem Kreisbogen mit dem Radius $a—c$ gegen das Widerlager verschieben kann, hat seine wirkliche Geschwindigkeit die Richtung $V_c \perp a—c$ (unendlich kleine Zeitdauer der Bewegung vorausgesetzt). Seine lotrechte Geschwindigkeit fällt daher in die Richtung $a—c$. Das ist aber gleichzeitig auch die Richtung des Polstrahles des Punktes c, denn wie auf Seite 215

gezeigt wurde, fallen die Richtungen der lotrechten Geschwindigkeiten mit den Richtungen der Polstrahlen zusammen. Damit kennen wir also den Polstrahl eines Punktes der Scheibe III, der durch das Momentanzentrum der Scheibe gehen muß.

Aus demselben Grunde fällt der Polstrahl des der Scheibe III angehörenden Punktes d in die Richtung $b—d$. Auch dieser Polstrahl muß durch das Momentanzentrum der Scheibe gehen. Der Schnittpunkt beider Polstrahlen ist daher das Momentanzentrum der Scheibe III, d. h., da es sich um eine Drehung der Scheibe III gegen das Widerlager handelt, der momentane Drehpol der Scheibe III gegen das Widerlager, also III w.

Man erkennt daher, daß I w, I III und III w auf einer Geraden liegen müssen. Ebenso müssen II w, II III und III w auf einer Geraden liegen.

Man merke sich dazu folgende Gedächtnisregel:

Sind zwei Pole, z. B. I w und I III gegeben, so denken wir uns die gleichen Benennungen, also hier die Benennung I, beseitigt und bilden einen neuen Pol aus den übrig bleibenden Benennungen, also hier aus III und w. Dieser Pol muß dann mit den beiden anderen auf einer Geraden liegen.

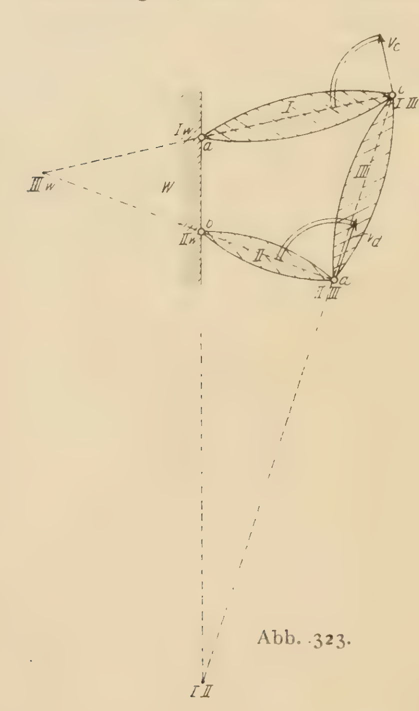


Abb. 323.

Auf diese Weise kann man schnell, wenn einige Pole gegeben sind, auf die übrigen Pole schließen.

So muß z. B. in Abb. 323 der Pol I II einerseits auf der durch I w und II w gelegten, anderseits auf der durch I III und II III gelegten Geraden liegen. Der Schnittpunkt beider Geraden ist dann I II.

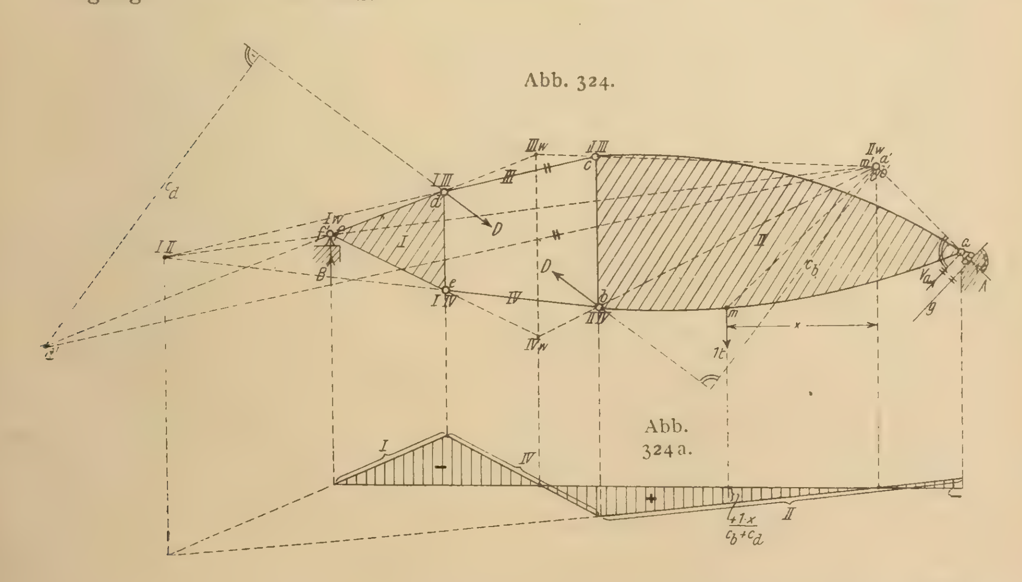
Zwei Scheiben, die durch zwei Stäbe gelenkig miteinander verbunden sind, drehen sich daher in jedem Augenblick um den Schnittpunkt der Achsen beider Stäbe. Sie hängen also gewissermaßen in diesem Punkt gelenkig miteinander zusammen, weshalb man für ihn die Bezeichnung ideelles oder imaginäres Gelenk eingeführt hat. Nach Föppl, der zuerst auf die Bedeutung dieses Gelenkes aufmerksam machte, nennt man es auch ein Föpplsches Gelenk. So sind z. B. die Pole III w und I II die imaginären Gelenke der Scheiben III und w bezw. I und II.

Nachstehend soll nun gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Momentanpole und des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$ in einfacher Weise Einflußlinien für statische Größen eines statisch bestimmten, starren Systems herleiten kann. Gesucht sei z. B. die Einflußlinie für die Diagonale D eines einfachen Fachwerkbalkens (Abb. 324).

Wir stellen die Last 1 t an einer beliebigen Stelle des Balkens, z. B. im Punkte m der Scheibe II auf und berechnen die Spannkraft D infolge dieser

Laststellung. Zu diesem Zweck beseitigen wir zunächst die Diagonale und ersetzen sie durch ihre Spannkraft D. Dadurch zerfällt das System in die starren Scheiben w, I, II, III und IV und wird einfach beweglich, so daß das Grundgesetz $\Sigma Q \cdot c = o$ Geltung hat. Die Hebelarme c der Kräfte Q können dabei einer **beliebigen** Figur F' entnommen werden. Die Zeichnung der Figur F' wird dann besonders einfach, wenn man die augenblicklichen Drehpole der starren Scheiben kennt, da die lotrechten Geschwindigkeiten von Punkten einer starren Scheibe in den zugehörigen Polstrahlen liegen müssen (vergl. 1, Seite 215).

Wir erteilen daher dem durch Beseitigung der Diagonale D beweglich gemachten System eine willkürliche Bewegung gegen das feststehende starre Widerlager und ermitteln zunächst die augenblicklichen Drehpole der Scheiben I bis IV. Dabei dreht sich die Scheibe I gegen das Widerlager um das feste Auflagergelenk (f), so daß dieses der Pol I w ist. Der Pol I II ist das imaginäre Gelenk der Scheiben I und II, welches bestimmt ist als der Schnittpunkt der beiden mit den Scheiben I und II gelenkig zusammenhängenden Stäbe III und IV Der Pol II w muß auf der Senkrechten zur Gleitbahn g des beweglichen Auflagers liegen. Denn der zur Scheibe II gehörende Auflagergelenkpunkt a kann sich nur parallel zur Gleitbahn g verschieben, so daß die wirkliche Geschwindigkeit v_a parallel zu g, die lotrechte und damit auch der Polstrahl des Punktes a senkrecht dazu gerichtet sein muß. Dieser geht aber durch den augenblicklichen Drehpol der Scheibe, zu der der Punkt a gehört, d. h. durch den Pol II w. Anderseits muß II w nach der auf Seite 238 angegebenen Regel auf der Verbindungslinie I II und I w liegen. Durch diese beiden Bedingungen ist II w bestimmt.



Die Pole I IV und II IV liegen in den Gelenkpunkten, um welche die Scheiben I und II sich gegen die Scheibe IV drehen. Eine entsprechende Lage haben die Pole I III und II III. Ferner muß IV w einerseits auf der Ver-

bindungslinie von I w und I IV, anderseits auf der Verbindungslinie von II w und II IV liegen, also im Schnittpunkt der beiden Verbindungslinien. Desgleichen liegt III w im Schnittpunkt der Verbindungslinien von I w und I III und von II w und II III.

III w und IV w müssen endlich noch mit III IV auf einer Geraden liegen. III IV ist aber das imaginäre Gelenk der Scheiben III und IV und dieses liegt im Schnittpunkt der Verbindungslinien der Gelenkpunkte der mit III und IV zusammenhängenden Scheiben. Diese Verbindungslinien schneiden sich, da sie parallel verlaufen, erst im Unendlichen, so daß III w senkrecht über IV w liegen muß.

Nunmehr ist die Figur F' leicht zu bestimmen. Wir erteilen dem Angriffspunkte m der Last 1 t die lotrechte Geschwindigkeit $m - m'$, die auf dem Polstrahl des Punktes m liegen muß. Da m der Scheibe II angehört, diese sich aber um II w dreht, so ist der Polstrahl des Punktes m der Strahl $\overline{m - \text{II}\, w}$. Man erhält nun die einfachste Figur F', wenn man die lotrechte Geschwindigkeit so wählt, daß ihr Endpunkt in den Drehpol der betreffenden starren Scheibe fällt, weil dann auch die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte der starren Scheibe in demselben Drehpol liegen. Wir wählen daher $m - m'$ derart, daß m' mit II w zusammenfällt. Dann fallen auch a', b' und c' mit II w zusammen (vergl. 1, Seite 217, Abb. 304). d' muß einerseits auf dem Polstrahl des Punktes d liegen, d. h. auf dem Strahl $\overline{d - \text{I}\, w}$ (weil der Punkt d der Scheibe I angehört), anderseits auf der durch c' zu $c - d$ gezogenen Parallelen. Damit ist auch d' bestimmt. f' fällt mit f zusammen, da dieser Punkt zum festen Auflager gehört, also keine Verschiebung erleidet

Nunmehr setzen wir die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$ an. Zu den äußeren Kräften Q gehören die Kräfte A, B, D und 1 t. Die Hebelarme von A und B sind $= 0$, da die in a angreifende Kraft A durch a' und die in f angreifende Kraft B durch f' geht. Die in m wirkende Kraft 1 t habe in bezug auf m, den Hebelarm x; c_b und c_d seien die Hebelarme der in b bezw. d angreifenden Kraft D in bezug auf b' bezw. d'. Alsdann lautet die Gleichung

$$D \cdot c_b + D \cdot c_d - 1\, x = 0$$

$$D = \frac{1\, x}{c_b + c_d}.$$

Hierin ist nur x mit der wandernden Last 1 t veränderlich, c_b und c_d sind unabhängig von x, ändern sich also nicht, wenn x sich ändert. Wir können daher setzen:

$$\mathbf{D = Const.\, x.}$$

Das ist aber die Gleichung einer Geraden, und zwar wird für $x = 0$, d. h. wenn die Last 1 t gerade durch II w geht, $D = 0$. Senkrecht unter II w liegt daher der Nullpunkt der zur Scheibe II gehörenden Einflußgeraden (Abb. 324 a).

Untersucht man sinngemäß noch den Einfluß von Laststellungen auf der Scheibe IV bezw. I (die Last 1 t wandert bei unten liegender Fahrbahn, wie hier angenommen wurde, über die Scheiben II, IV und I), so findet man, daß auch den Scheiben IV und I Gerade als Einflußlinien entsprechen müssen mit den Nullpunkten unter IV w bezw. I w. Die Einflußgeraden I und IV bezw. II

und IV schneiden sich senkrecht unter den Gelenken der Scheiben I und IV bezw. II und IV, d. h. senkrecht unter I IV bezw. II IV. Da I II auch als Gelenk der Scheiben I und II aufgefaßt werden darf (imaginäres Gelenk), so müssen sich auch die Einflußgeraden I und II senkrecht unter I II schneiden.

Aus diesen Untersuchungen folgt der wichtige Satz: Zu jeder starren Scheibe eines statisch bestimmt gelagerten Systems gehört eine Gerade als Einflußlinie, deren Nullpunkt unter dem der Scheibe entsprechenden augenblicklichen Drehpol gegen das starre Widerlager liegt.

Mit Hilfe dieses Satzes ist zunächst nur die Form der in Abb. 324a dargestellten D-Linie bestimmt. Mit Hilfe einer Ordinate liegen dann die genauen Richtungen sämtlicher Einflußgeraden fest.

B. Beispiele.

1. Gesucht sei die H-Linie eines vollwandigen Dreigelenkbogens (Abb. 325).

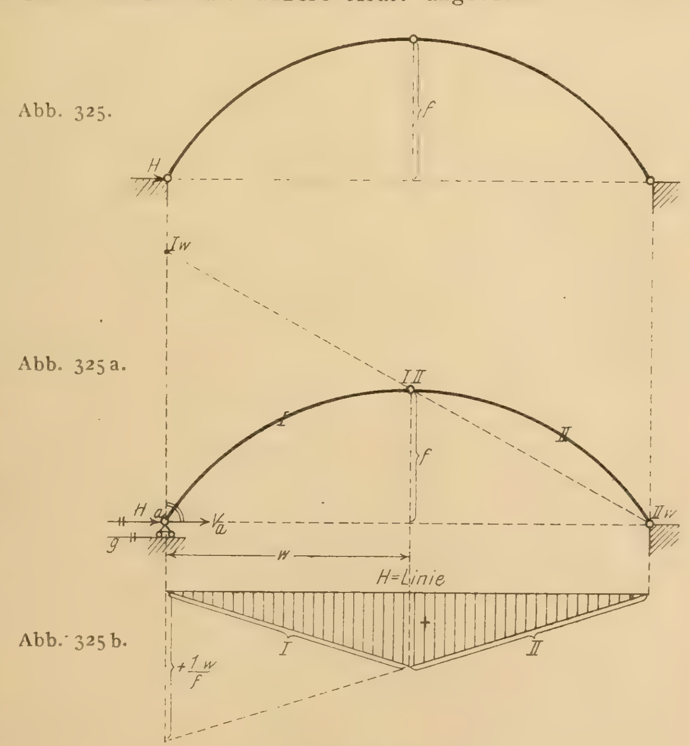


Abb. 325.

Abb. 325 a.

Abb. 325 b.

Wir denken uns das Widerlager dort, wo H angreift, in der Richtung von H beseitigt und zum Ersatz H als äußere Kraft angebracht. Dadurch wird das linke Auflager in wagerechter Richtung beweglich, kann also durch ein Rollenlager ersetzt werden (Abb. 325a). Da somit eine Starrheitsbedingung beseitigt ist, so ist das System einfach beweglich geworden und zerfällt in die starren Scheiben w, I und II. Die Scheibe II dreht sich bei irgend einer Bewegung gegen das Widerlager um das rechte Kämpfergelenk, also um den Pol II w. Die Scheibe I dreht sich gegen die Scheibe II um das Scheitelgelenk, also um den Pol I II. Auf der Verbindungslinie von II w und I II muß I w liegen. I w muß aber auch auf der Senkrechten zur Gleitbahn g des beweglichen Auflagers liegen, da die wirkliche Geschwindigkeit des der Scheibe I angehörenden Punktes a (v_a) parallel zu g, die lotrechte Geschwindigkeit daher

senkrecht zu g gerichtet sein muß. In die Richtung der lotrechten Geschwindigkeit fällt aber der Polstrahl des Punktes a, also der Polstrahl eines Punktes der Scheibe I, und dieser muß durch den Momentanpol der Scheibe I gegen das Widerlager, d. h. durch I w gehen. Damit ist I w bestimmt. Die H-Linie besteht somit aus den Einflußgeraden I und II, deren Nullpunkte senkrecht unter I w und II w liegen (Abb. 325b).

Zur Bestimmung der Richtung der Geraden benutzen wir die bereits früher ermittelte Ordinate $\frac{1\,w}{f}$ unter dem linken Widerlager (vergl. Abb. 249b, Seite 177).

2. Die M_m-Linie (Abb. 326).

Wir denken uns den Bogen in m durchschnitten und zum Ersatz an der Schnittstelle das dort wirkende Moment M_m angebracht. Durch den Schnitt zerfällt das System in die starren Scheiben I, II und III und ist einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Die Scheiben I und II können sich dann im Punkte m gegeneinander drehen. Wir können uns daher in m ein Gelenk angebracht denken (Abb. 326a). Das Gelenk ist sodann der Pol I II. Die Scheiben II und III drehen sich im Scheitelgelenk gegeneinander, das somit der Pol II III wird. Die Scheibe I dreht sich gegen das Widerlager um das linke Kämpfergelenk (I w) und Scheibe III um das rechte Kämpfergelenk (III w). Der Pol II w ist dann der Schnittpunkt der durch I w und I II und durch III w und II III gelegten Geraden.

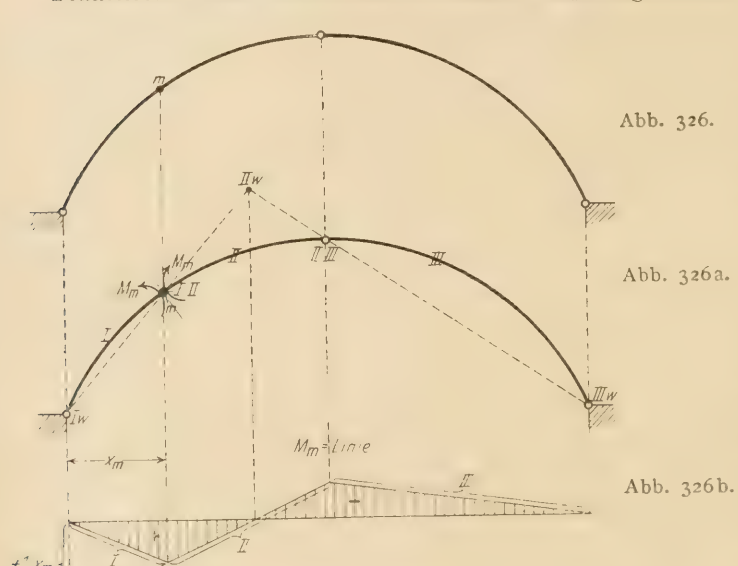


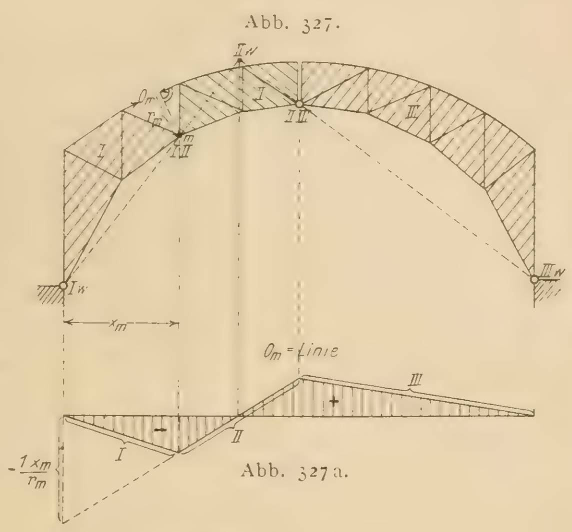
Abb. 326.
Abb. 326a.
Abb. 326b.

Nunmehr ist zunächst die Form der Einflußlinie bestimmt (Abb. 326b). Wir zeichnen die Gerade I mit dem Nullpunkt unter I w, darauf die Gerade II mit dem Nullpunkt unter II w und endlich die Gerade III mit dem Nullpunkt unter III w. Die genaue Richtung der Geraden ist sodann durch eine Ordinate bestimmt, z. B. durch die Ordinate $+1\,x_m$ unter dem linken Widerlager, die bereits früher gefunden wurde (vergl. Abb. 250b, Seite 178). Der Pol II w ist identisch mit dem dort gefundenen Punkt E.

3. Die O_m-Linie (Abb. 327).

Wir denken uns den Obergurtstab O_m beseitigt und durch seine Spannkraft ersetzt, wodurch das System einfach beweglich geworden ist, weil eine

Starrheitsbedingung fehlt. Das System zerfällt sodann in die starren Scheiben I II, III und w. Da die Last 1 t über die Scheiben I, II und III wandert, so muß die Einflußlinie aus drei Geraden bestehen, deren Nullpunkte unter I w, II w und III w liegen. I w und III w fallen mit dem linken bezw. rechten Kämpfergelenk zusammen, weil die Scheiben I und III sich gegen das Widerlager um diese Gelenke drehen. Die Scheibe I dreht sich gegen die Scheibe II um m (I II), während sich die Scheibe II gegen III um das Scheitelgelenk dreht (II III). II w liegt dann im Schnittpunkt der durch III w und II III und durch I w und I II gelegten Geraden.



Damit ist die Form der Einflußlinie bestimmt. Durch Auftragen einer Ordinate, z. B. der bereits früher ermittelten Ordinate $-\frac{1\, x_m}{r_m}$ unter dem linken Auflager (vergl. Abb. 255a, Seite 181) werden sodann die Richtungen der Einflußgeraden festgelegt (Abb. 327a).

4. Die D-Linie (Abb. 328).

Zunächst wird wieder die Diagonale D beseitigt und zum Ersatz ihre Spannkraft angebracht, wodurch infolge Beseitigung einer Starrheitsbedingung das System einfach beweglich geworden ist. Das System zerfällt in die Scheiben I, II, III, IV, V und w. Die Fahrbahn liege oben, so daß die Last 1 t über die Scheiben I, II, III und IV wandert. Die Einflußlinie besteht daher aus vier Geraden mit den Nullpunkten unter I w, II w, III w und IV w (Abb. 328a).

I w und III w liegen im linken bezw. rechten Kämpfergelenk, da die Scheiben I und III sich um diese Punkte gegen das Widerlager drehen. Der Pol I II ist das imaginäre Gelenk der Scheiben I und II, das bestimmt ist als Schnittpunkt der die Scheiben I und II verbindenden Stäbe. Der Pol II III liegt im Scheitelgelenk, da dort die Scheiben II und III sich gegeneinander drehen. II w liegt sodann im Schnittpunkt der durch III w und II III und durch I w und I II gelegten Geraden, während IV w bestimmt ist als Schnittpunkt der Verbindungslinien von I w und I IV sowie von II w und II IV, wobei I IV und II IV in den Punkten liegen, in denen die Scheibe IV gelenkig mit I und II verbunden ist.

Durch die Ordinate $+\frac{1\, x_i}{r_i}$ unter dem linken Auflager werden sodann die Richtungen der Einflußgeraden festgelegt (vergl. Abb. 256d auf Seite 182). Man beachte noch, daß die Einflußgeraden I und II sich unter I II schneiden

Abb. 328.

müssen. Der Pol I II ist identisch mit dem Ritterschen Drehpunkt i, II w mit dem früher ermittelten Punkt E.

Abb. 328 a.

5. Die A-Linie des in Abb. 329 dargestellten Systems.

Zunächst möge nachgewiesen werden, daß das System statisch bestimmt und starr ist. Wir gehen dabei aus von dem einfach beweglichen Gelenkviereck I—III—V—w (Abb. 329a), von dem ein Glied (das Widerlager w) festliegt, so daß alle übrigen Punkte des Gelenkvierecks gezwungen sind, bei irgend einer Bewegung ganz bestimmte Bahnen zu beschreiben. Das Gelenkviereck ist mithin eine zwangläufige kinematische Kette. An diese werden nun der Reihe nach die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und a zweistäbig angeschlossen, so daß das derart entstandene Gebilde ebenfalls einfach beweglich ist. Bringen wir jetzt einen Punkt der Kette, z. B. a, mit dem Widerlager durch einen Stab oder ein bewegliches Auflager in Verbindung, so wird das System starr (vergl. 4. A, Abb. 312, Seite 222).

Abb. 329.

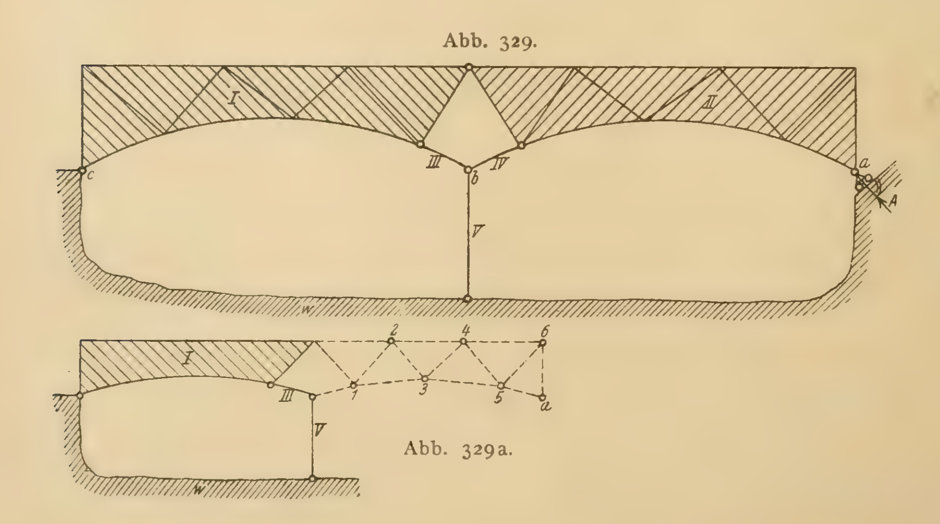


Abb. 329a.

Zur Ermittlung der *A*-Linie denken wir uns nun das Widerlager bei *A* beseitigt und zum Ersatz den Auflagerdruck *A* als äußere Kraft angebracht (Abb. 330). Dadurch ist das System einfach beweglich geworden, weil eine Starrheitsbedingung (das Widerlager) beseitigt ist. Es besteht jetzt aus den starren Scheiben I, II, III, IV, V und *w*. Da die Last 1 t über die Scheiben I und II wandert, muß die Einflußlinie aus zwei Geraden bestehen, deren Nullpunkte senkrecht unter I *w* und II *w* liegen. Diese Pole sind daher zunächst zu bestimmen. I *w* liegt in dem festen Auflagergelenk, da sich die Scheibe I um diesen Punkt gegen das Widerlager dreht. Der Pol I II liegt in dem Berührungspunkt der Scheiben I und II. Der Pol II III ist das imaginäre Gelenk der Scheiben II und III, das mit dem Schnittpunkt der beiden die Scheiben II und III verbindenden Stäbe zusammenfällt. Der Pol III *w* muß einerseits auf der Verbindungslinie von I *w* und I III, anderseits auf der Verlängerung der Pendel-

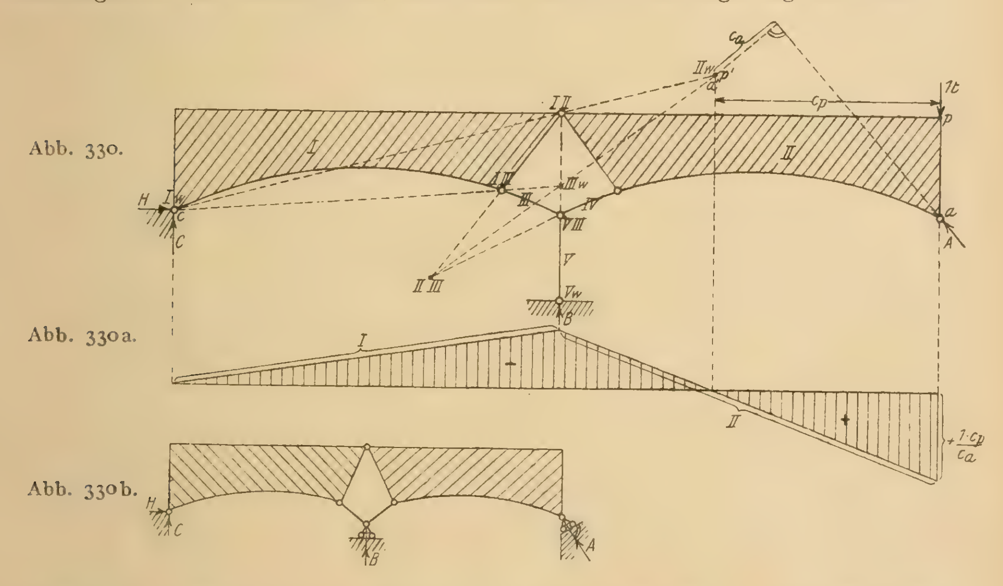


Abb. 330.

Abb. 330a.

Abb. 330b.

stütze V, d. h. auf der Verbindungslinie der Pole V *w* und V III liegen. Nunmehr ist auch der gesuchte Pol II *w* bestimmt als Schnittpunkt der Verbindungslinien von I *w* und I II sowie II III und III *w*.

Die Form der Einflußlinie ist somit bestimmt. Der Scheibe I entspricht die Einflußgerade I mit dem Nullpunkt unter I *w* und der Scheibe II die Einflußgerade II mit dem Nullpunkt unter II *w* (Abb. 330a). Zur Festlegung der Richtungen der Einflußgeraden bestimmen wir die Ordinate unter dem Punkt *p*. Wir bringen daher dort die Last 1 t an und berechnen für diese Laststellung den Auflagerdruck *A* mit Hilfe des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$. Zu dem Zweck benutzen wir eine beliebige Figur F'. Wir erteilen dem Punkt *p* die beliebige lotrechte Geschwindigkeit $\overline{p\,p'}$. Da der Punkt *p* der Scheibe II angehört und diese sich um II *w* dreht, so ist der Polstrahl des Punktes *p* der Strahl *p*—II *w*, und da die lotrechte Geschwindigkeit eines Punktes in die Richtung seines Polstrahls fällt, muß $p\,p'$ in die Richtung *p*—II *w* fallen. Wählen wir nun $p\,p'$ derart, daß p' in II *w* liegt, dann müssen auch nach Seite 217 die Endpunkte

der lotrechten Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte der Scheibe II in II w liegen, mithin auch a'. Nunmehr ist der Hebelarm der in p angreifenden Kraft 1 t in bezug auf $p' = c_p$, der Hebelarm des in a angreifenden Auflagerdrucks A in bezug auf $a' = c_a$. (Die Hebelarme der übrigen Auflagerdrücke B, C und H sind $= 0$, da ihre Angriffspunkte als feste Punkte keine Geschwindigkeit erfahren.) Somit lautet die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$:

$$A \cdot c_a - 1 \cdot c_p = 0; \quad A = + \frac{1 \cdot c_p}{c_a}.$$

Senkrecht unter der Last 1 t tragen wir diesen Wert in irgend einem Maßstabe als Ordinate auf, womit die Richtungen der Einflußgeraden II und I festgelegt sind.

An Stelle der Pendelstütze V kann man auch ein wagerecht bewegliches Auflager anordnen, da beide in ihrer Wirkung miteinander übereinstimmen (Abb. 330b).

6. Die U-Linie (Abb. 331).

Wir beseitigen den Untergurtstab U und ersetzen ihn durch seine Spannkraft, wodurch das System einfach beweglich wird, da eine Starrheitsbedingung

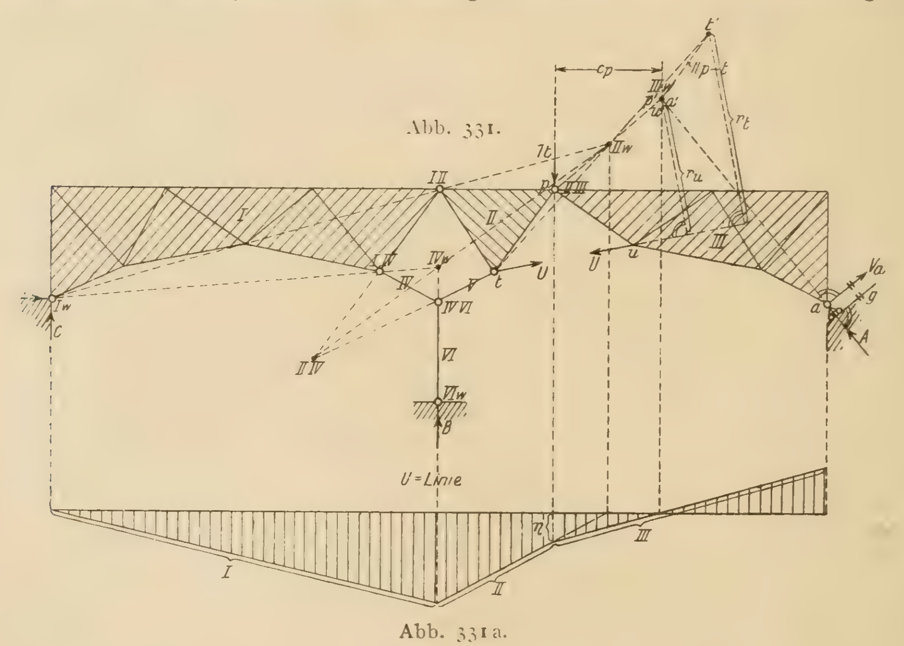


Abb. 331 a.

beseitigt ist. Es zerfällt sodann in die starren Scheiben w, I, II . . . VI. Da die Last 1 t über die Scheiben I, II und III wandert, so muß die Einflußlinie aus drei Geraden bestehen, deren Nullpunkte senkrecht unter I w, II w und III w liegen. Diese Nullpunkte sind daher zunächst zu bestimmen. Die Pole I w und II w werden genau so bestimmt wie unter 5. Ferner liegt III w einerseits auf der durch II III und II w gelegten Geraden, anderseits auf der Senkrechten zur Richtung der wirklichen Geschwindigkeit v_a des Punktes a der Scheibe III. v_a kann hier nur parallel zur Gleitbahn g des beweglichen Auflagers gerichtet

sein (im Gegensatz zur vorigen Aufgabe, wo ja das Widerlager bei a beseitigt war). Die lotrechte Geschwindigkeit fällt also mit der Richtung des Auflagerdrucks A zusammen, also auch der Polstrahl des Punktes a. Da a ein Punkt der Scheibe III ist, so muß der Polstrahl des Punktes a durch das Momentanzentrum der Scheibe III, also durch III w gehen. Damit ist III w bestimmt als Schnittpunkt der durch II III und II w gelegten Geraden und des Auflagerdrucks A.

Nunmehr ist die Form der Einflußlinie bestimmt. Der Scheibe I entspricht die Einflußgerade I mit dem Nullpunkt unter I w, der Scheibe II die Gerade II mit dem Nullpunkt unter II w und der Scheibe III die Gerade III mit dem Nullpunkt unter III w (Abb. 331a). Jetzt braucht nur noch eine Ordinate der Einflußlinie berechnet zu werden, um die Richtungen der Einflußgeraden festzulegen. Wir bestimmen z. B. die Ordinate η infolge der Last 1 t im Punkte p senkrecht über η und berechnen für diese Laststellung die Spannkraft U mittels des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$. Zu dem Zweck zeichnen wir eine beliebige Figur F', erteilen also z. B. dem Punkte p die beliebige lotrechte Geschwindigkeit $p-p'$. Da der Punkt p der Scheibe III angehört, muß $p-p'$ in die Richtung des Polstrahls des Punktes p, d. h. in die Richtung p—III w fallen. Die Größe von $p-p'$ wählen wir derart, daß p' mit III w zusammenfällt. Dann müssen auch die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten aller übrigen Punkte der Scheibe III in III w fallen (vergl. Seite 217), also auch u' und a'. Da ferner $p' t' \parallel p t$ sein, anderseits aber t' in dem Polstrahl des Punktes t, also in dem Strahl t—II w liegen muß (Punkt t dreht sich ja als Punkt der Scheibe II um II w), so ist auch t' bestimmt. Die lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte von B, C und H sind $= 0$, da diese Punkte festliegen. Die im Punkte t angreifende Kraft U hat dann in bezug auf t' den Hebelarm r_t, die in u angreifende Kraft U in bezug auf u' den Hebelarm r_u, während der Hebelarm der in p angreifenden Kraft 1 t in bezug auf $p' = c_p$ ist. Der Hebelarm der in a angreifenden Kraft A in bezug auf a' ist $= 0$, da A durch a' geht. Somit lautet die Gleichung $\Sigma Q \cdot c = 0$:

$$U \cdot r_t - U \cdot r_u + 1\, c_p = 0.$$

$$U = -\frac{1\, c_p}{r_t - r_u}.$$

Der Wert ist negativ, da $r_t > r_u$ ist. Somit wird U infolge der Last 1 t in p eine Druckkraft. Senkrecht unter p tragen wir den Wert $-\frac{1\, c_p}{r_t - r_u}$ als Ordinate η auf. Damit liegen die Richtungen sämtlicher Einflußgeraden fest.

7. Die D-Linie (Abb. 332).

Das Gelenkviereck $e\, f\, g\, h$ sei ein Parallelogramm und der Obergurt verlaufe parallel dem Untergurt.

Nach Beseitigung der Diagonalstabes, an dessen Stelle die Spannkraft D als äußere Kraft angebracht wurde, ist das Fachwerk wieder einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt ist. Es zerfällt alsdann in die starren Scheiben w, I, II .... VIII. Die über die Scheiben I, II, III und IV

wandernde Last 1 t hat eine aus den vier Geraden I, II, III und IV bestehende Einflußlinie zur Folge. Die Nullpunkte dieser Geraden liegen senkrecht unter I *w*, II *w*, III *w* und IV *w*. Diese Pole sind daher zunächst zu bestimmen. Die Pole I *w* und II *w* werden wieder gefunden wie unter 5 und 6. VI *w* liegt sowohl auf der durch VIII *w* und VI VIII als auch auf der durch I *w* und I VI gelegten Geraden, d. h. in deren Schnittpunkt. Der Pol II VI liegt als imaginäres Gelenk der Scheiben II und VI im Unendlichen, da die beiden Stäbe, welche die Scheiben II und VI verbinden, zueinander parallel sind, sich also erst im Unendlichen schneiden. II *w* liegt sowohl auf der durch I *w* und I II gelegten Geraden als auch auf der Verbindungslinie des unendlich fernen Pols II VI und des Pols VI *w*, d. h. auf der durch VI *w* gelegten Parallelen zu den Stäben $g-f$ und $e-h$, die so den unendlich fernen Pol II VI erst im Unendlichen schneidet. Auch II III liegt als imaginäres Gelenk der Scheiben II

Abb. 332.

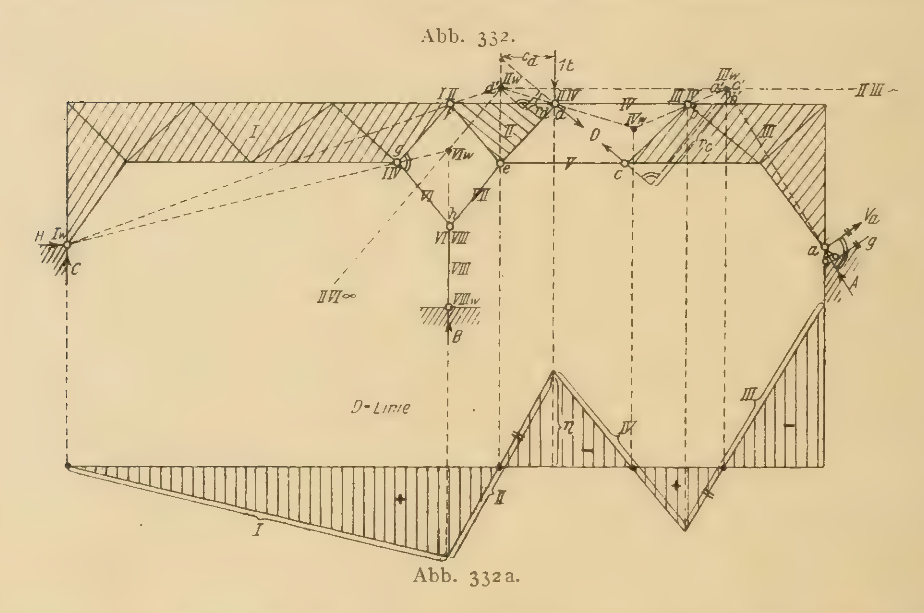


Abb. 332a.

und III im Unendlichen, weil die die Scheiben II und III verbindenden Stäbe sich erst im Unendlichen schneiden. Der Pol III *w* liegt einerseits auf der Senkrechten zur wirklichen Geschwindigkeit v_a des der Scheibe III angehörenden Punktes a (vergl. auch unter 6), anderseits auf der Verbindungslinie des unendlich fernen Pols II III und II *w*, also im Schnittpunkt der beiden Geraden. Die Verbindungslinie II III — II *w* muß parallel zu den beiden, die Scheiben II und III verbindenden Stäben IV und V verlaufen, denn dann schneidet sie den Pol II III im Unendlichen.

Endlich ist noch IV *w* zu bestimmen, und zwar als Schnittpunkt der Geraden II *w* — II IV und III *w* — III IV.

Nunmehr kann die Einflußlinie zunächst ihrer Form nach gezeichnet werden. Wir zeichnen die der Scheibe I entsprechende Einflußgerade I mit dem Nullpunkt unter I *w*, darauf die Gerade II mit dem Nullpunkt unter II *w*, dann IV mit dem Nullpunkt unter IV *w* und endlich III mit dem Nullpunkt

unter III w (Abb. 332a). Um die Richtungen der Einflußgeraden festzulegen, muß noch eine Ordinate angegeben werden. Wir bestimmen die Ordinate η infolge der Last 1 t senkrecht über η mit Hilfe des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$. Zu dem Zweck zeichnen wir eine beliebige Figur F'. Wir erteilen dem Punkte c eine beliebige lotrechte Geschwindigkeit $c—c'$. Da der Punkt c der Scheibe III angehört, diese sich aber um III w dreht, so ist der Polstrahl des Punktes c der Strahl c—III w, in dessen Richtung die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes c fallen muß. Wir wählen nun $c\,c'$ = der Länge des Polstrahles c—III w, so daß c' in III w fällt. Dann müssen auch die Endpunkte aller übrigen Punkte der Scheibe III in III w fallen (vergl. Seite 217), also auch b' und a'. Da ferner die Richtung der lotrechten Geschwindigkeit des der Scheibe II angehörenden Punktes d in die Richtung seines Polstrahles d—II w fallen und anderseits $b'—d' \parallel b—d$ sein muß, so fällt d' in II w. Die lotrechten Geschwindigkeiten der Angriffspunkte von B, C und H sind = 0, da diese Punkte festliegen. Somit lautet die Gleichung $\Sigma Q \cdot e = 0$:

$$D \cdot r_d + D \cdot r_c + 1\, c_d = 0.$$

$$D = -\frac{1\, c_d}{r_c + r_d} \text{ (Druck).}$$

Senkrecht unter der Last wird dieser Wert als Ordinate η aufgetragen, womit die genaue Lage der Einflußgeraden bestimmt ist. Man beachte noch, daß die Einflußgeraden II und III sich unter II III schneiden müssen. Da aber II III im Unendlichen liegt, muß auch der Schnittpunkt der Geraden II und III im Unendlichen liegen, d. h. die beiden Geraden müssen parallel sein.

8. Umständlicher wird die Bestimmung der Nullpunkte der Einflußlinie, wenn es sich um Stäbe handelt, die zwischen dem festen Auflager und der Pendelstütze liegen. Gesucht sei z. B. die Einflußlinie für die Obergurtspannkraft O (Abb. 333).

Durch Beseitigung des Obergurtstabes zerfällt das System in die Scheiben w, I, II ... VI. Da die Last 1 t über die Scheiben I, II und III wandert, so besteht die Einflußlinie aus drei Geraden, deren Nullpunkte unter I w, II w und III w liegen müssen. Die Pole I w, I II, II III, III V, V VI und VI w fallen mit den Punkten zusammen, in denen die entsprechenden Scheiben gelenkig miteinander verbunden sind, während II V als imaginäres Gelenk der Scheiben II und V bestimmt ist. Jedoch macht zunächst die Bestimmung des Poles II w Schwierigkeiten, da wir vorläufig nur einen geometrischen Ort für II w kennen, nämlich die Verbindungslinie von I w und I II. Dasselbe gilt für den Pol III w, von dem wir vorläufig nur angeben können, daß er mit der Richtung der lotrechten Geschwindigkeit des der Scheibe III angehörenden Punktes a zusammenfallen, also in der Richtung des Auflagerdrucks A liegen muß (vergl. auch unter 6 und 7). Wir nehmen daher zunächst versuchsweise irgend eine beliebige Lage des Poles III w, z. B. im Punkt a an. Der Pol sei III w_1 benannt. Dann muß V w_1 im Schnittpunkt der Verbindungslinien von III w_1 und III V sowie von VI w und V VI liegen. Der der Lage III w_1 entsprechende Pol II w_1 ist dann der Schnittpunkt der Verbindungslinien von III w_1 und II III sowie von II V und V w_1. Jetzt nehmen wir eine zweite Lage von III w, z. B. senkrecht

über II III, im Punkte III w_2 an. Wäre III w_2 der Drehpol der Scheibe III, dann wäre der Strahl b — III w_2 der Polstrahl des der Scheibe III angehörenden Punktes b, gleichzeitig aber auch der Polstrahl des der Scheibe II angehörenden Punktes b. Die Scheiben II und III müßten sich dann also um denselben Pol III w_2 drehen, d. h. II w_2 müßte dann mit III w_2 zusammenfallen. Durchwandert nun der Pol III w alle möglichen Lagen auf der Linie III w_1 — III w_2, dann muß auch der Pol II w alle möglichen Lagen auf der Linie II w_1 — II w_2 durchwandern. II w liegt daher auf der Verbindungslinie von II w_1 und II w_2, anderseits aber auch auf der Verbindungslinie von I w und I II, also im Schnitt-

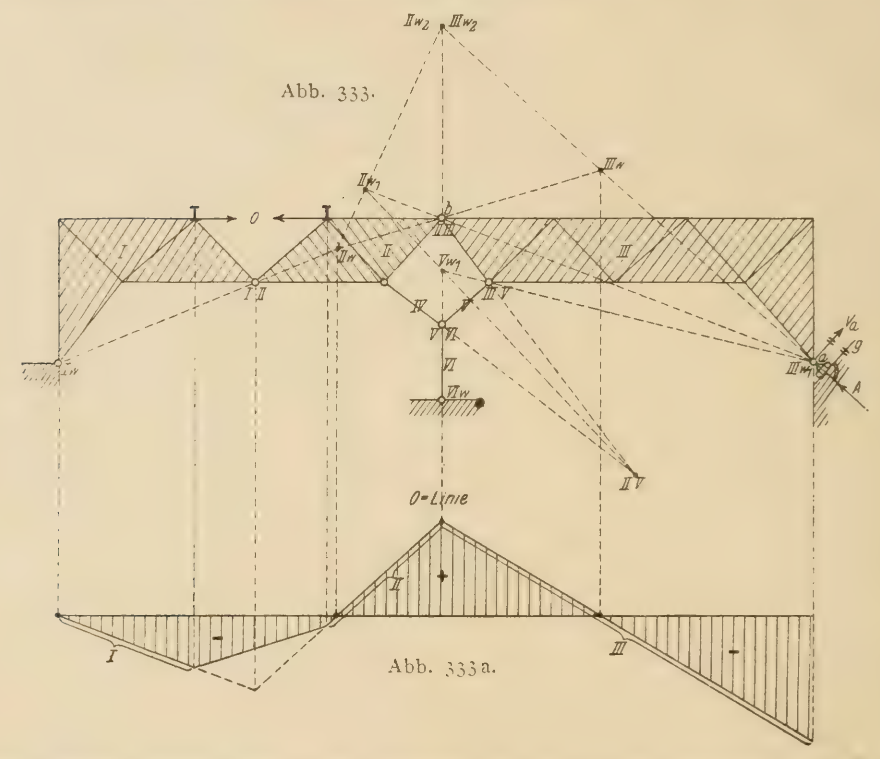


Abb. 333.

Abb. 333a.

punkt beider Verbindungslinien. Nunmehr ist auch III w bestimmt als Schnittpunkt der Geraden III w_1 — III w_2 und II w — II III.

Die Einflußlinie und eine Ordinate derselben wird dann wieder wie unter 6 bestimmt. Man beachte hier noch, daß sie zwischen den beiden Querträgern geradlinig verlaufen muß (Abb. 333a).

9. Die D-Linie (Abb. 334).

Der Diagonalstab wird wieder beseitigt und durch seine Spannkraft D ersetzt. Alsdann zerfällt das System in die starren Scheiben w, I, II . . . VIII. Da die Last 1 t über die Scheiben I, II, III und IV wandert, so muß die Einflußlinie aus vier Geraden bestehen, deren Nullpunkte unter den Polen I w, II w, III w und IV w liegen. Diese sind daher zunächst zu bestimmen.

Die Pole I w, II III, I IV, II IV, III VII, VII VIII und VIII w fallen mit den Punkten zusammen, in denen die entsprechenden Scheiben gelenkig miteinander

verbunden sind. Der Pol II VII ist das imaginäre Gelenk der Scheiben II und VII, liegt also im Schnittpunkt der beiden, die Scheiben II und VII verbindenden Stäbe. I II liegt als imaginäres Gelenk der Scheiben I und II im Schnittpunkt der Stäbe IV und V. Da diese als Parallelstäbe sich erst im Unendlichen schneiden, liegt I II im Unendlichen. Von dem Pol II w können wir zunächst nur angeben, daß er auf der Verbindungslinie von I w und I II liegt. Diese Verbindungslinie muß parallel zu den Stäben IV und V verlaufen, damit sie durch den unendlich fernen Pol I II geht. Ebenso wissen wir von dem Pol III w vorläufig nur, daß er auf der Senkrechten zur lotrechten Geschwindigkeit des

Abb. 334.

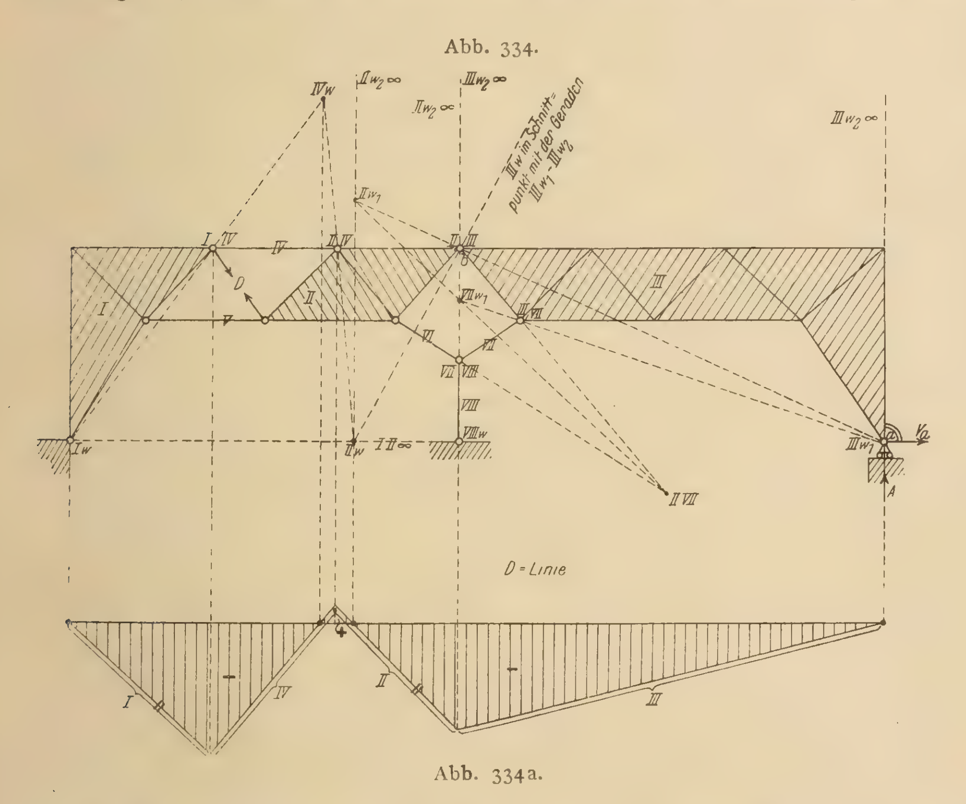


Abb. 334a.

der Scheibe III angehörenden Punktes a liegt, also in der Richtung des Auflagerdruckes A. Wir nehmen daher zunächst versuchsweise irgend eine beliebige Lage des Poles III w, z. B. im Punkte a an. Der Pol sei III w_1 benannt. Dann muß VII w_1 im Schnittpunkt der Verbindungslinien von III w_1 und III VII sowie von VIII w und VII VIII liegen. Der der Lage III w_1 entsprechende Pol II w_1 ist dann der Schnittpunkt der Verbindungslinien von II VII und VII w_1 sowie von III w_1 und II III.

Jetzt nehmen wir eine zweite Lage von III w, z. B. senkrecht über dem Punkte b, in III w_2 an. Da III w, wie bereits oben bemerkt, nur in der Richtung des Auflagerdruckes A liegen kann, muß der Pol III w_2, wenn er senkrecht über b angenommen werden soll, im Unendlichen liegen. Wäre III w_2 der Drehpol der Scheibe III, dann wäre der Strahl b—III w_2 der Polstrahl des

der Scheibe III angehörenden Punktes *b*, gleichzeitig aber auch der Polstrahl des der Scheibe II angehörenden Punktes *b*, da *b* sowohl auf der Scheibe III als auch auf der Scheibe II liegt. Die Scheiben III und II müßten sich dann also um denselben Pol III w_2 drehen, d. h. der Drehpol der Scheibe II, nämlich II w_2, müßte dann mit III w_2 zusammenfallen, also auch im Unendlichen liegen.

Erteilen wir nun dem System eine Reihe von Bewegungen und bestimmen die zugehörigen Pole III *w*, so müssen diese Pole sämtlich auf der Linie III w_1 — III w_2 liegen. Der Pol III *w* wandert also auf dieser Geraden bei den verschiedenen Bewegungen des Systems. Entsprechend wandert der Pol II *w* auf der Geraden II w_1 — II w_2. Damit ist der Pol II *w* bestimmt. Er liegt einerseits, wie bereits oben bemerkt, auf der Verbindungslinie von I *w* und I II, anderseits auf der Geraden II w_1 — II w_2, also im Schnittpunkt beider Geraden. III *w* liegt dann im Schnittpunkt der Verbindungslinien von II *w* und II III sowie von III w_1 und III w_2.

Nunmehr kann die Form der Einflußlinie und irgend eine Ordinate wieder wie unter 7 bestimmt werden (Abb. 334 a). Man beachte, daß die Einflußgeraden I und II sich unter I II schneiden müssen. Da aber I II im Unendlichen liegt, muß auch der Schnittpunkt der Einflußgeraden I und II im Unendlichen liegen, d. h. die Geraden I und II müssen parallel verlaufen.

10. Man kann auch die Momentanpole der Scheiben für irgend eine Drehung gegen das Widerlager mit Hilfe einer Figur *F'* bestimmen, wie an dem bereits unter 5 behandelten Beispiel gezeigt werden möge, in dem die Einflußlinie für den Auflagerdruck *A* gefunden wurde (Abb. 335).

Das Widerlager bei *A* ist beseitigt und durch den Auflagerdruck *A* ersetzt. Da die Last 1 t über die Scheiben I und II wandert, so besteht die Einflußlinie aus den Geraden I und II, deren Nullpunkte senkrecht unter I *w* und II *w* liegen. I *w* fällt mit dem linken Auflagergelenk zusammen, da die Scheibe I sich um diesen Punkt gegen das Widerlager dreht. Zur Bestimmung von II *w* zeichnen wir eine beliebige Figur *F'*. Wir erteilen dem Punkte 1 die beliebige lotrechte Geschwindigkeit 1—1', die in die Richtung des Polstrahles des Punktes 1 fallen muß. Da der Punkt 1 der Scheibe I angehört, diese sich aber um I *w* dreht, so ist der Polstrahl des Punktes 1 der Strahl 1 — I *w*. In die Richtung dieses Strahls muß $\overline{1\,1'}$ fallen. Ebenso muß $\overline{2\,2'}$ in die Richtung des Polstrahls 2 — I *w* fallen, und $\overline{1'\,2'}$ muß parallel 1 2 sein. $\overline{2'\,3'}$ muß parallel 2—3 verlaufen, und 3' muß auf dem Polstrahl des Punktes 3 liegen, d. h. auf dem Strahl 3 5. Da der Punkt 4 zweistäbig an 1 und 3 angeschlossen ist, so ist 4' bestimmt als Schnittpunkt der zu 1—4 und 3—4 parallelen Geraden 1'—4' und 3'—4'. Den Punkt *a* können wir uns durch zwei Stäbe 1—*a* und 4—*a* starr angeschlossen denken, weil er dann bei der Bewegung des Systems dieselbe Bahn beschreibt wie der Punkt *a* der starren Scheibe II.

a' ist sodann bestimmt als Schnittpunkt der zu den Geraden 1—*a* und 4—*a* parallelen Geraden 1'—*a'* und 4'—*a'*. Sobald wir jetzt die Richtungen zweier Polstrahlen der Scheibe II angeben können, ist der Pol II *w* als Schnittpunkt der beiden Polstrahlen bestimmt. Wir kennen aber die Richtungen der

Polstrahlen der Punkte 1 und 4, die mit den Richtungen der lotrechten Geschwindigkeiten 1—1' und 4—4' zusammenfallen müssen. Auch die Verlängerung von a—a' muß dann durch II w gehen, da a—a' als lotrechte Geschwindigkeit eines Punktes der Scheibe II in den Polstrahl dieses Punktes fallen muß, der durch das Momentanzentrum II w geht. Die Einflußlinie für A ist in Abb. 335a dargestellt. Zur Bestimmung einer Ordinate bringen wir die Last 1 t im

Abb. 335.

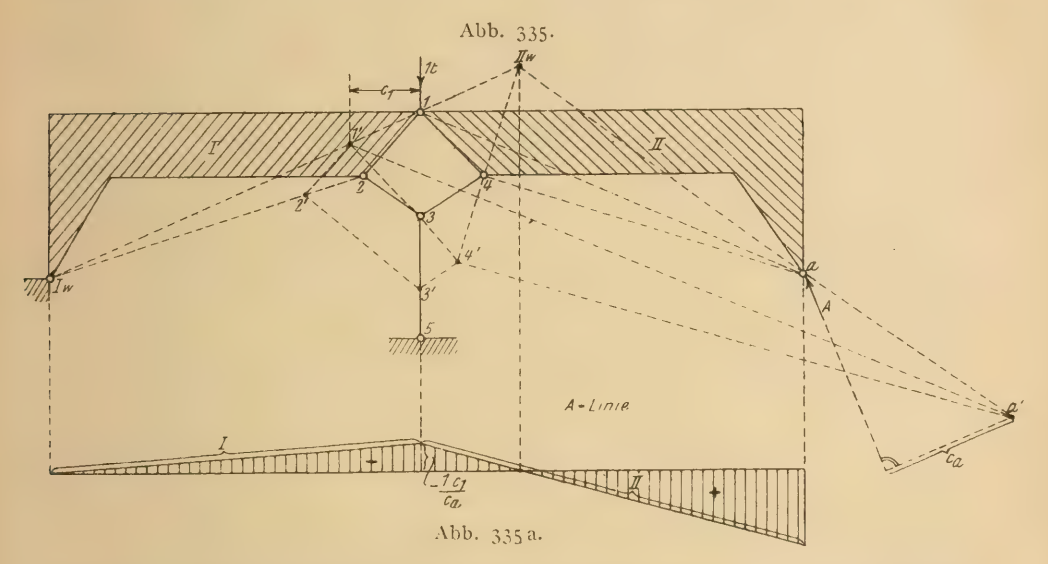


Abb. 335a.

Punkte 1 an und berechnen A mit Hilfe des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$. Die Gleichung lautet sodann

$$A \cdot c_a + 1\, c_1 = 0; \quad A = -\frac{1\, c_1}{c_a}.$$

Senkrecht unter der Last wird dieser Wert in irgend einem Maßstabe als Ordinate aufgetragen.

11. Zum Schluß möge noch die Bestimmung einiger Einflußlinien für den fachwerkartigen Dreigelenkbogen mit überkragenden Enden und Schleppträgern gezeigt werden.

a) Die V-Linie (Abb. 336).

Nach Herausnahme der Vertikalen V ist das System einfach beweglich geworden, da eine Starrheitsbedingung beseitigt wurde. Der fehlende Stab ist durch seine Spannkraft V ersetzt. Das System besteht alsdann aus den Scheiben w, I, II, . . . VII. Da die Last 1 t über die Scheiben I bis V wandert, so muß die Einflußlinie aus fünf Geraden mit den Nullpunkten unter I w, II w, . . . V w bestehen. Diese sind daher zunächst aufzusuchen. Wir erteilen dem System eine willkürliche Bewegung gegen das Widerlager. Dabei dreht sich die Scheibe IV gegen das Widerlager um IV w (rechtes Kämpfergelenk), VI um VI w und VII um VII w. VI w und VII w fallen mit dem linken Kämpfergelenk zusammen. Ferner drehen sich die Scheiben I bis VII gegeneinander um die Gelenke, in denen sie miteinander zusammenhängen, also um I II, II III, III IV, IV V, II VI und III VII. III w liegt dann im Schnittpunkt der Geraden VII w—III VII und IV w—III IV, während sich die Geraden III w—II III und

VI w—II VI in II w schneiden müssen. Da der Punkt a der Scheibe I sich nur parallel zu der Gleitbahn des beweglichen Auflagers verschieben kann, so muß seine lotrechte Geschwindigkeit, mithin auch sein Polstrahl, in die Richtung der Normalen zur Gleitbahn fallen. Auf dieser Normalen muß daher das Momentanzentrum I w liegen. Außerdem liegt I w auf der Geraden I II—II w. Auch V w muß auf der Normalen zur Gleitbahn des Punktes b und auf der Geraden IV w—IV V liegen.

Damit sind sämtliche Pole bestimmt, wodurch nach Bestimmung einer Ordinate die Einflußlinie festliegt. Bringt man dann die Last 1 t über der Vertikalen, also senkrecht über dem Widerlager an, so werden sämtliche Stäbe mit Ausnahme der Vertikalen spannungslos, da die Last unmittelbar durch die Vertikale in das Widerlager geleitet wird. Die Vertikale erhält daher die

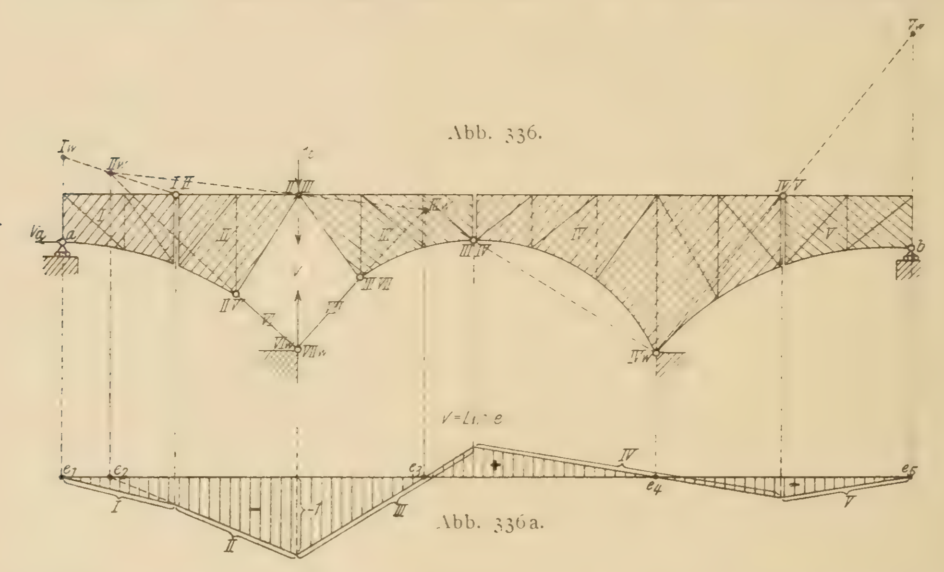


Abb. 336.

Abb. 336a.

Druckspannkraft —1. Trägt man dann diesen Wert senkrecht unter der Last als Ordinate auf, so sind sämtliche Einflußgeraden bestimmt. Wir ziehen die Gerade II durch e_2 (Abb. 336a), benutzen sie aber als Einflußgerade nur unter der Scheibe II, womit auch die Gerade I festliegt, die durch den Nullpunkt e_1 gehen muß. Ferner muß die Gerade III durch e_3 gehen, IV durch e_4 und V durch e_5.

Dem Leser wird empfohlen, auch noch den Pol II IV als Schnittpunkt der Geraden II w—IV w und II III—III IV zu bestimmen und dann zu beachten, daß die Einflußgeraden II und IV sich senkrecht unter II IV schneiden müssen, wodurch man eine gute Kontrolle für die Genauigkeit der Polbestimmungen erhält.

b) Die U-Linie (Abb. 337).

Durch Beseitigung des Untergurtstabes wird das Fachwerk wieder einfach beweglich und zerfällt in die starren Scheiben I bis V. Die Spannkraft U wird zum Ersatz als äußere Kraft angebracht. Die Einflußlinie besteht dann aus fünf Geraden mit den Nullpunkten unter den Polen I w, II w, . . . V w, die daher

zunächst zu bestimmen sind. Erteilt man dem beweglichen System eine willkürliche Verschiebung, so drehen sich die Scheiben II und IV gegen das Widerlager um die Kämpfergelenke. In diese fallen daher II w (links) und IV w (rechts). Die Scheiben I, II, III, IV und V drehen sich gegeneinander um die Gelenkpunkte, in denen sie miteinander zusammenhängen, also um I II, II III, III IV und IV V. III w liegt im Schnittpunkt der Geraden II w—II III und IV w—III IV. I w liegt auf der Normalen zur Gleitbahn des linken beweglichen Auflagers (vergl. die vorige Aufgabe) und auf der Geraden II w—I II, V w auf der Normalen zur Gleitbahn des rechten beweglichen Auflagers und auf der

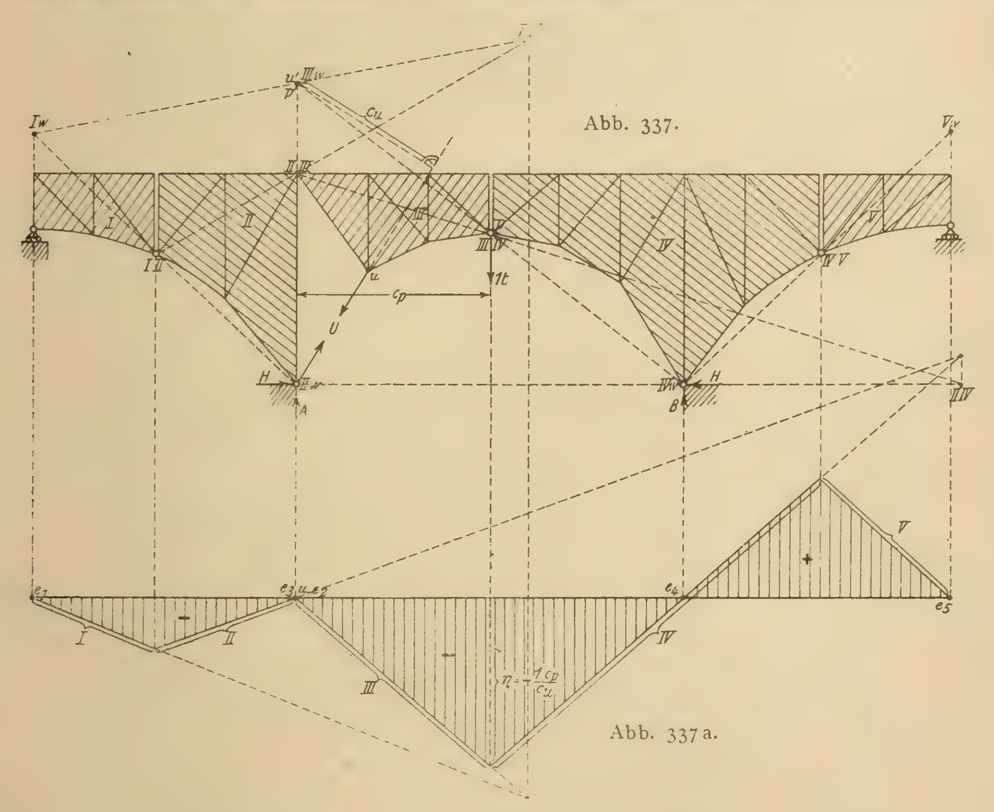


Abb. 337.

Abb. 337a.

Geraden IV w—IV V. Wir bestimmen noch I III und II IV, unter denen sich die Einflußgeraden I und III bezw. II und IV schneiden müssen. I III liegt im Schnittpunkt der Geraden I II—II III und I w —III w, während die Geraden II III —III IV und II w—IV w sich in II IV schneiden müssen. Kennt man dann eine Ordinate der Einflußlinie, so kann man sämtliche Einflußgeraden zeichnen. Wir bestimmen die unter dem Scheitelgelenk liegende Ordinate η, berechnen also die Spannkraft U infolge der im Scheitelgelenk wirkenden Last 1 t. Die Berechnung erfolgt am einfachsten mit Hilfe des Gesetzes $\Sigma Q \cdot c = 0$. Da der Gelenkpunkt p sich als Punkt der Scheibe III um III w dreht, so muß die lotrechte Geschwindigkeit von p in die Richtung des Polstrahls p—III w fallen. Wählen wir dann die lotrechte Geschwindigkeit p—p' derart, daß p' in III w legt, dann müssen auch die Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten aller

übrigen Punkte der Scheibe III mit III w zusammenfallen. Es muß dann also auch u' in III w liegen. Die Angriffspunkte der übrigen äußeren Kräfte (H, A und B) erfahren als festliegende Punkte keine Verschiebung, ihre lotrechten Geschwindigkeiten sind daher $= 0$. Ist dann c_p der Hebelarm der Kraft 1 t in bezug auf p' und c_u der Hebelarm von U in bezug auf w, so erhält man die Gleichung

$$U \cdot c_u + 1\, c_p = 0, \text{ woraus } U = -\frac{1\, c_p}{c_u}.$$

Dieser Wert wird senkrecht unter der Last 1 t als Ordinate aufgetragen (Abb. 337a). Alsdann zeichnet man die Geraden III und IV mit den Nullpunkten e_3 und e_4 unter III w und IV w, wodurch auch die Gerade V bestimmt ist, deren Nullpunkt e_5 senkrecht unter V w liegen muß. Die Gerade I ist bestimmt durch die beiden Bedingungen, daß ihr Nullpunkt e_1 unter I w liegen und daß sie sich außerdem mit der Geraden III senkrecht unter I III schneiden muß. Nunmehr kann man auch die Gerade II zeichnen, die durch den senkrecht unter II w liegenden, mit e_3 zusammenfallenden Nullpunkt e_2 gehen muß. Als Genauigkeitskontrolle benutze man die Bedingung, daß die Geraden II und IV sich senkrecht unter II IV schneiden müssen.

§ 11. Die Theorie der Raumfachwerke.[1]

1. Allgemeines.

Auf einen Körper mögen beliebig gerichtete, in verschiedenen Punkten angreifende Kräfte P wirken, die nicht in einer Ebene liegen und miteinander im Gleichgewicht sind (Abb. 338). Ihre Angriffspunkte seien durch die Koordinaten x, y, z eines rechtwinkligen Achsensystems festgelegt. Bedeuten M_x, M_y und M_z die statischen Momente einer Kraft P in bezug auf die X-Achse bezw. Y- und Z-Achse, ferner X, Y und Z die Seitenkräfte von P nach den Richtungen dieser drei Achsen, so bestehen für das räumliche Kräftesystem die sechs Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = 0$, $\Sigma M_z = 0$, $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, die, wie später gezeigt werden wird, in ähnlicher Weise wie beim ebenen Fachwerk für die Berechnung der Stabspannkräfte eines Raumfachwerks benutzt werden können. Für das Gleichgewicht von räumlichen, in einem Punkt angreifenden Kräften sind notwendig und hinreichend die drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$.

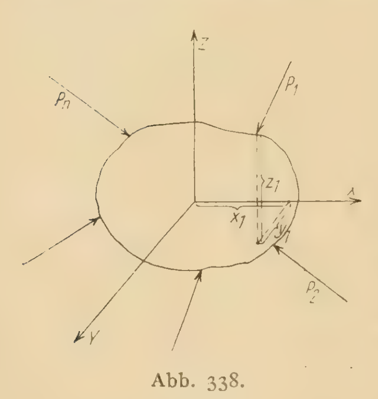


Abb. 338.

Eine Kraft P ist nach Größe und Richtung bestimmt, wenn ihre drei Seitenkräfte X, Y und Z bekannt sind. Da an dem festen Auflager eines Raumfachwerks der Auflagerdruck nach Größe und Richtung unbekannt ist, so treten dort drei Unbekannte auf. An den allseits beweglichen Auflagern ist dagegen die Richtung des Auflagerdrucks bekannt, da sie mit der Nor-

[1]) Nach Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre. 3. Aufl. IV. Abschnitt.

malen zur Gleitfläche des Lagers zusammenfallen muß. Hier ist daher nur die Größe des Auflagerdrucks unbekannt, so daß an einem allseits beweglichen Auflager nur eine Unbekannte wirkt. Führt man dagegen einen Auflagerpunkt in einer bestimmten Linie, so daß er in seitlicher Richtung nicht ausweichen kann, so tritt außer dem normal zur Gleitfläche gerichteten Widerstand noch ein seitlicher Widerstand auf, dessen Richtung mit der Normalen zu der seitlichen Führung des Lagers zusammenfallen muß. Die Richtungen der beiden Widerstände sind daher bekannt. An einem derartig geführten Lager wirken mithin zwei der Richtung nach bekannte und der Größe nach unbekannte Stützwiderstände. Hat daher ein aus s Stäben bestehendes Raumfachwerk f feste, b bewegliche und b' in einer bestimmten Linie geführte Lager, so treten zu den s unbekannten Stabkräften noch $3f + b + 2b'$ unbekannte Stützwiderstände, so daß die Anzahl der Unbekannten $s + 3f + b + 2b'$ beträgt. Häufig ist es von Vorteil, die Stützwiderstände sich durch Stäbe (sog. Auflagerstäbe) ersetzt zu denken, und zwar sind dann für ein allseits bewegliches Auflager ein Auflagerstab, für ein in einer Linie geführtes Lager zwei und für einen festen Stützpunkt drei Auflagerstäbe anzubringen.

Man kann nun an jedem Knotenpunkt die drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma Z = 0$ aufstellen (notwendige und hinreichende Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte, die in einem Punkt angreifen), so daß bei k Knotenpunkten die Anzahl der Gleichungen $= 3k$ ist. Das Fachwerk ist daher statisch bestimmt und starr, wenn die Anzahl der Unbekannten gleich der Anzahl der Gleichungen ist, d. h. wenn $s + 3f + b + 2b' = 3k$ und wenn gleichzeitig auch die Nennerdeterminante der $3k$ Gleichungen $\gtrless 0$ ist (vergl. auch § 10, 2, B, Seite 220). Ist $s + 3f + b + 2b' > 3k$, so ist das Fachwerk überstarr, d. h. statisch unbestimmt, und ist $s + 3f + b + 2b' < 3k$, so ist es beweglich.

Ein weiteres Merkmal für die Starrheit und statische Bestimmtheit eines Raumfachwerks ist der dreistäbige Anschluß der Knotenpunkte (im Gegensatz zu dem zweistäbigen Anschluß der Knotenpunkte eines ebenen Fachwerks).

Für die Berechnung der statischen Momente von Kräften in bezug auf Achsen merke man sich noch folgende Regeln:

1. Schneidet eine Kraft die Momentenachse, so ist ihr Moment in bezug auf die Achse $= 0$, da ihr Hebelarm $= 0$ ist.

2. Ist die Kraft zu der Momentenachse parallel gerichtet, so schneidet sie die Momentenachse im Unendlichen. Ihr Moment in bezug auf die Achse ist daher ebenfalls $= 0$.

2. Berechnung von Stabspannkräften räumlicher Fachwerksysteme.

Während bei den ebenen Fachwerken die Stabspannkräfte entsprechend dem zweistäbigen Anschluß der Knotenpunkte durch Zerlegung einer gegebenen Kraft nach zwei Richtungen gefunden werden, ist zur Berechnung der Stabspannkräfte räumlicher Fachwerke entsprechend dem dreistäbigen Anschluß der Knotenpunkte die Aufgabe zu lösen: „Eine gegebene Kraft nach

drei räumlichen Richtungen zu zerlegen, die sich in **einem** Punkte schneiden". Die Lösung dieser Aufgabe möge zunächst für alle vorkommenden Fälle behandelt werden.

A. Rechnerisches Verfahren.

1. Die allgemeinste Lösung erhält man durch Benutzung der drei auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z bezogenen Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma Z = 0$.

Da jeder Knotenpunkt eines statisch bestimmten, räumlichen Fachwerks durch dreistäbigen Anschluß entstanden ist, so wirken an ihm außer den bekannten äußeren Kräften P noch drei unbekannte Stabkräfte. Zerlegt man sowohl die äußeren Kräfte P als auch die an dem Knoten wirkenden Stabkräfte nach den Richtungen X, Y und Z, so gelten die drei Gleichungen

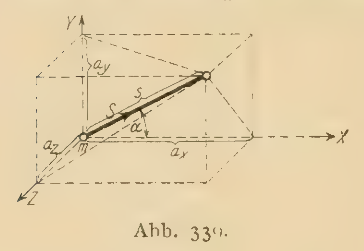


Abb. 339.

$$\Sigma S_x + P_x = 0, \quad \Sigma S_y + P_y = 0, \quad \Sigma S_z + P_z = 0,$$

worin S_x, S_y und S_z bezw. P_x, P_y und P_z die Seitenkräfte der Stabkräfte S bezw. der an dem Knoten angreifenden äußeren Kräfte P nach den Richtungen X, Y und Z bedeuten. Die Summen erstrecken sich über die Stabkräfte des Knotenpunktes.

In Abb. 339 ist die Zerlegung einer Stabkraft S nach den Richtungen X, Y und Z dargestellt. Man findet, wenn s die wahre Stablänge des Stabes S, a_x ihre Projektion auf die X-Achse und α den Winkel zwischen s und a_x bedeutet, $S_x = S \cdot \cos\alpha = S \cdot \frac{a_x}{s}$. Wir wollen in Zukunft das Verhältnis von Stabkraft zur Stablänge mit $\varkappa$ bezeichnen, so daß $S_x = \varkappa \cdot a_x$. Entsprechend findet man $S_y = \varkappa \cdot a_y$ und $S_z = \varkappa \cdot a_z$.

Somit erhält man für einen Knotenpunkt die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma \varkappa \cdot a_x + P_x = 0, \qquad \Sigma \varkappa \cdot a_y + P_y = 0, \qquad \Sigma \varkappa \cdot a_z + P_z = 0.$$

Da an dem Knotenpunkt nur drei unbekannte Stabkräfte angreifen, so sind diese eindeutig bestimmt. Durch geschickte Wahl des Koordinatensystems kann man dabei leicht Vereinfachungen erzielen, wenn man z. B. die Achsen so legt, daß möglichst viele Seitenkräfte gleich Null werden.

2. Die Momentenmethode.

a) Die gegebene Kraft P sei beliebig gerichtet (Abb. 340).

Wir trennen den Knotenpunkt ab und ersetzen die vom Schnitt getroffenen Stäbe durch ihre Spannkräfte, so daß nach wie vor Gleichgewicht herrscht. Zunächst werde S_1 bestimmt. Wir bringen die Spannkraft S_1 an dem Knotenpunkt vorläufig als Zugkraft an und benutzen zu ihrer Berechnung die Gleichgewichtsbedingung: „Die Summe der Momente in bezug auf die durch die Spurpunkte von S_2 und S_3 gehende Achse muß $= 0$ sein". Alsdann fallen S_2 und S_3 aus der Momentengleichung heraus, da sie die Momentenachse schneiden, ihr Moment in bezug auf die Achse also $= 0$ wird. Die Kräfte P und S_1 zerlegen wir dabei in den durch sie gelegten Vertikalebenen in die Seiten-

kräfte $P\cos\alpha$ bezw. $S_1\cos\beta$ und $P\sin\alpha$ bezw. $S_1\sin\beta$, und zwar derart, daß $P\cos\alpha$ und $S_1\cos\beta$ in die Grundrißebene fallen, während $P\sin\alpha$ und $S_1\sin\alpha$ senkrecht zur Grundrißebene stehen. Dann fallen auch $P\cdot\cos\alpha$ und $S_1\cdot\cos\beta$ aus der Momentengleichung heraus, da sie die in der Grundrißebene liegende Momentenachse schneiden. Es könnte höchstens der Grenzfall eintreten, daß sie der Achse parallel verlaufen. Aber auch dann ist ihr Moment für die Achse $=0$, wie unter 1 gezeigt wurde. Die Momentengleichung lautet daher

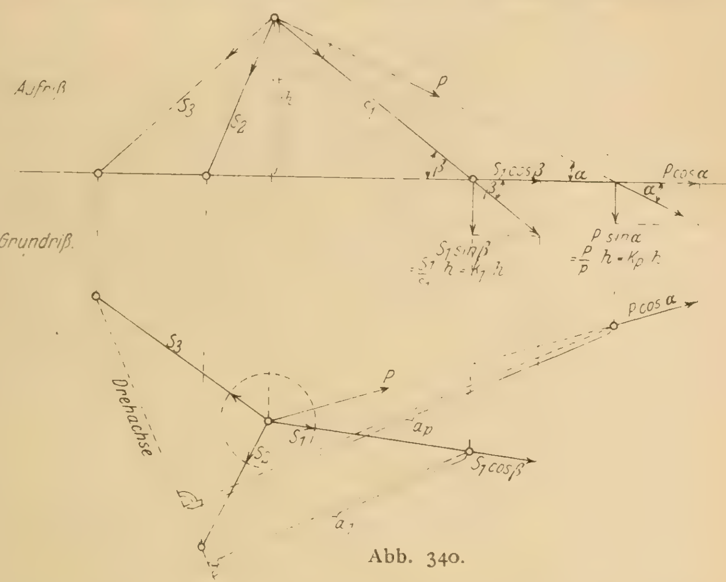


Abb. 340.

$$S_1\cdot\sin\beta\cdot a_1 + P\sin\alpha\cdot a_p = 0.$$

Bezeichnen wir die wahre Stablänge des Stabes S_1 mit s_1 und die wahre Länge der in der Richtung der Kraft P gemessenen Strecke vom Angriffs- bis zum Spurpunkt mit p, so ist $\sin\alpha = \frac{h}{p}$ und $\sin\beta = \frac{h}{s_1}$, so daß $S_1\cdot\sin\beta = \frac{S_1\cdot h}{s_1} = \varkappa_1\cdot h$ und $P\cdot\sin\alpha = \frac{P\cdot h}{p} = \varkappa_p\cdot h$.

Die senkrecht zur Grundrißebene wirkenden Seitenkräfte sind also jedesmal $=\varkappa\cdot h$.

Setzen wir diese Werte in die Momentengleichung ein, so folgt die Gleichung

$$\varkappa_1\cdot h\cdot a_1 + \varkappa_p\cdot h\cdot a_p = 0,$$

woraus $\varkappa_1 = -\varkappa_p\cdot\frac{a_p}{a_1}$.

Da $\varkappa_1 = \frac{S_1}{s_1}$ und $\varkappa_p = \frac{P}{p}$, so wird

$$\boldsymbol{S_1 = -\frac{P}{p}\cdot\frac{a_p}{a_1}\cdot s_1} \quad \text{(Druck).}$$

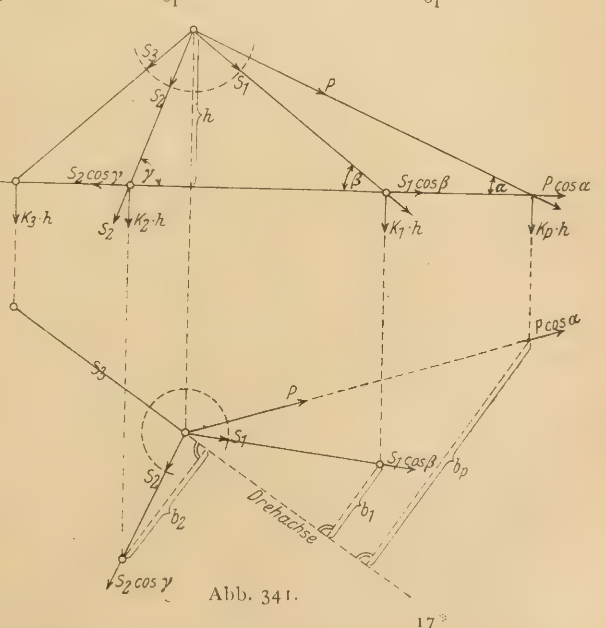


Abb. 341.

Zur Berechnung von S_2 benutzen wir sodann eine Momentengleichung für die durch den Spurpunkt von S_3 gehende, mit der Grundrißprojektion von S_3 zusammenfallende, also ebenfalls in der Grundrißebene liegende Achse (Abb. 341). Die gesuchte Kraft S_2 wird dabei vorläufig als Zugkraft eingeführt. Die Momentengleichung lautet sodann:

$$\varkappa_2 \cdot h \cdot b_2 - \varkappa_1 \cdot h \cdot b_1 - \varkappa_p \cdot h \cdot b_p = 0; \quad \varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 \cdot b_1 + \varkappa_p \cdot b_p}{b_2}.$$

Setzen wir dann wieder $\varkappa_2 = \frac{S_2}{s_2}$, $\varkappa_p = \frac{P}{p}$ und $\varkappa_1 = -\varkappa_p \cdot \frac{a_p}{a_1}$, so wird

$$\frac{S_2}{s_2} = \frac{-\varkappa_p \cdot \frac{a_p}{a_1} \cdot b_1 + \varkappa_p \cdot b_p}{b_2} = \frac{P}{p \cdot b_2}\left(b_p - \frac{a_p}{a_1} \cdot b_1\right),$$

woraus

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{P \cdot s_2}{p \cdot b_2}\left(b_p - \frac{a_p}{a_1} \cdot b_1\right).}$$

Wird $\frac{a_p}{a_1} \cdot b_1 > b_p$, so wird S_2 negativ, also eine Druckkraft. Wird dagegen $\frac{a_p}{a_1} \cdot b_1 < b_p$, so wird S_2 positiv, also eine Zugkraft.

Zur Berechnung von S_3 kann dann die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ benutzt werden. Es muß also sein

$$\varkappa_3 \cdot h + \varkappa_1 \cdot h + \varkappa_2 \cdot h + \varkappa_p \cdot h = 0.$$

$$\varkappa_3 = -(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_p)$$

$$= -\left[-\frac{P}{p} \cdot \frac{a_p}{a_1} + \frac{P}{p \cdot b_2}\left(b_p - \frac{a_p}{a_1} \cdot b_1\right) + \frac{P}{p}\right] = \frac{S_3}{s_3}.$$

Folglich

$$\boldsymbol{S_3 = -\frac{P}{p}\left[1 + \frac{b_p \cdot a_1 - a_p \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} - \frac{a_p}{a_1}\right] s_3.}$$

Wird der Klammerwert negativ, so wird S_3 positiv, also eine Zugkraft, wird er positiv, so wird S_3 negativ, also eine Druckkraft.

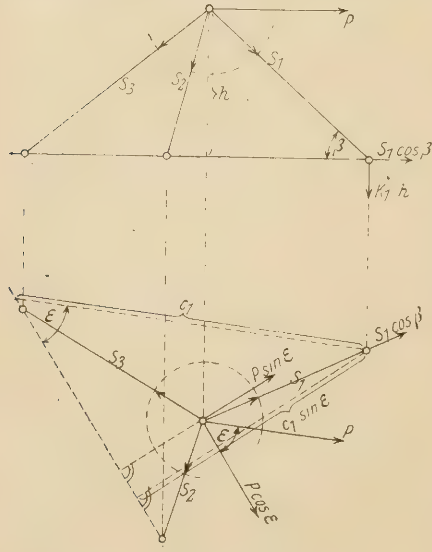


Abb. 342.

b) Die gegebene Kraft P sei parallel zur Grundrißebene gerichtet (Abb. 342).

Wir führen wieder einen Schnitt um den Knotenpunkt und bringen zum Ersatz die Stabkräfte S an. Die gesuchte Stabkraft S_1 wird vorläufig als Zugkraft eingeführt. Zur Berechnung von S_1 benutzen wir wieder eine Momentengleichung für die durch die Spurpunkte von S_2 und S_3 gelegte Drehachse. Dann fallen S_2 und S_3 aus der Momentengleichung heraus, da sie die Drehachse schneiden. S_1 wird wieder zerlegt nach $S_1 \cdot \cos\beta$ und $\varkappa_1 \cdot h$, so daß $S_1 \cdot \cos\beta$ die Drehachse schneidet. Die Kraft P zerlegen wir in eine parallel

zur Drehachse gerichtete Seitenkraft $P \cdot \cos \varepsilon$ und in $P \cdot \sin \varepsilon$ senkrecht zur Drehachse. Dann fällt auch $P \cdot \cos \varepsilon$ aus der Momentengleichung heraus als parallel zur Achse wirkende Kraft. Zeichnen wir dann durch den Spurpunkt von S_1 eine Parallele zu P und messen den Abstand c_1 des Spurpunktes von der Drehachse in der Richtung der Parallelen, so wird der Hebelarm der Seitenkraft $\varkappa_1 \cdot h$ in bezug auf die Drehachse $= c_1 \cdot \sin \varepsilon$. Da $P \cdot \sin \varepsilon$ im Abstande h von der Grundrißebene wirkt, so ist ihr Hebelarm für die in der Grundrißebene liegende Drehachse $= h$.

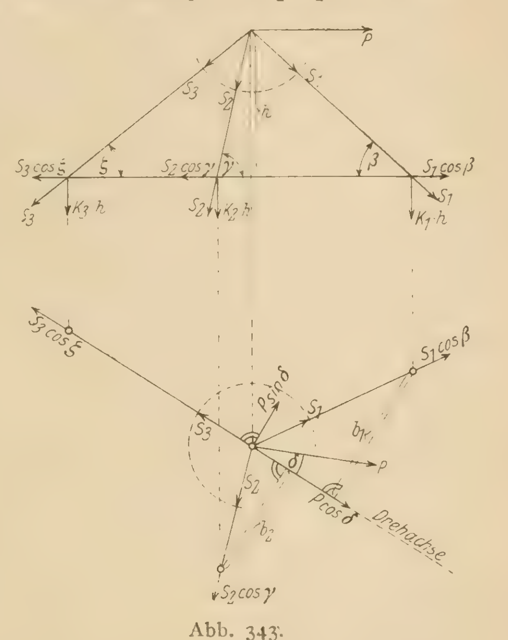


Abb. 343.

Die Momentengleichung lautet mithin:

$$\varkappa_1 \cdot h \cdot c_1 \cdot \sin \varepsilon + P \cdot \sin \varepsilon \cdot h = 0$$

$$\varkappa_1 = - \frac{P}{c_1}.$$

Mit $\varkappa_1 = \frac{S_1}{s_1}$ wird sodann

$$\frac{S_1}{s_1} = - \frac{P}{c_1}; \quad \boldsymbol{S_1 = - P \cdot \frac{s_1}{c_1}} \text{ (Druck).}$$

S_2 finden wir sodann mittels einer Momentengleichung für die durch den Spurpunkt von S_3 gehende, mit der Grundrißprojektion von S_3 zusammenfallende, also ebenfalls in der Grundrißebene liegende Achse (Abb. 343). Die Kraft P zerlegen wir vorher in eine in die Richtung der Drehachse fallende Seitenkraft $P \cdot \cos \delta$ und in $P \cdot \sin \delta$ senkrecht zur Drehachse.

Dann fällt $P \cdot \cos \delta$ aus der Momentengleichung heraus als parallel zur Momentenachse wirkende Kraft. $S_1 \cdot \cos \beta$ und $S_2 \cdot \cos \gamma$ fallen ebenfalls heraus, weil sie die Drehachse schneiden.

Somit lautet die Momentengleichung

$$\varkappa_2 \cdot h \cdot b_2 - \varkappa_1 \cdot h \cdot b_1 - P \cdot \sin \delta \cdot h = 0.$$

Mit $\varkappa_1 = - \frac{P}{c_1}$ wird sodann

$$\varkappa_2 = \frac{P \cdot \sin \delta + \varkappa_1 \cdot b_1}{b_2} = \frac{P \cdot \sin \delta - \frac{P}{c_1} \cdot b_1}{b_2}$$

$$= \frac{P}{c_1 \cdot b_2} (c_1 \cdot \sin \delta - b_1) = \frac{S_2}{s_2};$$

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{P \cdot s_2}{c_1 \cdot b_2} (c_1 \cdot \sin \delta - b_1).}$$

Wird $b_1 > c_1 \sin \delta$, so wird S_2 negativ, also eine Druckkraft, wird dagegen $b_1 < c_1 \sin \delta$, so wird S_2 positiv, also eine Zugkraft.

S_3 finden wir dann endlich mittels der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$. Es muß also sein

$$\varkappa_3 \cdot h + \varkappa_2 \cdot h + \varkappa_1 \cdot h = 0;$$

$$\varkappa_3 = -(\varkappa_1 + \varkappa_2) = -\left[-\frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_1 \cdot b_2}(c_1 \cdot \sin\delta - b_1)\right]$$

$$= -\frac{P}{c_1}\left[\frac{c_1 \cdot \sin\delta - b_1}{b_2} - 1\right] = \frac{S_3}{s_3};$$

$$\boldsymbol{S_3 = -\frac{P \cdot s_3}{c_1}\left(\frac{c_1 \cdot \sin\delta - b_1}{b_2} - 1\right).}$$

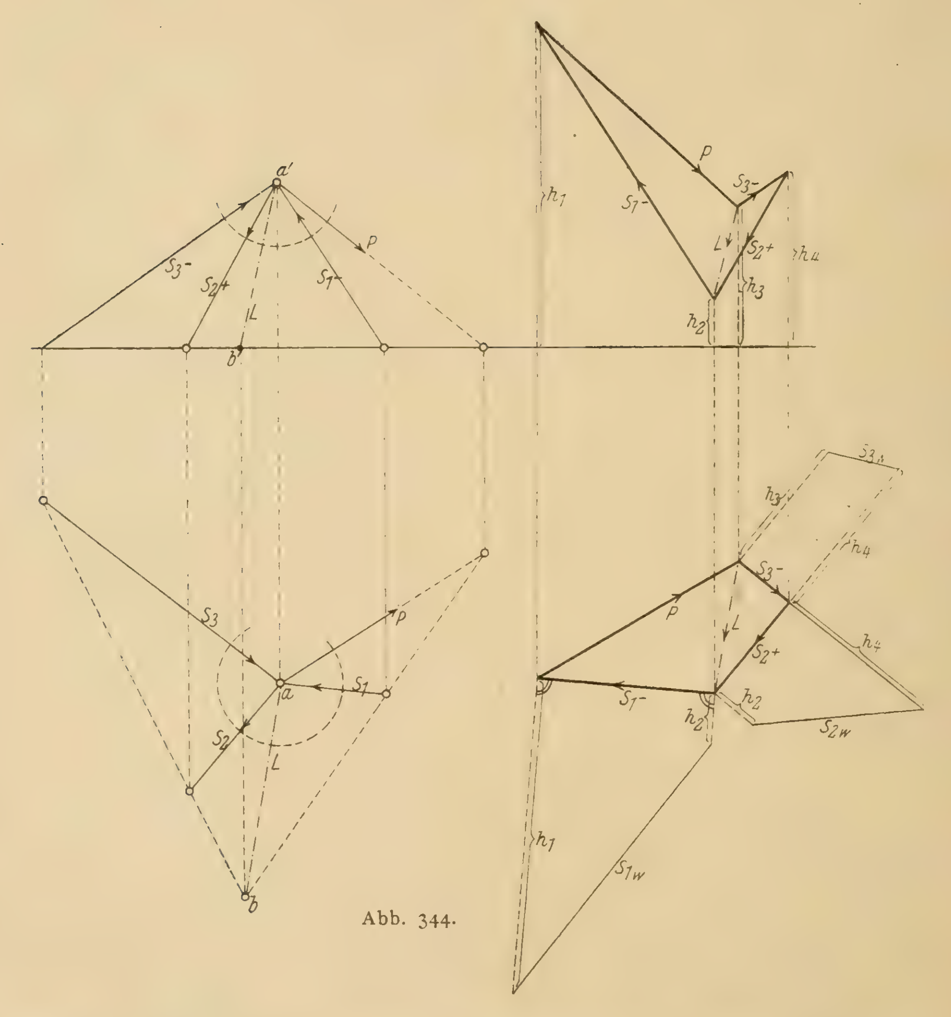


Abb. 344.

Wird $\frac{c_1 \cdot \sin\delta - b_1}{b_2} > 1$, so wird S_3 negativ, also eine Druckkraft, wird dagegen $\frac{c_1 \cdot \sin\delta - b_1}{b_2} < 1$, so wird S_3 positiv, also eine Zugkraft

B. Zeichnerisches Verfahren.

1. Allgemeine Lösung (Abb. 344).

Wir legen eine Ebene durch die gegebene Kraft P und irgend eine der Stabkräfte, z. B. S_1, und eine zweite Ebene durch die beiden übrigbleibenden Stabkräfte S_2 und S_3. Alsdann bestimmen wir die Schnittgerade L beider Ebenen. Die durch P und S_1 gelegte Ebene geht sowohl durch den Schnittpunkt von P und S_1 als auch durch deren Spurpunkte. Das gleiche gilt von der durch S_2 und S_3 gelegten Ebene. Bringen wir daher die Spurgeraden beider Ebenen zum Schnitt in b, so ist $a—b$ die Schnittgerade L der beiden Ebenen im Grundriß. Im Aufriß erscheint L als die Strecke $\overline{a'—b'}$.

Zunächst zerlegen wir sodann im Grundriß in der durch P und S_1 gelegten Ebene die Kraft P nach S_1 und L und führen dann dieselbe Konstruktion auch im Aufriß durch. Da die Kraft L aber auch in der durch S_2 und S_3 gelegten Ebene wirkt — die Schnittgerade L liegt ja in beiden Ebenen —, können wir nunmehr L (wiederum zunächst im Grundriß) nach S_2 und S_3 zerlegen, worauf im Aufriß dieselbe Konstruktion durchgeführt wird. Da die vier Kräfte miteinander im Gleichgewicht sind, muß ihr Umfahrungssinn ein stetiger sein. Überträgt man dann die Pfeile aus dem Kräftepolygon auf den abgetrennten Knotenpunkt, so erkennt man, daß S_1 und S_3 Druckkräfte, S_2 eine Zugkraft ist.

Abb. 345.

Nunmehr sind noch die wahren Größen der Kräfte zu bestimmen. Wir finden sie nach den Regeln der darstellenden Geometrie durch Umklappen der Aufrißprojektionen in die Grundrißebene. Um z. B. die wahre Größe von S_1 (S_{1w}) zu bestimmen, tragen wir in den Endpunkten der Grundrißprojektion von S_1 die Aufrißordinaten h_1 und h_2 lotrecht zu S_1 an und verbinden ihre Endpunkte miteinander. Die Verbindungslinie stellt dann die wahre Größe von S_1 dar. Entsprechend verfahren wir mit den Kräften S_2 und S_3.

2. Vereinfachung der Konstruktion.

Wir wählen die Aufrißebene derart, daß sich zwei Stäbe, z. B. S_2 und S_3, im Aufriß decken (Abb. 345). Zunächst zerlegen wir dann im Aufriß P nach

S_1 und nach Richtung einer Seitenkraft L, welche in die durch S_2 und S_3 gelegte Ebene fällt. Dann ist auch das zugehörige Kräftedreieck im Grundriß bestimmt. Wir ziehen durch den Anfangspunkt von P eine Parallele zu S_1 und projizieren die Aufrißprojektion von S_1 in den Grundriß, womit auch die Grundrißprojektion von L gegeben ist. Da nun L die Seitenkraft von P ist, welche in der durch S_2 und S_3 gelegten Ebene wirkt, so findet man S_2 und S_3 durch Zerlegung von L nach den Richtungen von S_2 und S_3. Diese Zerlegung kann nur im Grundriß ausgeführt werden, da sich im Aufriß S_2 und S_3 decken. Nach Bestimmung der Grundrißprojektionen von S_2 und S_3 sind aber auch deren Aufrißprojektionen durch Heraufprojizieren der Grundrißprojektionen in den Aufriß bestimmt. Die wahren Größen der Kräfte werden dann wieder wie unter 1 gefunden.

3. **Bestimmung der Stabkräfte für den Fall, daß zwei Stäbe in einer zur Grundrißebene parallelen Ebene liegen** (Abb. 346).

Es empfiehlt sich, die Grundriß- und Aufrißebene so zu legen, daß der Stab S_1 im Aufriß in wahrer Größe erscheint. Wir zerlegen zunächst die gegebene Kraft P in ihrer Vertikalebene in eine parallel zur Grundrißebene gerichtete Seitenkraft P_h und in P_v senkrecht zur Grundrißebene und untersuchen die Einflüsse dieser beiden Kräfte getrennt voneinander.

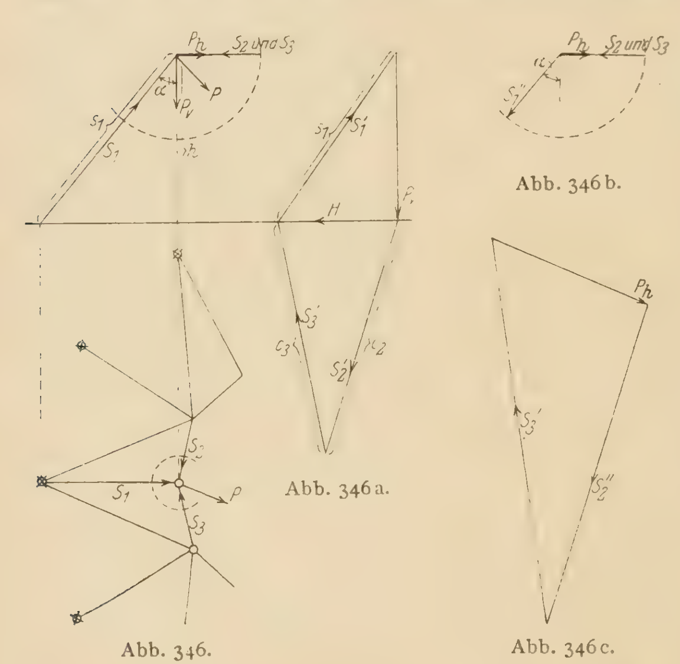


Abb. 346. Abb. 346a. Abb. 346b. Abb. 346c.

a) Auf den Knotenpunkt wirke nur die senkrechte Kraft P_v, P_h wird also $= 0$ angenommen.

Den Kräftemaßstab wollen wir bei der zeichnerischen Bestimmung der Stabkräfte derart wählen, daß P_v gleich der Höhe h des Knotenpunktes über der Grundrißebene wird. Da also h Meter P_v Tonnen bedeuten, so stellt eine Strecke von 1 m (im Maßstabe der Zeichnung gemessen) $\frac{P_v}{h}$ Tonnen dar. Alsdann zerlegen wir P_v in eine Seitenkraft H, welche in die durch S_2 und S_3 gelegte, also parallel zur Grundrißebene liegende Ebene fällt, und in die Seitenkraft S_1' parallel zu S_1, worauf H im Grundriß nach den Richtungen von S_2 und S_3 in die Seitenkräfte S_2' und S_3' zu zerlegen ist. Die Kräfte S_1', S_2' und S_3'

sind nach Abb. 346a durch die Längen s_1, c_2 und c_3 dargestellt. Da nun der Kräftemaßstab derart gewählt ist, daß eine Strecke von 1 m eine Kraft von $\frac{P_v}{h}$ Tonnen bedeutet, so stellen s_1 Meter eine Kraft von $\frac{P_v}{h} \cdot s_1$ Tonnen dar. Demgemäß wird $S_1' = -\frac{P_v}{h} \cdot s_1$ und entsprechend $S_2' = -\frac{P_v}{h} \cdot c_2$ und $S_3' = -\frac{P_v}{h} \cdot c_3$. Daß die Kräfte Druckkräfte sein müssen, erkennt man sofort, wenn man die aus dem Kräftepolygon (Abb. 346a) gefundenen Pfeile an dem abgetrennten Knoten anbringt und berücksichtigt, daß auf den Knoten zu wirkende Kräfte Druckkräfte sind.

b) Auf den Knotenpunkt wirke nur die wagerechte Kraft P_h, P_v wird also $= 0$ angenommen.

Setzen wir an dem abgetrennten Knoten (Abb. 346b) die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an, so erhalten wir die Gleichung $S_1'' \cdot \cos \alpha = 0$. Da α ein spitzer Winkel ist, $\cos \alpha$ also nicht $= 0$ sein kann, so muß $S_1'' = 0$ sein. Die Kräfte S_2'' und S_3'' findet man sodann durch die im Grundriß vorzunehmende Zerlegung von P_h nach den Richtungen von S_2 und S_3 (Abb. 346c). Sie ergeben sich ebenfalls als Druckkräfte. Der Kräftemaßstab ist hier beliebig gewählt.

Lassen wir nunmehr die Zustände a und b gleichzeitig wirken, so erhalten wir den wirklichen Kräftezustand, und nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen wird

$$S_1 = S_1' + S_1'' = S_1' + 0 = S_1'; \quad S_2 = S_2' + S_2''; \quad S_3 = S_3' + S_3''.$$

Ist der Knotenpunkt nur durch eine senkrecht gerichtete Kraft P belastet, ein Fall, der bei der Berechnung von Kuppeln oft vorkommt, so ist natürlich nur die unter a besprochene Kräftezerlegung vorzunehmen.

4. Gesucht seien die Spannkräfte S_1, S_2, S_3, S_4 und S_5 der in Abb. 347 dargestellten Kuppel, in deren Knotenpunkten senkrechte Kräfte P angreifen.

Die Knotenpunkte der Kuppel sind sämtlich dreistäbig festgelegt, und zwar wurden zunächst die Punkte c, d, e, g an die festen Auflagerpunkte f und dann die Punkte a, b, h und i angeschlossen. Die Kuppel ist daher statisch bestimmt und starr.

Zunächst bestimmen wir nun an den Knoten a und b nach dem unter 3, a beschriebenen Verfahren die Spannkräfte S_1 und S_2. Alsdann zeichnen wir im Grundriß die Mittelkraft von S_1 und S_2 und bestimmen die zugehörigen Aufrißprojektionen, die mit der gegebenen Kraft P_c ebenfalls zu einer Mittelkraft vereinigt werden. Die Wirkungslinien der Mittelkräfte sind in Abb. 347a im Interesse der Übersichtlichkeit des Kräfteplanes fortgelassen.

Nunmehr benutzen wir das unter B, 2 beschriebene Verfahren. Wir zerlegen zunächst im Aufriß die Mittelkraft von S_1, S_2 und P_c nach S_3 und nach Richtung einer Seitenkraft L, welche in die durch S_4 und S_5 gelegte Ebene fällt. Alsdann bestimmen wir die Grundrißprojektionen von S_3 und L, zeichnen

also durch den einen Endpunkt der Mittelkraft von S_1, S_2 und P_c im Grundriß eine Parallele zu S_3 und projizieren die Aufrißprojektion von S_3 in den Grundriß, womit auch L bestimmt ist. Darauf wird L als in der Ebene von S_4 und S_5 wirkende Kraft im Grundriß nach S_4 und S_5 zerlegt, worauf auch die Aufriß-

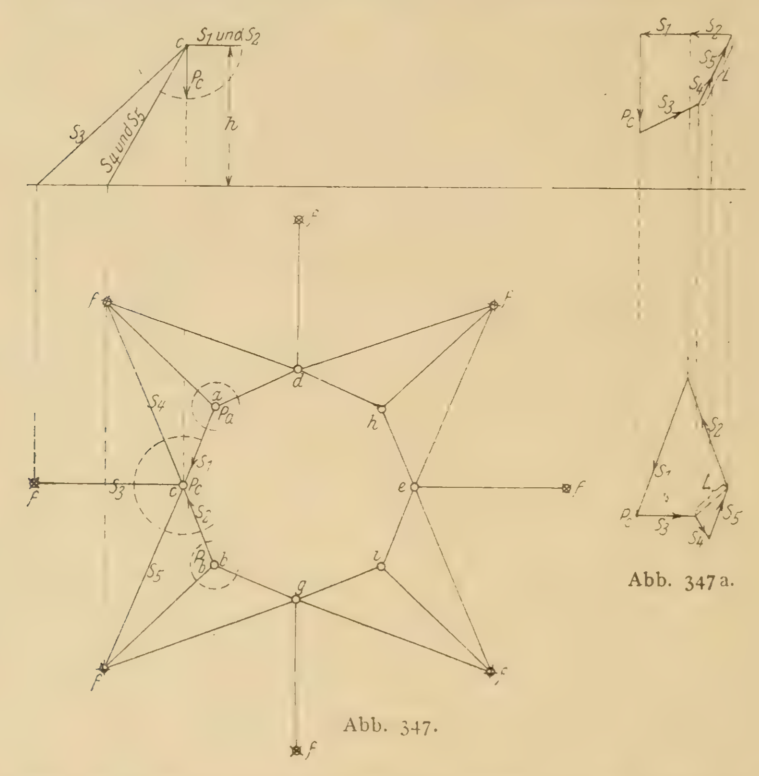


Abb. 347 a.

Abb. 347.

projektionen von S_4 und S_5 durch Hinaufprojizieren in den Aufriß bestimmt sind. Die wahren Größen von S_3, S_4 und S_5 werden dann nach B, 1 gefunden.

5. Die abgestumpfte Fachwerkpyramide (Abb. 348).

Die nachfolgenden Untersuchungen gelten nicht nur für die eigentliche abgestumpfte Pyramide, sondern auch für den allgemeinen Fall, daß sich die Rippen nicht in einem Punkte schneiden. Sie sind nur an die Voraussetzung gebunden, daß die Seitenflächen des Raumfachwerks aus statisch bestimmten ebenen Fachwerkscheiben bestehen, deren Fußpunkte fest gelagert sind.

In einem Knotenpunkte m greife eine beliebig gerichtete äußere Kraft P_m an. Gesucht ist die Spannkraft S in einem Rippenstabe.

Wir zerlegen zunächst nach dem auf Seite 264 unter B, 3 beschriebenen Verfahren die Kraft P_m in die drei Seitenkräfte P_s, P_l und P_r, von denen P_l nach links in die Fachwerkscheibe I, P_r nach rechts in die Fachwerkscheibe II und P_s in die Rippe fällt und lösen dann diesen Zustand in drei Einzelzustände auf.

Zustand I. Es wirke nur P_l. P_r und P_s seien $= 0$ angenommen. Da P_l in der Ebene I wirkt, so kann die Scheibe I als ebene, in ihren Fußpunkten ein-

gespannte, im Punkte m mit P_l beanspruchte Fachwerkscheibe angesehen werden (Abb. 348a). Zur Berechnung von S_{I} führen wir dann den Ritterschen Schnitt, untersuchen den Gleichgewichtszustand des oberen abgetrennten Teils und setzen eine Momentengleichung für den Punkt l an:

$$S_{\mathrm{I}} \cdot c_l - P_l \cdot h_l = 0; \quad S_{\mathrm{I}} = + P_l \cdot \frac{h_l}{c_l}.$$

Zustand II. Es wirke nur P_r. P_l und P_s seien $= 0$ angenommen. Da P_r in der Ebene II wirkt, kann die Scheibe II als ebene, in ihren Fußpunkten eingespannte, im Punkte m mit P_r beanspruchte Fachwerkscheibe angesehen werden (Abb. 348b). Zur Berechnung von S_{II} führen wir dann wieder den

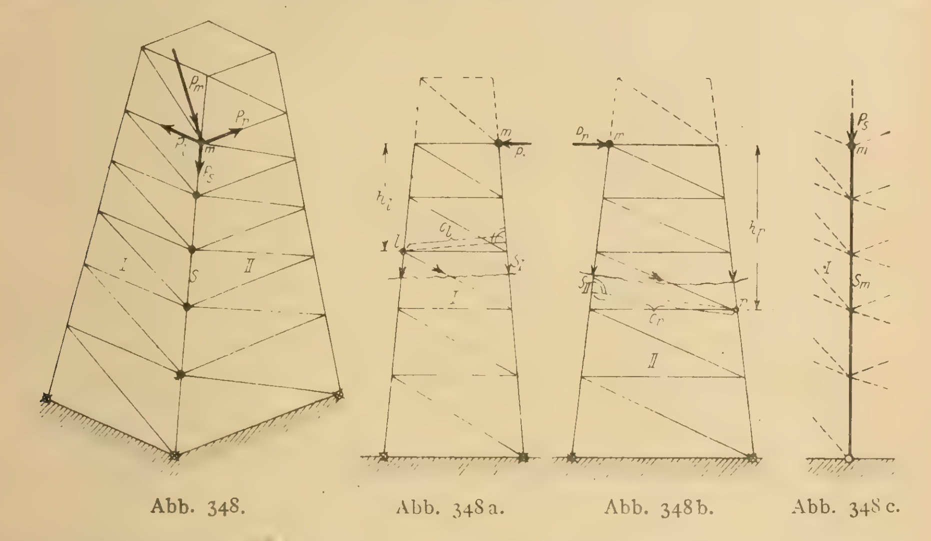


Abb. 348. Abb. 348a. Abb. 348b. Abb. 348c.

Ritterschen Schnitt und benutzen am oberen abgetrennten Teil eine Momentengleichung für den Punkt r:

$$S_{\mathrm{II}} \cdot c_r - P_r \cdot h_r = 0$$

$$S_{\mathrm{II}} = + \frac{P_r \cdot h_r}{c_r}.$$

Zustand III. Es wirke nur P_s. P_l und P_r seien $= 0$ angenommen. Sind P_l und P_r aber $= 0$, so sind die Scheiben I und II unbelastet. Sämtliche Stäbe der beiden Scheiben, mit Ausnahme des Rippenstabes, auf welchen P_s wirkt (Abb. 348c), werden infolgedessen spannungslos. In der Rippe herrscht daher unterhalb P_s überall die Spannkraft $- P_s$, also auch in dem zu berechnenden Stabe.

Nunmehr nehmen wir an, die drei Zustände wirken gleichzeitig, wodurch der wirkliche Zustand entsteht. Dann ist nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen die Gesamtspannkraft in dem Stabe S gleich der Summe der Einzelspannkräfte. Es wird daher

$$S = S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}} + S_{\mathrm{III}} = P_l \cdot \frac{h_l}{c_l} + P_r \cdot \frac{h_r}{c_r} - P_s.$$

Die Spannkräfte in den Füllungsstäben der Scheibe I erhalten wir am schnellsten mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplans, wobei der Zustand I (Abb. 348a) der maßgebende Belastungszustand ist. Denn die Füllungsstäbe

gehören lediglich der Scheibe I an und nicht, wie die Rippenstäbe, zwei Scheiben gleichzeitig. Ebenso sind die Spannkräfte in den Füllungsstäben der Scheibe II für den in Abb. 348b dargestellten Belastungszustand (Zustand II) mit Hilfe eines Cremonaplans zu ermitteln.

6. In ähnlicher Weise kann auch der in Abb. 349 dargestellte eingeschossige Pfeiler, in dessen Knotenpunkten A, B, C und D senkrechte Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 wirken, untersucht werden.

Wir zerlegen zunächst in jedem Knotenpunkt die dort wirkende Kraft P nach den Richtungen der beiden Ringstäbe und des Rippenstabes und fassen dann die vier Wände der Kuppel einzeln als ebene, in ihren Fußpunkten eingespannte Fachwerkscheiben auf, die mit den in die betreffenden Ebenen entfallenden Seitenkräften der Kräfte P belastet sind. Darauf werden in den einzelnen Fachwerkscheiben die Spannkräfte in den Diagonalen berechnet. Diese sind nur abhängig von den Kräften, die in der Ebene der betreffenden Fachwerkscheibe in der Richtung der Ringstäbe wirken. Nach Berechnung der Diagonalspannkräfte können dann die Spannkräfte in den Rippenstäben durch Anwendung der in jedem Ringknotenpunkt anzusetzenden Gleichgewichtsbedingung „$\Sigma V = 0$“ gefunden werden.

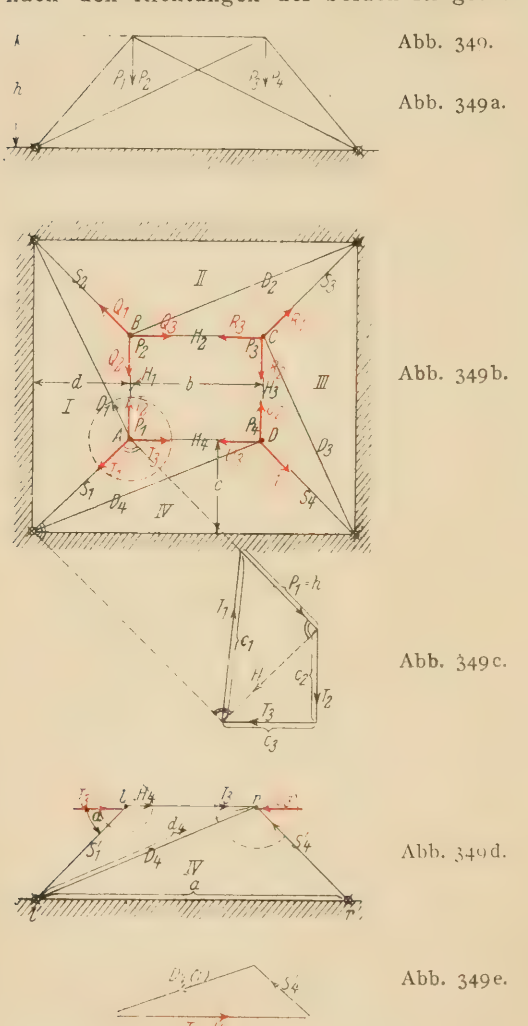


Abb. 349.

Abb. 349a.

Abb. 349b.

Abb. 349c.

Abb. 349d.

Abb. 349e.

Für die Zerlegung der Kräfte P nach den Richtungen der beiden Ringstäbe und des Rippenstabes wähle man zweckmäßig die Aufrißebene so, daß der Rippenstab in wahrer Größe erscheint, und führe dann die Zerlegung nach dem unter B, 3 unter Zustand a (Seite 264) angegebenen Verfahren durch. In Abb. 349c ist auf diese Weise die Zerlegung der Kraft P_1 nach den Richtungen T_1, T_2 und T_3 durchgeführt. Da die Kraft P_1 in dem Maßstabe $P_1 = h$ dargestellt wurde, so wird

$$T_1 = \frac{P_1}{h} \cdot c_1, \quad T_2 = \frac{P_1}{h} \cdot c_2 \text{ und } T_3 = \frac{P_1}{h} \cdot c_3.$$

In derselben Weise werden die Kräfte P_2, P_3 und P_4 zerlegt.

In der Ebene der Scheibe IV wirken dann die Kräfte T_3 und U_3, die allein Einfluß auf die Spannkraft D_4 haben; T_1 und U_1 sind ohne Einfluß auf D_4. Wir legen die Scheibe in die Bildebene und fassen sie als in den Punkten l' und r' eingespannte ebene Fachwerkscheibe auf (Abb. 349d). Benutzt man dann für den abgetrennten Knotenpunkt die Bedingung $\Sigma V = 0$, so erhält man $S_1' \cdot \sin \alpha = 0$, so daß $S_1' = 0$. Die Bedingung $\Sigma H = 0$ liefert sodann die Gleichung

$$T_3 + H_4 = 0, \text{ so daß } H_4 = -T_3 \text{ (Druck)}.$$

Jetzt trennen wir den Knotenpunkt r ab. Auf diesen Knotenpunkt wirkt sodann die Druckkraft $H_4 = T_3$ (das negative Vorzeichen ist durch den auf den Knotenpunkt zulaufenden Pfeil berücksichtigt) und die Kraft U_3. Es sei angenommen, daß T_3 sich größer als U_3 ergeben habe. Alsdann ist die Mittelkraft von T_3 und U_3 nach rechts gerichtet und gleich $T_3 - U_3$. Diese Kraft wird dann nach den Richtungen von D_4 und S_4' zerlegt (Abb. 349e). Das Kräftedreieck ist dem Dreieck $l' r r'$ ähnlich, so daß die Proportion $\frac{T_3 - U_3}{D_4} = \frac{a}{d_4}$ besteht, woraus $D_4 = (T_3 - U_3)\frac{d_4}{a}$.

In derselben Weise werden zunächst noch die Spannkräfte D_1, D_2 und D_3 ermittelt. An dem abgetrennten Knotenpunkt A (Abb. 349b) erhält man dann mit Hilfe der Bedingung „$\Sigma V = 0$" die Gleichung

$$\frac{S_1}{s_1} \cdot h + \frac{D_1}{d_1} \cdot h + P = 0, \text{ woraus } S_1 = -\frac{s_1}{h}\left(\frac{D_1}{d_1} \cdot h + P\right).$$

In derselben Weise findet man dann an den Knotenpunkten B, C und D die Spannkräfte S_2, S_3 und S_4.

Für die Ringstäbe erhält man die Spannkräfte $H_1 = -Q_2$, $H_2 = -R_3$, $H_3 = -U_2$ und $H_4 = -T_3$.

3. Das Ersatzstabverfahren von Müller-Breslau.

Das Verfahren kommt dort zur Anwendung, wo der dreistäbige Anschluß der Knotenpunkte von gegebenen festen Auflagerpunkten aus nicht möglich ist. Für den dreistäbigen Anschluß sind dann zunächst nicht zum System gehörige Hilfsstäbe (sog. Y-Stäbe) erforderlich, die später, wenn sämtliche Knotenpunkte dreistäbig angeschlossen sind, wieder beseitigt und durch an anderen, geeigneten Stellen angebrachte Stäbe (sog. Z-Stäbe) ersetzt werden. Diese Ersatzstäbe dürfen aber nur so angebracht werden, daß das Abzählungskriterium $s + b + 2b' + 3f = 3k$, welches infolge des mit Hilfe der Y-Stäbe erreichten dreistäbigen Anschlusses erfüllt war, auch noch nach deren Beseitigung erfüllt bleibt. Es dürfen daher durch den Einbau der Z-Stäbe keine neuen Knotenpunkte entstehen.

Das Verfahren möge an einigen Beispielen erläutert werden.

A. Die Schwedlersche Halbkuppel (Abb. 350).

Die Reihenfolge des dreistäbigen Anschlusses der Knotenpunkte ist in Abb. 350 durch an die Stäbe gesetzte Ziffern angedeutet worden. So wurde zunächst der Knotenpunkt a durch die Stäbe 1 und 2 sowie durch die Säule 3

(Abb. 350a) an die festen Auflagerpunkte f angeschlossen, ebenso a' durch 1', 2' und 3'. Für den Anschluß des Knotens b stehen aber nur zwei Stäbe, nämlich 4 und die Säule 5, zur Verfügung, so daß zwecks dreistäbigen Anschlusses noch ein Hilfsstab, Y_1, herangezogen werden muß. Desgleichen wird b' durch 4', die Säule 5' und den Hilfsstab Y_2 angeschlossen. Nunmehr kann c durch 6, 7 und 8 sowie c' durch 6', 7' und 8' angeschlossen werden. Zum Anschluß von d stehen wieder nur 9 und die Säule 10 zur Verfügung, so daß wieder ein Hilfsstab, Y_3, benutzt werden muß. Das gleiche gilt für den Knotenpunkt d', der mittels 9', 10' und Y_4 angeschlossen wird. Dann können e durch 11, 12 und 13, e' durch 11', 12' und 13', g durch 14, 14' und die Säule 15, h durch 16, 17 und 18, h' durch 16', 17' und 18' und endlich i durch 19, 20 und 20' angeschlossen werden.

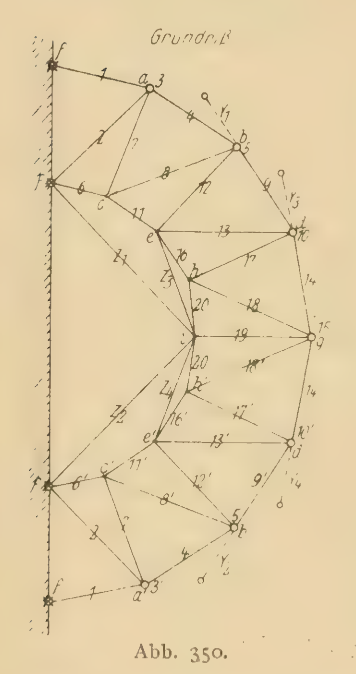


Abb. 350.

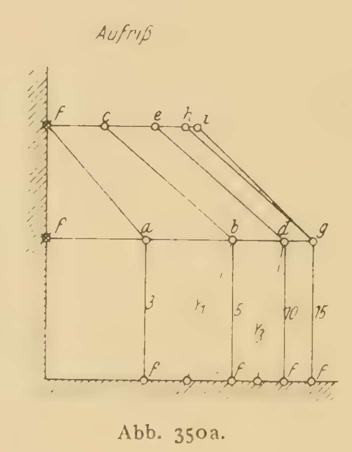


Abb. 350a.

Die Richtung der Y-Stäbe ist im allgemeinen beliebig. Nur dürfen sie nicht mit den Stäben, mit denen zusammen sie einen Knotenpunkt anschließen, in einer Ebene liegen, da dann der Knotenpunkt nicht festliegt, sondern beiderseits der Ebene verschoben werden kann. So darf z. B. der Stab Y_1 nicht in die Richtung des Stabes 4 fallen, da dann die den Punkt b anschließenden Stäbe 4, Y_1 und 5 in einer Ebene liegen würden. Jedoch ist es zweckmäßig, die Richtungen der Y-Stäbe mit den Richtungen bereits vorhandener anderer Stäbe zusammenfallen zu lassen, damit man keine neuen Winkel in die Rechnung einzuführen braucht. So sind hier die Stäbe Y_1, Y_2, Y_3 und Y_4 in die Richtungen der Stäbe 9, 9', 14 und 14' gelegt.

Das so entstandene System — wir wollen es in unseren nachfolgenden Untersuchungen kurz das Y-System nennen — ist nunmehr statisch bestimmt und starr, da sämtliche Knotenpunkte dreistäbig angeschlossen sind.

Die vier Y-Stäbe werden nun nachträglich wieder beseitigt und durch die Stäbe Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 ersetzt, die an geeigneter Stelle so anzubringen sind, daß keine neuen Knotenpunkte entstehen. Da an der Stabzahl des Fachwerks nichts geändert ist, liegt nach wie vor ein statisch bestimmtes, starres System vor, vorausgesetzt, daß die Nennerdeterminante der $3k$ Gleichgewichtsbedingungen, die an den k Knotenpunkten des Fachwerks aufgestellt werden können, nicht $= 0$ wird.

Gang der Berechnung.

Da nach Fortfall der Y-Stäbe und deren Ersatz durch die Z-Stäbe an allen Knotenpunkten mehr als drei Stäbe zusammentreffen, ist es nicht mehr möglich, die Stabspannkräfte wie bisher durch Zerlegung der in den Knotenpunkten wirkenden äußeren Kräfte nach drei Richtungen zu bestimmen.

Wir zerlegen daher den wirklichen Kräftezustand in fünf Einzelzustände:

Zustand I. Es mögen nur die in den Knotenpunkten angreifenden beliebig gerichteten äußeren Kräfte P auf das Y-System wirken (Abb. 351). Für diesen Zustand lassen sich sämtliche Stabspannkräfte unmittelbar mit Hilfe der unter 2, A und B entwickelten Verfahren, also durch Zerlegung einer gegebenen Kraft nach drei Richtungen ermitteln, wobei man an dem zuletzt angeschlossenen Knotenpunkt i beginnt und in der umgekehrten Reihenfolge des dreistäbigen Anschlusses fortfährt. So sind am Knoten i die dort wirkenden Spannkräfte S_1^o, S_2^o und S_3^o durch Zerlegung von P_i nach den Richtungen dieser drei Kräfte bestimmt. Am Knoten h sind dann S_2^o und P_h gegeben, deren Mittelkraft nach S_4^o, S_5^o und S_6^o zerlegt wird, usw. Für die Y-Stäbe mögen auf diese Weise die Spannkräfte Y_1^o, Y_2^o, Y_3^o und Y_4^o gefunden sein.

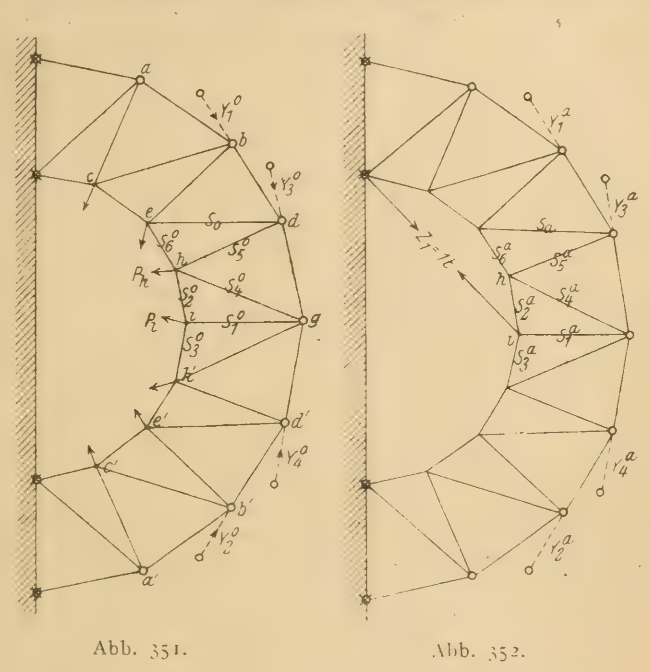


Abb. 351. Abb. 352.

Zustand II. Auf das Y-System wirke als äußere Kraft nur die Kraft Z_1. Bezeichnet man die Spannkräfte infolge des Zustandes $Z_1 = \mathbf{1\,t}$ (Abb. 352) mit S_a bezw. Y_a, die ebenfalls mit Hilfe der Aufgabe, eine Kraft nach drei Richtungen zu zerlegen, gefunden werden können, wenn man an dem zuletzt angeschlossenen Knotenpunkt i beginnt und in der umgekehrten Reihenfolge des dreistäbigen Anschlusses fortfährt, so erhält man infolge Z_1 t die Spannkräfte $Z_1 \cdot S_a$ und für die Y-Stäbe die Spannkräfte $Z_1 \cdot Y_1^a$, $Z_1 \cdot Y_2^a$, $Z_1 \cdot Y_3^a$ und $Z_1 \cdot Y_4^a$.

Zustand III. Auf das Y-System wirke nur die Kraft Z_2. Die Spannkräfte infolge des Zustandes $Z_2 = 1$ t (Abb 353) seien $= S_b$. Sie können wieder wie vor bestimmt werden. In den Y-Stäben entstehen die Spannkräfte Y_1^b, Y_2^b, Y_3^b und Y_4^b. Infolge Z_2 t sind diese Spannkräfte Z_2 mal so groß. In irgend einem Fachwerkstabe erhalten wir daher die Spannkraft $Z_2 \cdot S_b$, in den Y-Stäben die Spannkräfte $Z_2 \cdot Y_1^b$, $Z_2 \cdot Y_2^b$, $Z_2 \cdot Y_3^b$ und $Z_2 \cdot Y_1^b$.

Zustand IV. Auf das Y-System wirke nur die Kraft Z_3 als äußere Kraft. Infolge $Z_3 = 1$ t (Abb. 354) entstehe in irgend einem Stabe die Spannkraft S_c, in den Y-Stäben Y_1^c, Y_2^c, Y_3^c und Y_4^c. Infolge Z_3 t sind diese Spannkräfte daher Z_3 mal so groß, d. h. $Z_3 \cdot S_c$ bezw. $Z_3 \cdot Y_1^c$, $Z_3 \cdot Y_2^c$, $Z_3 \cdot Y_3^c$ und $Z_3 \cdot Y_4^c$.

Zustand V. Auf das Y-System wirke nur die Kraft Z_4 als äußere Kraft. Ist die Spannkraft in irgend einem Fachwerkstabe infolge $Z_4 = 1$ t (Abb. 355) $= S_d$, so wird sie infolge Z_4 t Z_4 mal so groß, also $Z_4 \cdot S_d$. In den Y-Stäben entstehen die Spannkräfte $Z_4 \cdot Y_1^d$, $Z_4 \cdot Y_2^d$, $Z_4 \cdot Y_3^d$ und $Z_4 \cdot Y_4^d$.

Der wirkliche Zustand entsteht nun, wenn wir die Zustände I bis V addieren und gleichzeitig die Spannkräfte $Y = 0$ setzen. (In dem wirklichen

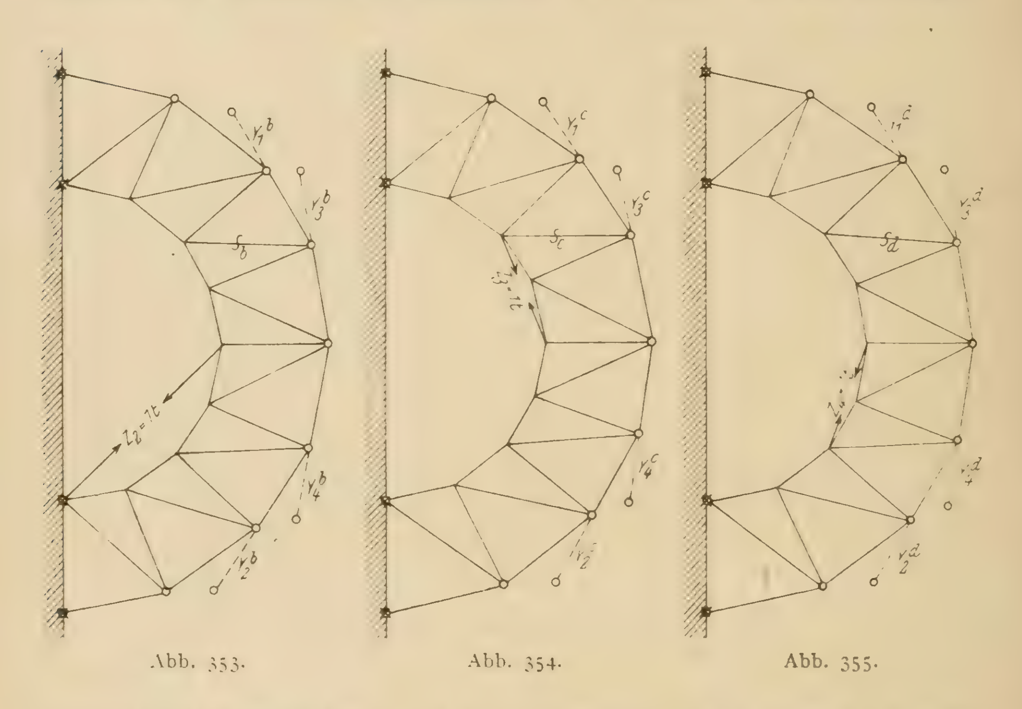


Abb. 353. Abb. 354. Abb. 355.

Zustand sind ja die Y-Stäbe nicht mehr vorhanden, da sie durch die Z-Stäbe ersetzt sind.)

Nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen erhält man dann für irgend eine Stabspannkraft die Formel

$$S = S_o + Z_1 \cdot S_a + Z_2 \cdot S_b + Z_3 \cdot S_c + Z_4 \cdot S_d.$$

Sinngemäß schreiben wir die Formeln für die Y-Spannkräfte an und setzen diese dann $= 0$. Demgemäß muß sein

$$Y_1 = Y_1^o + Z_1 \cdot Y_1^a + Z_2 \cdot Y_1^b + Z_3 \cdot Y_1^c + Z_4 \cdot Y_1^d = 0.$$
$$Y_2 = Y_2^o + Z_1 \cdot Y_2^a + Z_2 \cdot Y_2^b + Z_3 \cdot Y_2^c + Z_4 \cdot Y_2^d = 0.$$
$$Y_3 = Y_3^o + Z_1 \cdot Y_3^a + Z_2 \cdot Y_3^b + Z_3 \cdot Y_3^c + Z_4 \cdot Y_3^d = 0.$$
$$Y_4 = Y_4^o + Z_1 \cdot Y_4^a + Z_2 \cdot Y_4^b + Z_3 \cdot Y_4^c + Z_4 \cdot Y_4^d = 0.$$

In diesen Gleichungen sind als Unbekannte nur Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 enthalten, womit diese eindeutig bestimmt sind. Nunmehr können die übrigen Stabkräfte mit Hilfe der Formel

$$S = S_o + Z_1 \cdot S_a + Z_2 \cdot S_b + Z_3 \cdot S_c + Z_4 \cdot S_d$$

ermittelt werden.

B. Die Sternkuppel (Abb. 356).

Der wagerechte Ring *abcde* sei ein regelmäßiges Polygon, die Dreiecke *abf*, *bcf*, *cdf*, *def* und *eaf* gleichseitige Dreiecke. Um zunächst einen Knotenpunkt dreistäbig anschließen zu können, ist ein Y-Stab notwendig. So wurde der Punkt *a* an zwei feste Punkte *f* und an den beliebig außerhalb des Fachwerks liegenden Punkt *m* durch die Stäbe 1, 2 und Y angeschlossen. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß *m* in der Ebene der Punkte *f* liegt. Darauf folgte *b* durch die Stäbe 3, 4 und 5, *c* durch 6, 7 und 8, *d* durch 9, 10 und 11 und *e* durch 12, 13 und 14. Nach Beseitigung des Y-Stabes wurde sodann zwischen *a* und *e* ein Z-Stab eingezogen. Die Kuppel ist also statisch bestimmt und starr, allerdings unter einer gewissen Bedingung, wie weiter unten gezeigt werden wird.

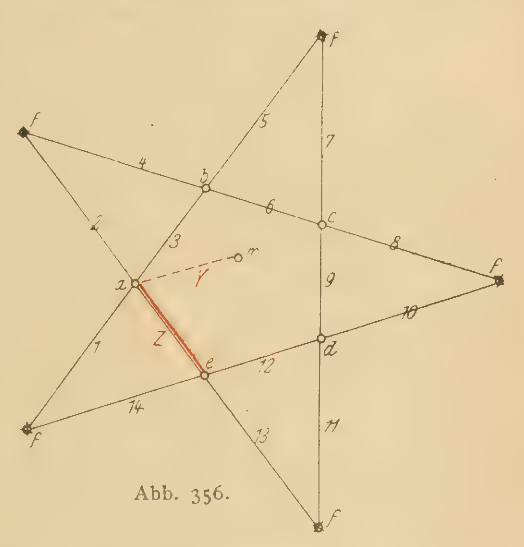


Abb. 356.

Zur Berechnung der Stabkräfte wenden wir das unter I beschriebene Ersatzstabverfahren an. Die Spannkraft in irgend einem Fachwerkstabe läßt sich demgemäß auf die Form

$$S = S_o + Z \cdot S_a$$

bringen. Entsprechend findet man

$$Y = Y_o + Z \cdot Y_a.$$

Da nun $Y = 0$ sein muß, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$Y_o + Z \cdot Y_a = 0, \text{ woraus } Z = -\frac{Y_o}{Y_a}.$$

Y_o ist hierin die Spannkraft in dem Stabe Y infolge der äußeren Kräfte P allein, wobei $Z = 0$ zu setzen ist, während Y_a durch die Belastung $Z = 1$ entsteht. Ergibt sich $Y_a = 0$, so wird $Z = \infty$. In diesem Falle ist daher die Kuppel unbrauchbar. Wir werden nachweisen, daß Y_a nur einen von Null verschiedenen Wert annimmt, wenn die Seitenzahl des Ringes eine ungerade ist.

Zunächst möge nunmehr die Spannkraft Y_a infolge $Z = 1$ bestimmt werden (Abb. 357).

Benutzt man am abgetrennten Knoten *e* eine Momentengleichung für die Achse I, so erhält man nach Zerlegung der Kräfte 1 und S_{12a} in die Seiten-

kräfte $1 \cos \alpha$ und $1 \sin \alpha$ bezw. $S_{12a} \cdot \cos \alpha$ und $S_{12a} \cdot \sin \alpha$ (parallel bezw. senkrecht zur Achse I) die Gleichung

$$(1 \sin \alpha + S_{12a} \cdot \sin \alpha)\, h = 0.$$

h ist hierin der senkrechte Abstand der Ringebene von der Grundrißebene. Wir schreiben die Gleichung in der Form

$$h \cdot \sin \alpha\, (1 + S_{12a}) = 0.$$

Da $h \cdot \sin \alpha$ nicht $= 0$ ist, so muß $1 + S_{12a} = 0$ werden, so daß $S_{12a} = -1$. Am Knoten d erhält man dann auf dieselbe Weise unter Benutzung einer Momentengleichung für die Achse II die Bedingung

$$(S_{12a} \cdot \sin \alpha + S_{9a} \cdot \sin \alpha)\, h = 0 \text{ bezw. } h \cdot \sin \alpha\, (S_{12a} + S_{9a}) = 0,$$

woraus $S_{12a} + S_{9a} = 0$ und $S_{9a} = -S_{12a} = +1.$

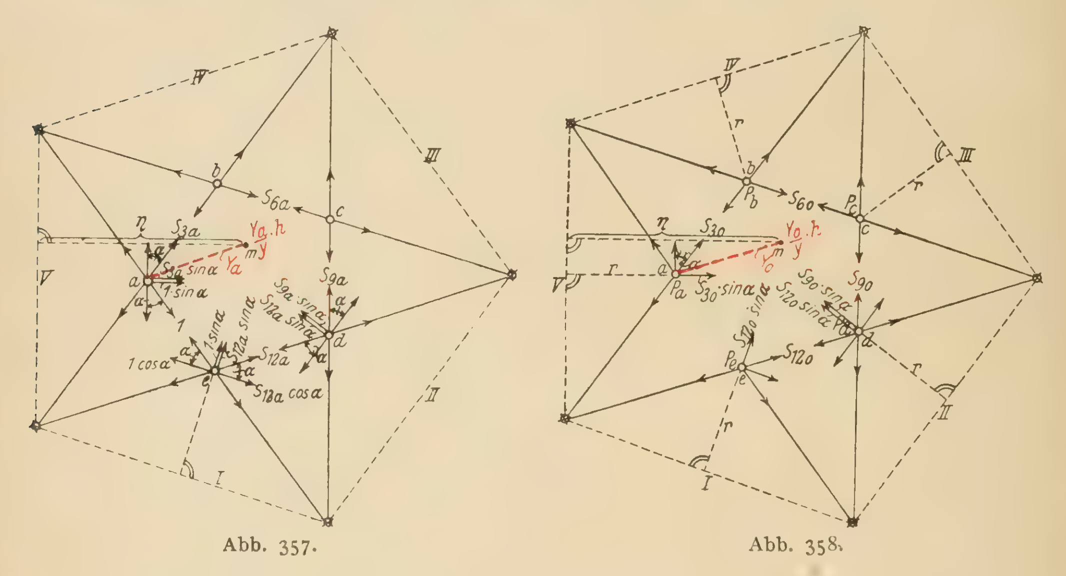


Abb. 357. Abb. 358.

Am Knoten c muß dann entsprechend sein

$$S_{6a} + S_{9a} = 0, \text{ woraus } S_{6a} = -S_{9a} = -1$$

und endlich am Knoten b

$$S_{3a} + S_{6a} = 0, \text{ woraus } S_{3a} = -S_{6a} = +1.$$

Nunmehr benutzen wir am abgetrennten Knoten a eine Momentengleichung für die Achse V. Die vom Schnitt getroffene Kraft Y_a zerlegen wir im Punkte m, also in der Grundrißebene, in eine in die Grundrißebene fallende Seitenkraft, welche die Momentenachse schneidet, also das Moment 0 hat und in die senkrecht zur Grundrißebene wirkende Seitenkraft $\frac{Y_a}{y} \cdot h$ (vergl. 2, A, 2, Seite 259). y ist hierin die wahre Länge des Y-Stabes.

Die Momentengleichung lautet alsdann

$$(S_{3a} \cdot \sin \alpha + 1 \sin \alpha)\, h + \frac{Y_a}{y} \cdot h \cdot \eta = 0 \text{ oder mit } S_{3a} = +1$$

$$2 \sin \alpha \cdot h + \frac{Y_a}{y} \cdot h \cdot \eta = 0, \text{ woraus } Y_a = -\frac{2\, y \cdot \sin \alpha}{\eta}$$

Sinngemäß berechnen wir jetzt die Spannkraft Y_o infolge der äußeren Kräfte P allein (Abb. 358). Wirken in den Knoten a, b, c, d und e die senkrechten Kräfte P_a, P_b, P_c, P_d und P_e, so erhält man zunächst am abgetrennten Knoten e mittels einer Momentengleichung für die Achse I die Bedingung

$$S_{12o} \cdot \sin\alpha \cdot h + P_e \cdot r = 0, \text{ woraus } S_{12o} = -\frac{P_e \cdot r}{h \cdot \sin\alpha}.$$

Am Knoten d lautet die Momentengleichung für die Achse II

$$(S_{12o} \cdot \sin\alpha + S_{9o} \cdot \sin\alpha)\, h + P_d \cdot r = 0$$

$$S_{9o} = -\frac{P_d \cdot r + S_{12o} \cdot h \cdot \sin\alpha}{h \cdot \sin\alpha} = -\frac{P_d \cdot r - \frac{P_e \cdot r}{h \cdot \sin\alpha} \cdot h \cdot \sin\alpha}{h \cdot \sin\alpha} = \frac{r\,(P_e - P_d)}{h \cdot \sin\alpha}.$$

Am Knoten c findet man

$$(S_{9o} \cdot \sin\alpha + S_{6o} \cdot \sin\alpha)\, h + P_c \cdot r = 0$$

$$S_{6o} = -\frac{P_c \cdot r + S_{9o} \cdot h \cdot \sin\alpha}{h \cdot \sin\alpha} = -\frac{P_c \cdot r + r\,(P_e - P_d)}{h \cdot \sin\alpha} = \frac{r\,(P_d - P_c - P_e)}{h \cdot \sin\alpha}.$$

Am Knoten b ist sinngemäß

$$(S_{3o} \cdot \sin\alpha + S_{6o} \cdot \sin\alpha)\, h + P_b \cdot r = 0;$$

$$S_{3o} = -\frac{P_b \cdot r + r\,(P_d - P_c - P_e)}{h \cdot \sin\alpha} = \frac{r\,(P_c + P_e - P_d - P_b)}{h \cdot \sin\alpha}.$$

Endlich findet man am Knoten a durch eine Momentengleichung für die Achse V die Bedingung

$$\frac{Y_o}{y} \cdot h \cdot \eta + S_{3o} \cdot \sin\alpha \cdot h + P_a \cdot r = 0,$$

woraus

$$Y_o = -\frac{P_a \cdot r + S_{3o} \cdot h \cdot \sin\alpha}{h \cdot \eta} \cdot y$$

$$= -\frac{r\,(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e)}{h \cdot \eta} \cdot y.$$

Somit ist

$$Z = -\frac{Y_o}{Y_a} = +\frac{Y_o \cdot \eta}{2\,y \cdot \sin\alpha} = -\frac{r\,(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e)}{2\,h \cdot \sin\alpha}.$$

Ist

$$P_a = P_b = P_c = P_d = P_e = P,$$

so wird

$$Z = -\frac{P \cdot r}{2\,h \cdot \sin\alpha}.$$

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man übrigens auch auf direktem Wege (ohne Zuhilfenahme des Y-Stabes). Benutzt man am abgetrennten Knoten a eine Momentengleichung für die Achse V (Abb. 359), so erhält man

$$(Z \cdot \sin\alpha + S_3 \cdot \sin\alpha)\, h + P_a \cdot r = 0,$$

woraus

$$S_3 \cdot \sin\alpha = -P_a \frac{r}{h} - Z \cdot \sin\alpha.$$

In gleicher Weise findet man am Knoten b durch eine Momentengleichung für die Achse IV

$$(S_3 \cdot \sin\alpha + S_6 \cdot \sin\alpha)\, h + P_b \cdot r = 0;$$

$$S_6 \cdot \sin\alpha = -P_b \cdot \frac{r}{h} - S_3 \cdot \sin\alpha = -P_b \cdot \frac{r}{h} + P_a \cdot \frac{r}{h} + Z \cdot \sin\alpha.$$

Am Knoten c muß dann sein

$$(S_6 \cdot \sin\alpha + S_9 \cdot \sin\alpha)\, h + P_c \cdot r = 0,$$

woraus

$$S_9 \cdot \sin\alpha = -P_c \cdot \frac{r}{h} - S_6 \cdot \sin\alpha = -P_c \cdot \frac{r}{h} + P_b \cdot \frac{r}{h} - P_a \cdot \frac{r}{h} - Z \cdot \sin\alpha.$$

Weiter gilt am Knoten d die Gleichgewichtsbedingung

$$(S_9 \cdot \sin\alpha + S_{12} \cdot \sin\alpha)\, h + P_d \cdot r = 0,$$

so daß

$$S_{12} \cdot \sin\alpha = -\frac{P_d \cdot r}{h} - S_9 \cdot \sin\alpha = -P_d \cdot \frac{r}{h} + P_c \cdot \frac{r}{h} - P_b \cdot \frac{r}{h} + P_a \cdot \frac{r}{h} + Z \cdot \sin\alpha$$

Benutzt man dann am abgetrennten Knoten e eine Momentengleichung für die Achse V, so erhält man

$$(Z \cdot \sin\alpha + S_{12} \cdot \sin\alpha)\, h + P_e \cdot r = 0.$$

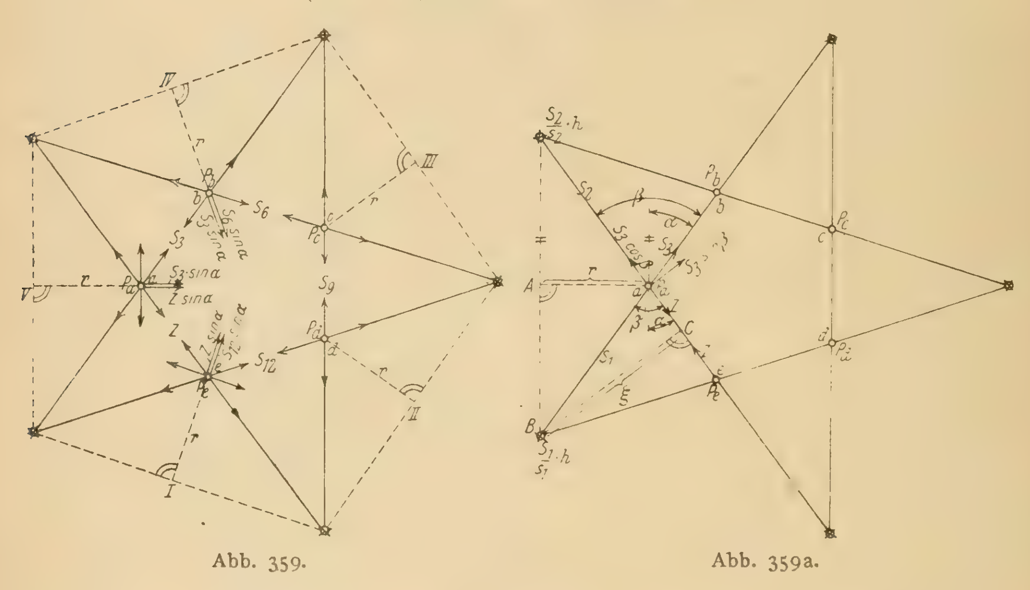


Abb. 359. Abb. 359a.

Setzt man hierin den für $S_{12} \cdot \sin\alpha$ gefundenen Wert ein, so entsteht die Gleichung

$$2\, Z \cdot h \cdot \sin\alpha + r\,(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e) = 0,$$

woraus

$$Z = -\frac{r\,(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e)}{2\, h \cdot \sin\alpha}.$$

Für gleich große Kräfte P ergibt sich $Z = -\frac{P \cdot r}{2\, h \cdot \sin\alpha}$.

Nach Berechnung von Z findet man dann die Spannkräfte in den übrigen Ringstäben mit Hilfe der für diese Spannkräfte aufgestellten Formeln. So ist z. B.

$$S_3 = S_{3o} + Z \cdot S_{3a} = \frac{r\,(P_c + P_e - P_d - P_b)}{h \cdot \sin\alpha} - \frac{r\,(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e)}{2\, h \cdot \sin\alpha} \cdot 1$$

$$= -\frac{r}{2\, h \cdot \sin\alpha}\,(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e).$$

Oder wir benutzen die auf direktem Wege gefundene Formel

$$S_3 \cdot \sin\alpha = -P_a \cdot \frac{r}{h} - Z \cdot \sin\alpha, \quad \text{woraus } S_3 = -\frac{P_a \cdot r}{h \cdot \sin\alpha} - Z$$

$$= -\frac{P_a \cdot r}{h \cdot \sin\alpha} + \frac{r(P_a - P_b + P_c - P_d + P_e)}{2\,h \cdot \sin\alpha} = -\frac{r}{2\,h \cdot \sin\alpha}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e).$$

Zur Berechnung von S_1 (Abb. 359a) benutzen wir am abgetrennten Knoten a eine Momentengleichung in bezug auf die durch den Spurpunkt von S_2 gehende, mit der Grundrißprojektion von S_2 zusammenfallende, also in der Grundrißebene liegende Achse. Zerlegt man S_3 in $S_3 \cdot \cos\beta$ und $S_3 \cdot \sin\beta$ (parallel und lotrecht zur Achse), ebenso S_1 im Spurpunkt von S_1 in die senkrechte Seitenkraft $\frac{S_1}{s_1} \cdot h$ und in eine in die Grundrißebene fallende Seitenkraft, welche die Momentenachse schneidet, so findet man (unter der Voraussetzung, daß der Stab Z parallel zur Momentenachse verläuft) die Gleichung

$$\frac{S_1}{s_1} \cdot h \cdot \xi - S_3 \cdot \sin\beta \cdot h = 0.$$

(Man beachte, daß die Kraft P_a die Momentenachse schneidet).

Hieraus ergibt sich

$$S_1 = s_1 \cdot \frac{S_3 \cdot \sin\beta}{\xi} = -\frac{s_1 \cdot \sin\beta}{\xi} \cdot \frac{r}{2\,h \cdot \sin\alpha}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e).$$

Setzt man sodann an demselben abgetrennten Knoten die Gleichgewichtsbedingung „$\Sigma V = 0$" an, so erhält man die Gleichung

$$\frac{S_2}{s_2} \cdot h + \frac{S_1}{s_1} \cdot h + P_a = 0 \text{ und mit } s_1 = s_2$$

$$S_2 = -\left(\frac{P_a}{h} \cdot s_1 + S_1\right)$$

$$= -\left[\frac{P_a}{h} \cdot s_1 - \frac{s_1 \cdot \sin\beta}{\xi} \cdot \frac{r}{2\,h \cdot \sin\alpha}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e)\right].$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $A\,a\,B$ findet man die Grundrißprojektion des Stabes $S_1 = \frac{r}{\sin\alpha}$ und aus dem rechtwinkligen Dreieck $a\,B\,C = \frac{\xi}{\sin\beta}$. Es muß daher sein $\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{\xi}{\sin\beta}$ oder $r \cdot \sin\beta = \xi \cdot \sin\alpha$. Somit wird

$$S_2 = -\left[\frac{P_a \cdot s_1}{h} - \frac{s_1}{2\,h}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e)\right]$$

$$= -\frac{s_1}{2\,h}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e).$$

Setzt man auch in der für S_1 aufgestellten Gleichung $r \cdot \sin\beta = \xi \cdot \sin\alpha$, so ergibt sich

$$S_1 = -\frac{s_1}{2\,h}(P_a + P_b - P_c + P_d - P_e).$$

S_1 und S_2 werden also gleich groß.

Für gleiche Lasten P erhält man $S_1 = S_2 = -\frac{P \cdot s_1}{2\,h}$.

Sinngemäß werden dann die übrigen Spannkräfte berechnet.

Aus der Gleichung $Z = -\frac{Y_o}{Y_a}$ erkennt man, daß das Fachwerk nur brauchbar ist, wenn $Y_a \gtrless 0$, da andernfalls für einen endlichen Wert von Y_o die Spannkraft Z einen unendlich großen Wert bezw. für $Y_o = 0$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftreten würde. Ist die Anzahl der Ringstäbe eine **ungerade**, wie im vorliegenden Fall, so wird Y_a stets $\gtrless 0$. Bei einer **geraden** Anzahl wird dagegen $Y_a = 0$, das Fachwerk also unbrauchbar, wie nachfolgend gezeigt werden wird.

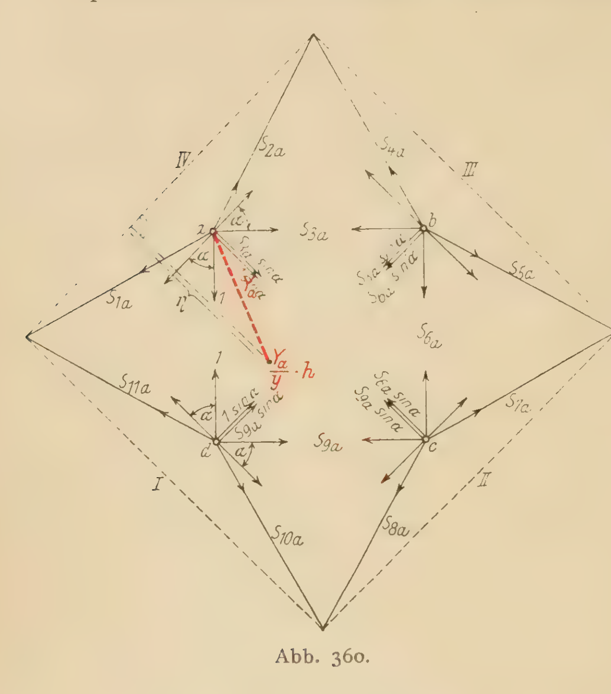


Abb. 360.

Es liege z. B. eine Sternkuppel mit vier Ringstäben vor. In Abb. 360 ist der Zustand $Z = 1$ dargestellt. Benutzt man am abgetrennten Knoten d eine Momentengleichung für die Achse I, so erhält man

$$(1 \cdot \sin\alpha + S_{9a} \cdot \sin\alpha)\, h = 0,$$

woraus $S_{9a} = -1$.

Am Knoten c findet man dann sinngemäß durch eine Momentengleichung für die Achse II

$$(S_{9a} \cdot \sin\alpha + S_{6a} \cdot \sin\alpha)\, h = 0, \quad \text{woraus } S_{6a} = -S_{9a} = +1.$$

Am Knoten b gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$(S_{6a} \cdot \sin\alpha + S_{3a} \cdot \sin\alpha)\, h = 0, \quad \text{so daß } S_{3a} = -S_{6a} = -1.$$

Endlich findet man am Knoten a durch eine Momentengleichung für die Achse V

$$(S_{3a} \cdot \sin\alpha + 1 \cdot \sin\alpha)\, h + \frac{Y_a}{y} \cdot \eta = 0$$

und mit $S_{3a} = -1$:

$$(-1 \cdot \sin\alpha + 1 \cdot \sin\alpha)\, h + \frac{Y_a}{y} \cdot \eta = 0,$$

woraus

$$\frac{Y_a}{y} \cdot \eta = 0.$$

Da $\frac{\eta}{y}$ nicht $= 0$ sein kann, muß $Y_a = 0$ werden.

Man erkennt leicht, daß man das gleiche Ergebnis auch für eine sechsseitige und achtseitige, überhaupt für jede Sternkuppel mit einer **geraden** Anzahl von Ringstäben erhält. Die Kuppel ist daher nur als brauchbar zu bezeichnen, wenn sie eine **ungerade** Anzahl von Ringstäben besitzt.

Obige Untersuchungen sind, worauf noch einmal besonders hingewiesen werde, an die Voraussetzung vollkommener Symmetrie gebunden. Liegt ein unsymmetrisches Fachwerk dieser Art vor, so ist der Gang der Rechnung der gleiche, man erhält aber dann auch für eine gerade Anzahl von Ringstäben für Y_a einen von Null verschiedenen Wert, so daß die unsymmetrische Sternkuppel stets ein brauchbares Fachwerk ist.

C. Die mit Hilfe eines *Y*-Stabes entstandene Halbkuppel.

In Abb. 361 ist eine Halbkuppel dargestellt, für deren Aufbau nur ein Y-Stab, mithin auch nur ein Z-Stab erforderlich ist. Die Knotenpunkte sind in folgender Reihenfolge dreistäbig angeschlossen:

Knotenpunkt a durch die Stäbe	1,	2,	3			
„ a' „ „ „	1',	2',	3'			
„ b „ „ „	4,	5,	Y (s. auch Abb. 361a)			
„ b' „ „ „	6,	4',	5'			
„ c „ „ „	7,	8,	9			
„ c' „ „ „	7',	8',	9'			
„ d „ „ „	10,	10',	11			
„ e „ „ „	12,	13,	14			
„ e' „ „ „	12',	13',	14'.			

Nach Beseitigung des Y-Stabes wird zwischen e und e' der Z-Stab eingeschaltet.

Gang der Berechnung.

Wir beseitigen zunächst den Z-Stab wieder und bringen zum Ersatz den Y-Stab an, so daß nach wie vor ein statisch bestimmtes, starres Fachwerk vorliegt. Auf dieses Fachwerk (das Y-System) lassen wir außer den Knotenlasten in der Richtung des Z-Stabes die vorläufig noch unbekannte äußere Kraft Z wirken. Die Knotenlasten mögen in den Knotenpunkten a, b, c, d, e aus senkrechten Kräften P und wagerechten Windkräften W, in den Knotenpunkten a', b', c', d', e' nur aus senkrechten Kräften P bestehen. Drücken wir zunächst alle Stabspannkräfte durch die Unbekannte Z aus und setzen dann an dem abgetrennten Knoten b die Summe aller Kräfte in der Richtung von $Y = 0$, so erhalten wir eine Gleichung für Y, in der Y durch die Unbekannte Z ausgedrückt ist. Die Bedingung $Y = 0$ liefert uns dann eine Gleichung mit der Unbekannten Z, wodurch diese eindeutig bestimmt ist.

Demgemäß berechnen wir zunächst S_{12} an dem zuletzt angeschlossenen Knoten e mittels einer Momentengleichung in bezug auf die Achse c—d. Wir zerlegen dabei die in e wirkenden Kräfte S_{12} und $W_e + Z$ je in eine Seitenkraft parallel und senkrecht zu c—d, so daß die parallel zu c—d gerichteten Seitenkräfte aus der Momentengleichung herausfallen. Die Gleichung lautet somit

$$[S_{12} \cdot \sin\alpha + (W_e + Z)\sin\beta]\, h_o + P_e \cdot \eta_{10} = 0,$$

woraus
$$S_{12} = -\frac{(W_e + Z)\, h_o \cdot \sin\beta + P_e \cdot \eta_{10}}{h_o \cdot \sin\alpha}.$$

Sinngemäß erhält man $S_{12'}$ am Knoten e', wenn man in dieser Formel $W_e + Z$

durch Z und P_e durch $P_{e'}$ ersetzt, da im Knoten e' nur die Kräfte Z und $P_{e'}$ wirken. Es wird daher

$$S_{12'} = -\frac{Z \cdot h_o \cdot \sin\beta + P_{e'} \cdot \eta_{10'}}{h_o \cdot \sin\alpha}.$$

Zur Berechnung von $S_{13'}$ setzen wir am abgetrennten Knoten e' die Summe aller Kräfte in bezug auf die durch den Spurpunkt von $14'$ gehende, mit der

Abb. 361.

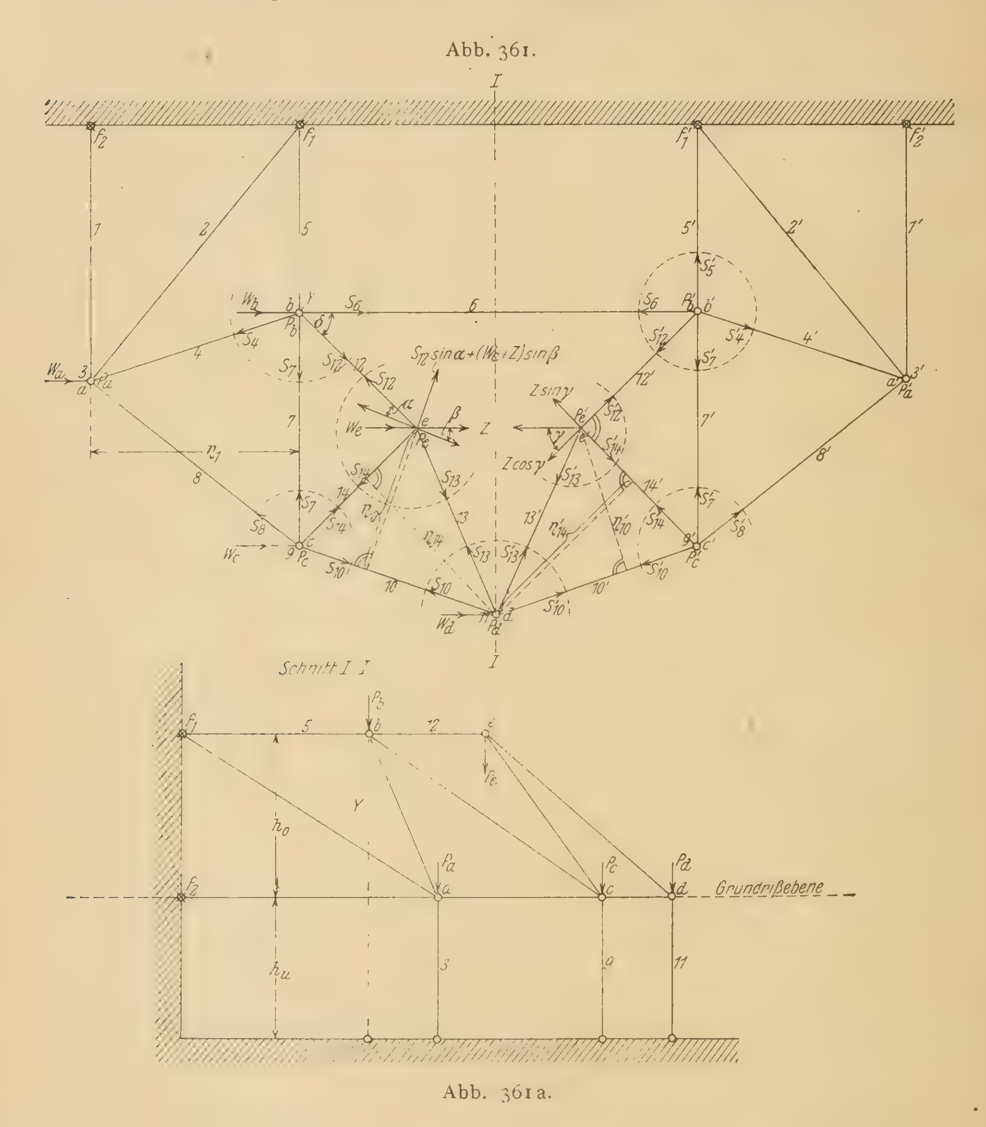


Abb. 361 a.

Grundrißprojektion von $14'$ zusammenfallende, also ebenfalls in der Grundrißebene liegende Achse gleich Null, nachdem zuvor Z in zwei Seitenkräfte, parallel und senkrecht zur Achse, zerlegt ist (vergl. 2, A, 2, b, Seite 260 u. 261).

$S_{12'}$ sei bereits senkrecht zur Achse gerichtet. Somit lautet die Gleichung

$$z_{13'} \cdot h_o \cdot \eta_{14'} + Z \cdot \cos\gamma \cdot h_o - S_{12'} \cdot h_o = 0.$$

$$\varkappa_{13'} = \frac{S_{12'}}{\eta_{14'}} - \frac{Z \cdot \cos\gamma}{\eta_{14'}} = -\frac{1}{\eta_{14'}}\left(\frac{Z \cdot h_o \cdot \sin\beta + P_{e'} \cdot \eta_{10'}}{h_o \cdot \sin\alpha} + Z \cdot \cos\gamma\right) = \frac{S_{13'}}{s_{13'}},$$

so daß $$S_{13'} = -\frac{s_{13'}}{\eta_{14'}}\left(\frac{Z \cdot h_o \cdot \sin\beta + P_{e'} \cdot \eta_{10'}}{h_o \cdot \sin\alpha} + Z \cdot \cos\gamma\right).$$

Entsprechend erhält man am Knoten e

$$\varkappa_{13} = -\frac{1}{\eta_{14}}\left[\frac{(W_e + Z)\,h_o \cdot \sin\beta + P_e \cdot \eta_{10}}{h_o \cdot \sin\alpha} + (W_e + Z)\cos\gamma\right]$$

und $$S_{13} = -\frac{s_{13}}{\eta_{14}}\left[\frac{(W_e + Z)\,h_o \cdot \sin\beta + P_e \cdot \eta_{10}}{h_o \cdot \sin\alpha} + (W_e + Z)\cos\gamma\right].$$

Zur Berechnung von $S_{14'}$ setzen wir an demselben abgetrennten Knoten die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ an (vergl. 2, A, 2, a, Seite 260) und erhalten

$$\varkappa_{14'} \cdot h_o + \varkappa_{13'} \cdot h_o + P_{e'} = 0,$$

woraus

$$\varkappa_{14'} = -\frac{\varkappa_{13'} \cdot h_o + P_{e'}}{h_o}$$

$$= +\frac{1}{h_o}\left[\frac{h_o}{\eta_{14'}}\left(\frac{Z \cdot h_o \cdot \sin\beta + P_{e'} \cdot \eta_{10'}}{h_o \cdot \sin\alpha} + Z \cdot \cos\gamma\right) - P_{e'}\right] = \frac{S_{14'}}{s_{14'}}.$$

Entsprechend wird (am Knoten e)

$$\varkappa_{14} = +\frac{1}{h_o}\left\{\frac{h_o}{\eta_{14}}\left[\frac{(W_e + Z)\,h_o \cdot \sin\beta + P_e \cdot \eta_{10}}{h_o \cdot \sin\alpha} + (W_e + Z)\cos\gamma\right] - P_e\right\} = \frac{S_{14}}{s_{14}}.$$

Der weitere Gang der Rechnung sei nur angedeutet. Der Leser ist danach leicht imstande, die entsprechenden Gleichungen selbst anzusetzen.

Wir trennen den Knoten d ab und setzen zur Berechnung von S_{10} die Summe aller Kräfte lotrecht zur Richtung von $S_{10'} = 0$, womit S_{10} bestimmt ist.

Am abgetrennten Knoten c wird sodann die Summe aller Kräfte senkrecht zur Richtung von $S_8 = 0$ gesetzt, woraus sich S_7 ergibt. Entsprechend findet man am abgetrennten Knoten c' die Spannkraft $S_{7'}$.

Alsdann trennen wir den Knoten b' ab und benutzen eine Momentengleichung in bezug auf die Achse a'—f_2'. Da $S_{4'}$ die Achse schneidet und $S_{5'}$ zur Achse parallel verläuft, wird das Moment dieser beiden Kräfte in bezug auf die Achse $= 0$, so daß die Momentengleichung nur die Unbekannte S_6 enthält.

Endlich setzen wir an dem abgetrennten Knoten b eine Momentengleichung in bezug auf die Achse a—f_2 an. Die Gleichung lautet sodann

$$(Y + P_b)\,\eta_1 + \varkappa_7 \cdot h_o \cdot \eta_1 + S_{12} \cdot \cos\delta \cdot h_o + S_6 \cdot h_o + W_b \cdot h_o = 0, \quad \text{woraus}$$

$$Y = -\frac{P_b \cdot \eta_1 + \varkappa_7 \cdot h_o \cdot \eta_1 + h_o\,(S_{12} \cdot \cos\delta + S_6 + W_b)}{\eta_1}.$$

Führt man dann die für $\varkappa_7$, S_{12} und S_6 ermittelten Werte, in denen überall die Unbekannte Z enthalten ist, in die Gleichung ein und setzt $Y = 0$, so erhält man eine Gleichung mit der Unbekannten Z, die somit eindeutig bestimmt ist. Nunmehr sind auch alle übrigen Spannkräfte S bestimmt. Man braucht nur den für Z errechneten Wert in die für die Stabkräfte aufgestellten Gleichungen einzusetzen.

D. Die Zimmermannsche Kuppel (Reichstagskuppel) (Abb. 362).

A. Die Kuppel hat vier allseits bewegliche und vier in einer bestimmten Linie geführte Lager. In ersteren können nur senkrecht zur Grundrißebene gerichtete Auflagerdrücke entstehen, während in den Linienlagern neben den senkrechten Auflagerkräften noch Widerstände auftreten, die normal zu der seitlichen Führung der Lager gerichtet sind und durch die wagerechten Windkräfte hervorgerufen werden. Man war auf diese eigenartige Lagerung angewiesen, weil als Widerlager nur die verhältnismäßig schwachen Umfassungswände eines Sitzungssaales zur Verfügung standen, die den Schub, der durch ein festes Lager auf ein Widerlager ausgeübt wird, nicht hätten aufnehmen können. Bei der Beanspruchung durch Winddruck wirken daher die an den Führungsflächen normal zur Führung gerichteten Stützwiderstände in der Längsrichtung der Mauern, eine Beanspruchung, denen diese nunmehr gewachsen sind. Die Umfassungswände sind in Abb. 362 gestrichelt angedeutet.

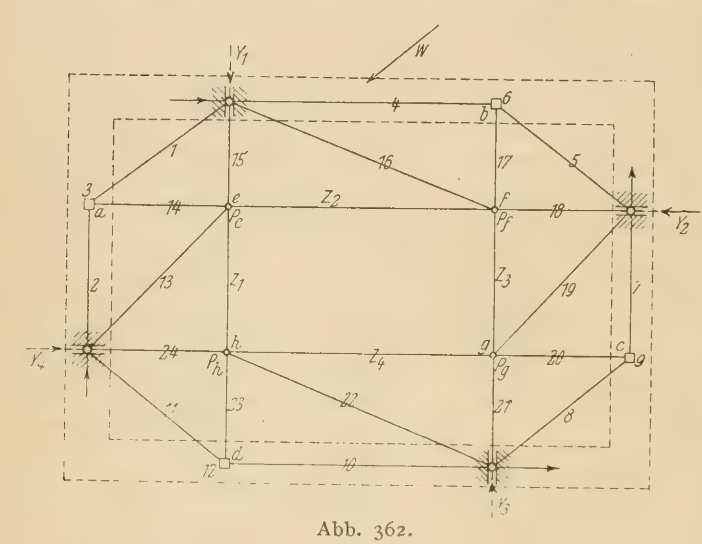


Abb. 362.

Um alle Knotenpunkte dreistäbig anschließen zu können, ist es zunächst notwendig, die Linienlager durch in Richtung der Führung wirkende, parallel zur Grundrißebene gerichtete Y-Stäbe festzumachen. Von diesen festen Punkten aus werden dann die übrigen Knotenpunkte dreistäbig angeschlossen. Man beachte dabei, daß man sich die allseits beweglichen Auflager durch Auflagerstäbe ersetzt denken darf, worauf bereits früher hingewiesen wurde. Demgemäß sind angeschlossen

Knoten	*a*	durch	die Stäbe	1, 2	und	den	Auflagerstab	3
„	*b*	„	„	4, 5	„	„	„	6
„	*c*	„	„	7, 8	„	„	„	9
„	*d*	„	„	10, 11	„	„	„	12.

An diese sind dann weiter angeschlossen *e* durch 13, 14 und 15, *f* durch 16, 17 und 18, *g* durch 19, 20 und 21 und *h* durch 22, 23 und 24.

Das so entstandene Fachwerk ist statisch bestimmt und starr, da sämtliche Knotenpunkte dreistäbig angeschlossen sind.

Damit nun aber die Auflager auch die beabsichtigte Wirkung haben, müssen die Y-Stäbe wieder beseitigt und durch ebensoviele Z-Stäbe ersetzt werden, die so anzubringen sind, daß keine neuen Knotenpunkte entstehen.

Demgemäß wurden zwischen den Knoten e, f, g und h die Stäbe Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 angebracht. Sie liegen in einer parallel zur Grundrißebene gerichteten Ebene.

Der Gang der Berechnung kann entsprechend dem für die Schwedlersche Halbkuppel entwickelten Verfahren durchgeführt werden Infolge der hier vorhandenen Symmetrie empfiehlt es sich jedoch, ähnlich wie unter III vorzugehen, wie nachfolgender Rechnungsgang zeigen wird.

Wir beseitigen die vier Z-Stäbe wieder und ersetzen sie durch ihre Spannkräfte, die dann zu den äußeren Kräften zählen. Als Ersatz für die vier fehlenden Z-Stäbe müssen dann wieder die vier Y-Stäbe angebracht werden. Für das so verwandelte Fachwerk berechnen wir nun die Spannkräfte Y_1, Y_2, Y_3 und Y_4 und setzen diese $= 0$, womit wir vier Gleichungen mit den Unbekannten Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 erhalten.

Es sei angenommen, daß in den Knotenpunkten 1, 2, 3 und 4 senkrechte Kräfte P, außerdem in 1, 3, 5, 6, 7 und 8 wagerechte Windkräfte W wirken

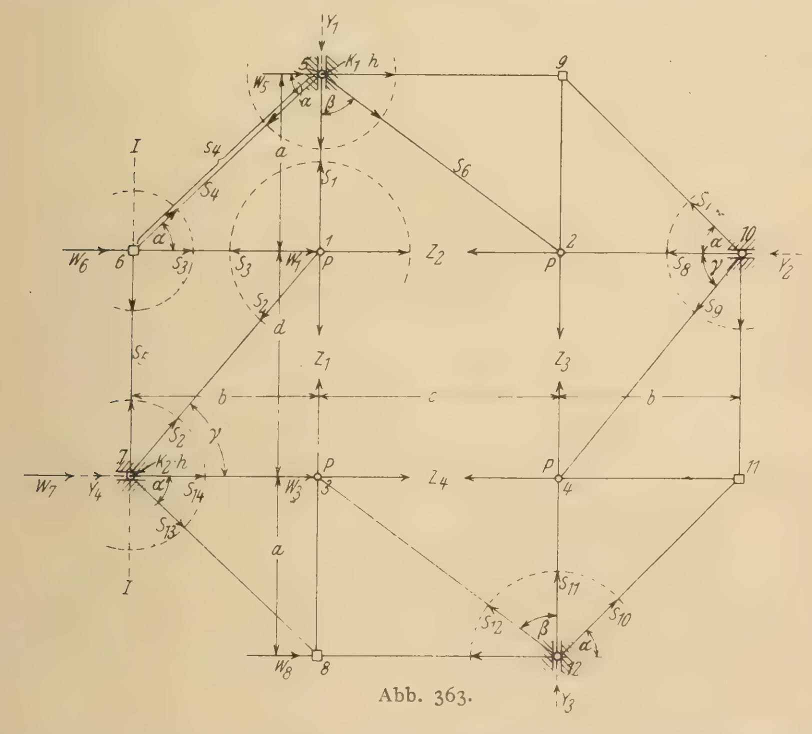


Abb. 363.

(Abb. 363). Die Stäbe Y_1, Y_2, Y_3 und Y_4 liegen in der Grundrißebene und fallen mit den Richtungen der Führungen der Auflagerpunkte 5, 10, 12 und 7 zusammen.

Wir zerlegen zunächst alle im Knoten 5 angreifenden Kräfte nach der Richtung von Y_1 und normal zu Y_1 und benutzen dann die Gleichgewichtsbedingung: „Die Summe aller in der Richtung von Y_1 wirkenden Kräfte muß gleich Null sein". Die Zerlegung der Stabkräfte erfolgt jedesmal in der durch den betreffenden Stab und durch Y_1 gelegten Ebene. So findet man in der

durch S_4 und Y_1 gelegten Ebene (also in der Grundrißebene) in der Richtung von Y_1 die Seitenkraft $S_4 \cdot \cos\alpha = S_4 \cdot \frac{a}{s_4}$. In der durch S_1 und Y_1 gelegten Ebene wirkt in der Richtung von Y_1 die Seitenkraft $S_1 \cdot \cos\delta$, worin δ der Winkel ist, den S_1 mit dem in der Grundrißebene liegenden Stabe Y_1 einschließt. $\cos\delta$ ist daher $= \frac{a}{s_1}$, so daß $S_1 \cdot \cos\delta = S_1 \cdot \frac{a}{s_1}$. s_1 ist die wahre Länge des Stabes S_1. Endlich ist noch in der durch S_6 und Y_1 gelegten Ebene die in der Richtung von Y_1 wirkende Seitenkraft $= S_6 \cdot \cos\beta$, worin β der Winkel ist, den S_6 mit Y_1 einschließt, so daß $\cos\beta = \frac{a}{s_6}$ und $S_6 \cdot \cos\beta = S_6 \cdot \frac{a}{s_6}$. s_6 ist die wahre Länge des Stabes S_6. Demgemäß lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$Y_1 + S_4 \cdot \cos\alpha + S_1 \cdot \cos\delta + S_6 \cdot \cos\beta = 0$$

bezw.

$$Y_1 + S_4 \cdot \frac{a}{s_4} + S_1 \cdot \frac{a}{s_1} + S_6 \cdot \frac{a}{s_6} = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung die Werte $\frac{S}{s} = \varkappa$, so wird

$$Y_1 = -a\,(\varkappa_1 + \varkappa_4 + \varkappa_6).$$

Zur Berechnung von Y_2 benutzen wir am Knoten 10 die Gleichgewichtsbedingung: „Die Summe aller in der Richtung von Y_2 wirkenden Kräfte muß gleich Null sein". Demgemäß muß sein

$$Y_2 + S_7 \cdot \cos\alpha + S_8 \cdot \frac{b}{s_8} + S_9 \cdot \frac{b}{s_9} = 0.$$

Mit $\cos\alpha = \frac{b}{s_7}$ und $\frac{S}{s} = \varkappa$ wird somit

$$Y_2 = -b\,(\varkappa_7 + \varkappa_8 + \varkappa_9).$$

Am Knoten 12 setzen wir dann die Summe aller Kräfte in der Richtung von Y_3 gleich Null und erhalten

$$Y_3 + S_{10} \cdot \sin\alpha + S_{11} \cdot \frac{a}{s_{11}} + S_{12} \cdot \frac{a}{s_{12}} = 0.$$

Mit $\sin\alpha = \frac{a}{s_{10}}$ und $\frac{S}{s} = \varkappa$ wird sodann

$$Y_3 = -a\,(\varkappa_{10} + \varkappa_{11} + \varkappa_{12}).$$

Endlich setzen wir noch am Knoten 7 die Summe aller Kräfte in der Richtung von $Y_4 = 0$ und erhalten

$$Y_4 + W_7 + S_2 \cdot \cos\gamma + S_{14} \cdot \frac{b}{s_{14}} + S_{13} \cdot \frac{b}{s_{13}} = 0.$$

Setzen wir $\cos\gamma = \frac{b}{s_2}$ und $\frac{S}{s} = \varkappa$, so wird

$$Y_4 = -b\left(\frac{W_7}{b} + \varkappa_2 + \varkappa_{13} + \varkappa_{14}\right).$$

Dann drücken wir die $\varkappa$-Werte sämtlich durch die Unbekannten Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 aus und setzen die vier Bedingungsgleichungen an:

1) $Y_1 = 0 = -a(\varkappa_1 + \varkappa_4 + \varkappa_6)$

2) $Y_2 = 0 = -b(\varkappa_7 + \varkappa_8 + \varkappa_9)$

3) $Y_3 = 0 = -a(\varkappa_{10} + \varkappa_{11} + \varkappa_{12})$

4) $Y_4 = 0 = -b\left(\frac{W_7}{b} + \varkappa_2 + \varkappa_{13} + \varkappa_{14}\right).$

Das sind vier Gleichungen mit den vier Unbekannten Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4, wodurch diese eindeutig bestimmt sind.

Zunächst mögen die Werte $\varkappa$ bestimmt werden.

Zur Berechnung von $\varkappa_1$ benutzen wir am abgetrennten Knoten 1 eine Momentengleichung in bezug auf die Achse I (vergl. 2, A, 2, Seite 258 u. 259). Die Ebene, in welcher Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 wirken, habe von der Grundrißebene den Abstand h. Alsdann lautet die Momentengleichung

$$\varkappa_1 \cdot h \cdot b + P \cdot b + (Z_2 + W_1)\,h = 0.$$

$$\varkappa_1 = -\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_2 + W_1}{b}\right).$$

$\varkappa_2$ finden wir sodann mittels einer Momentengleichung in bezug auf die durch den Spurpunkt von S_3 gehende, mit der Grundrißprojektion von S_3 zusammenfallende, also ebenfalls in der Grundrißebene liegende Achse (vergl 2, A, 2, Seite 260).

$$\varkappa_2 \cdot h \cdot d + Z_1 \cdot h - \varkappa_1 \cdot h \cdot a = 0,$$

woraus $$\varkappa_2 = \frac{\varkappa_1 \cdot a}{d} - \frac{Z_1}{d} = -\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_2 + W_1}{b}\right)\frac{a}{d} - \frac{Z_1}{d}.$$

$\varkappa_3$ ist sodann durch die Bedingung $\Sigma V = 0$ bestimmt (vergl. 2, A, 2, Seite 260).

$$\varkappa_3 \cdot h + \varkappa_1 \cdot h + \varkappa_2 \cdot h + P = 0,$$

so daß

$$\varkappa_3 = -\left(\frac{P}{h} + \varkappa_1 + \varkappa_2\right)$$

$$= -\left(\frac{P}{h} - \frac{P}{h} - \frac{Z_2 + W_1}{b} - \frac{P}{h}\cdot\frac{a}{d} - \frac{Z_2 + W_1}{b}\cdot\frac{a}{d} - \frac{Z_1}{d}\right)$$

$$= \frac{Z_2 + W_1}{b}\left(1 + \frac{a}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(Z_1 + \frac{P}{h}\cdot a\right).$$

Zur Berechnung von $\varkappa_4$ setzen wir an dem abgetrennten Knoten 6 die Summe aller in die Grundrißebene fallenden Seitenkräfte senkrecht zur Stabrichtung 6—7 = 0 und erhalten demgemäß

$$S_4 \cdot \frac{b}{s_4} + S_3 \cdot \frac{b}{s_3} + W_6 = 0$$

bezw. $$\varkappa_4 \cdot b + \varkappa_3 \cdot b + W_6 = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\varkappa_4 = -\left(\frac{W_6}{b} + \varkappa_3\right) = -\left[\frac{W_6}{b} + \frac{Z_2 + W_1}{b}\left(1 + \frac{a}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(Z_1 + \frac{P}{h}\cdot a\right)\right].$$

Wenn man sich nun die Figur 2—5—9—10 so gedreht denkt, daß der Punkt 2 in 1 liegt und der Stab S_6 mit S_2 zusammenfällt, dann können wir ohne weiteres die für die Stäbe der Figur 1—5—6—7 ermittelten Formeln auf die entsprechenden Stäbe der Figur 2—5—9—10 anwenden, wenn wir

nur die entsprechenden Bezeichnungen miteinander vertauschen. So entsprechen sich offenbar S_6 und S_2, S_7 und S_4, S_8 und S_1.

Wir können daher für $\varkappa_6$, $\varkappa_7$ und $\varkappa_8$ die für $\varkappa_2$, $\varkappa_4$ und $\varkappa_1$ entwickelten Formeln benutzen, wenn wir a mit b bezw. b mit a, d mit c, Z_1 mit Z_2, $W_1 + Z_2$ mit Z_3 und W_6 mit o vertauschen. Daher wird

$$\varkappa_6 = -\left[\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_3}{a}\right)\frac{b}{c} - \frac{Z_2}{c}\right]$$

$$\varkappa_7 = -\left[\frac{Z_3}{a}\left(1 + \frac{b}{c}\right) + \frac{1}{c}\left(Z_2 + P \cdot \frac{b}{h}\right)\right]$$

$$\varkappa_8 = -\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_3}{a}\right).$$

Denken wir uns ferner die Figur 4—10—11—12 so gedreht, daß 4 mit 2 und der Stab S_9 mit S_6 zusammenfällt, dann entsprechen sich S_9 und S_6, S_{10} und S_7, S_{11} und S_8. Wir dürfen daher für $\varkappa_9$, $\varkappa_{10}$ und $\varkappa_{11}$ die für $\varkappa_6$, $\varkappa_7$ und $\varkappa_8$ entwickelten Formeln benutzen, wenn wir darin a mit b bezw. b mit a, c mit d, Z_3 mit Z_4 und Z_2 mit Z_3 vertauschen. Somit wird

$$\varkappa_9 = -\left[\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_4}{b}\right)\frac{a}{d} - \frac{Z_3}{d}\right]$$

$$\varkappa_{10} = -\left[\frac{Z_4}{b}\left(1 + \frac{a}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(Z_3 + \frac{P \cdot a}{h}\right)\right]$$

$$\varkappa_{11} = -\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_4}{b}\right).$$

Zur Berechnung von $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{13}$ und $\varkappa_{14}$ denken wir uns endlich die Figur 3—7—8—12 so auf die Figur 4—10—11—12 gelegt, daß 3 mit 4 und der Stab S_{12} mit S_9 zusammenfällt. Alsdann entsprechen sich S_{12} und S_9, S_{13} und S_{10} sowie S_{14} und S_{11}. Wir erhalten daher $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{13}$ und $\varkappa_{14}$, wenn wir in den für $\varkappa_9$, $\varkappa_{10}$ und $\varkappa_{11}$ aufgestellten Formeln b mit a bezw. a mit b, d mit c, Z_2 mit Z_1, Z_3 mit $W_3 + Z_4$ und Z_4 mit Z_1 vertauschen. Somit wird

$$\varkappa_{12} = -\left[\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_1}{a}\right)\frac{b}{c} - \frac{W_3 + Z_4}{c}\right]$$

$$\varkappa_{13} = -\left[\frac{Z_1}{a}\left(1 + \frac{b}{c}\right) + \frac{1}{c}\left(W_3 + Z_4 + \frac{P \cdot b}{h}\right)\right]$$

$$\varkappa_{14} = -\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_1}{a}\right).$$

Nunmehr setzen wir diese $\varkappa$-Werte in die vier auf Seite 285 aufgestellten Bedingungsgleichungen ein und erhalten

1) $Y_1 = 0 = -a(\varkappa_1 + \varkappa_4 + \varkappa_6)$.

$$0 = -a\left\{-\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_2 + W_1}{b}\right) - \left[\frac{W_6}{b} + \frac{Z_2 + W_1}{b}\left(1 + \frac{a}{d}\right) + \frac{1}{d}\left(Z_1 + \frac{P}{h} \cdot a\right)\right]\right.$$
$$\left. - \left[\left(\frac{P}{h} + \frac{Z_3}{a}\right)\frac{b}{c} - \frac{Z_2}{c}\right]\right\}$$

2) $Y_2 = 0 = -b(\varkappa_7 + \varkappa_8 + \varkappa_9)$.

$$0 = -b\left\{-\left[\frac{Z_3}{a}\left(1+\frac{b}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(Z_2+\frac{P\cdot b}{h}\right)\right]-\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_3}{a}\right)\right.$$
$$\left.-\left[\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_4}{b}\right)\frac{a}{d}-\frac{Z_3}{d}\right]\right\}$$

3) $Y_3 = 0 = -a(\varkappa_{10} + \varkappa_{11} + \varkappa_{12})$.

$$0 = -a\left\{-\left[\frac{Z_4}{b}\left(1+\frac{a}{d}\right)+\frac{1}{d}\left(Z_3+\frac{P\cdot a}{h}\right)\right]-\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_4}{b}\right)\right.$$
$$\left.-\left[\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_1}{a}\right)\frac{b}{c}-\frac{W_3+Z_4}{c}\right]\right\}$$

4) $Y_4 = 0 = -b\left(\frac{W_7}{b} + \varkappa_2 + \varkappa_{13} + \varkappa_{14}\right)$.

$$0 = -b\left\{\frac{W_7}{b}-\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_2+W_1}{b}\right)\frac{a}{d}-\frac{Z_1}{d}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{Z_1}{a}\left(1+\frac{b}{c}\right)+\frac{1}{c}\left(W_3+Z_4+\frac{P\cdot b}{h}\right)\right]-\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_1}{a}\right)\right\}.$$

Aus diesen vier Gleichungen können die vier Unbekannten Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 bestimmt werden.

Nach Ermittlung der Unbekannten Z sind aber auch alle übrigen Spannkräfte bestimmt. Man braucht nur die für die Spannkräfte Z errechneten Werte in die für $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ usw. aufgestellten Formeln einzusetzen. So ist z. B.

$$\varkappa_1 = \frac{S_1}{s_1} = -\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_2+W_1}{b}\right)$$

$$S_1 = -s_1\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_2+W_1}{b}\right)$$

$$\varkappa_2 = \frac{S_2}{s_2} = -\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_2+W_1}{b}\right)\frac{a}{d}-\frac{Z_1}{d}$$

$$S_2 = -s_2\left[\left(\frac{P}{h}+\frac{Z_2+W_1}{b}\right)\frac{a}{d}+\frac{Z_1}{d}\right] \quad \text{usw.}$$

B. Man kann nach Müller-Breslau den durch die bisherige Lagerung erreichten Zweck, die Auflagerkräfte infolge der wagerechten Windkräfte in den Längsrichtungen der Auflagermauern wirken zu lassen, auch durch die in Abb. 364 dargestellte Lagerung erreichen, wobei nur zwei Y-Stäbe erforderlich werden, wie weiter unten gezeigt werden wird. f_1, f_2, f_3 und f_4 sind feste, a, b, d, e, g, h, k und l allseits bewegliche Auflager. Die festen Auflagerpunkte gelten dabei als Knotenpunkte. Die Auflagerdrücke in den Auflagern f_1 bis f_4 können nur in die Richtungen der in den festen Auflagern wirkenden, parallel zu den Auflagermauern gerichteten Stabkräfte fallen. So ist z. B. in dem Auflager f_2 der Stützwiderstand $= S_4 - S_8$, wenn $S_4 > S_8$. Er ist parallel zu S_4 bezw. S_8 gerichtet. Der senkrechte Stützdruck ist gleich dem halben Gewicht der Stäbe 4 und 8 (Abb. 365). An den allseits beweglichen Auflagern entstehen lediglich senkrecht gerichtete Auflagerdrücke.

Für den dreistäbigen Anschluß der Knotenpunkte denken wir uns wieder die allseits beweglichen Auflager durch senkrechte Auflagerstäbe ersetzt.

Es wird dann zunächst der Punkt a durch den Stab 1, den Auflagerstab 2 und den Hilfsstab Y_1 angeschlossen, darauf b durch die Stäbe 3, 4 und den

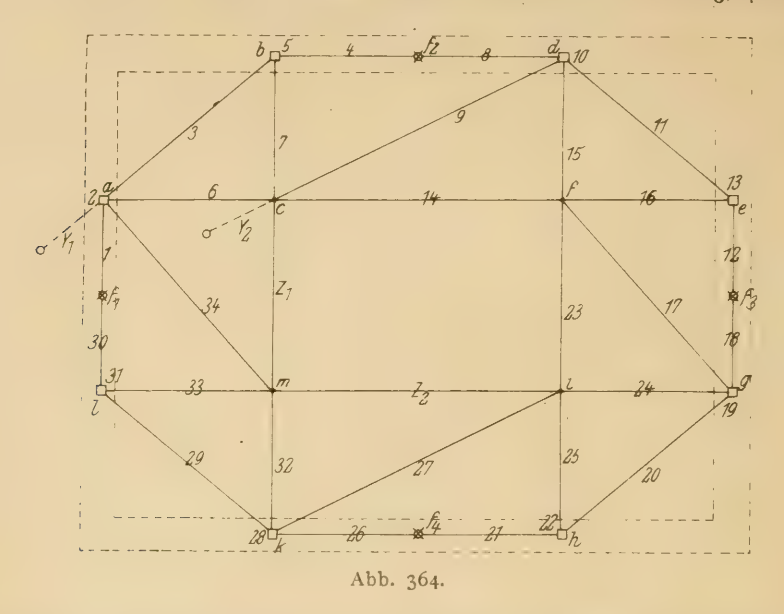


Abb. 364.

Auflagerstab 5. Zum Anschluß von c ist wieder ein Hilfsstab erforderlich. Der Punkt wird angeschlossen durch 6, 7 und Y_2. Hierauf werden angeschlossen

d durch 8, 9 und den Auflagerstab 10
e ,, 11, 12 ,, ,, ,, 13
f ,, die Stäbe 14, 15, 16
g ,, ,, ,, 17, 18 und den Auflagerstab 19
h ,, ,, ,, 20, 21 ,, ,, ,, 22
i ,, ,, ,, 23, 24, 25
k ,, ,, ,, 26, 27 und den Auflagerstab 28
l ,, ,, ,, 29, 30 ,, ,, ,, 31
m ,, ,, ,, 32, 33, 34.

Das so entstandene Fachwerk ist statisch bestimmt und starr, weil sämtliche Knotenpunkte dreistäbig angeschlossen sind. Damit nun das Fachwerk die gewünschte Form erhält, müssen die beiden Y-Stäbe wieder beseitigt und durch zwei Z-Stäbe ersetzt werden. Die Z-Stäbe Z_1 und Z_2 werden zweckmäßig zwischen den Knotenpunkten c und m bezw. i und m angebracht.

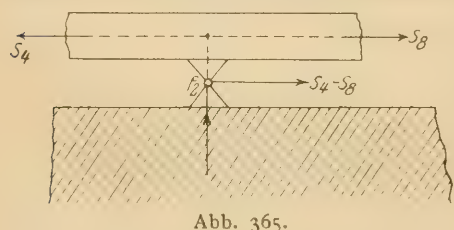


Abb. 365.

Die Berechnung von Z_1 und Z_2 wird dann nach dem unter D, A gezeigten Verfahren durchgeführt. Demgemäß werden zunächst sämtliche Stabkräfte einschließlich Y_1 und Y_2 durch Z_1 und Z_2 ausgedrückt. Die Bedingungen $Y_1 = 0$ und $Y_2 = 0$ liefern dann zwei Gleichungen mit den beiden

Unbekannten Z_1 und Z_2, aus denen diese bestimmt werden können. Die übrigen Stabkräfte findet man dann durch Einsetzen der für Z_1 und Z_2 gefundenen Werte in die für diese Stabkräfte aufgestellten Formeln.

4. Berechnung der Spannkräfte und Stützwiderstände einer Schwedlerschen Vollkuppel (Abb. 366).

(Vergl. auch das unter 2, B, 5 und 6, Seite 266 u. 268 benutzte Rechnungsverfahren.)

In allen Knotenpunkten der Kuppel mögen senkrechte Kräfte P, außerdem in den an der Luvseite gelegenen Knotenpunkten wagerechte Windkräfte W

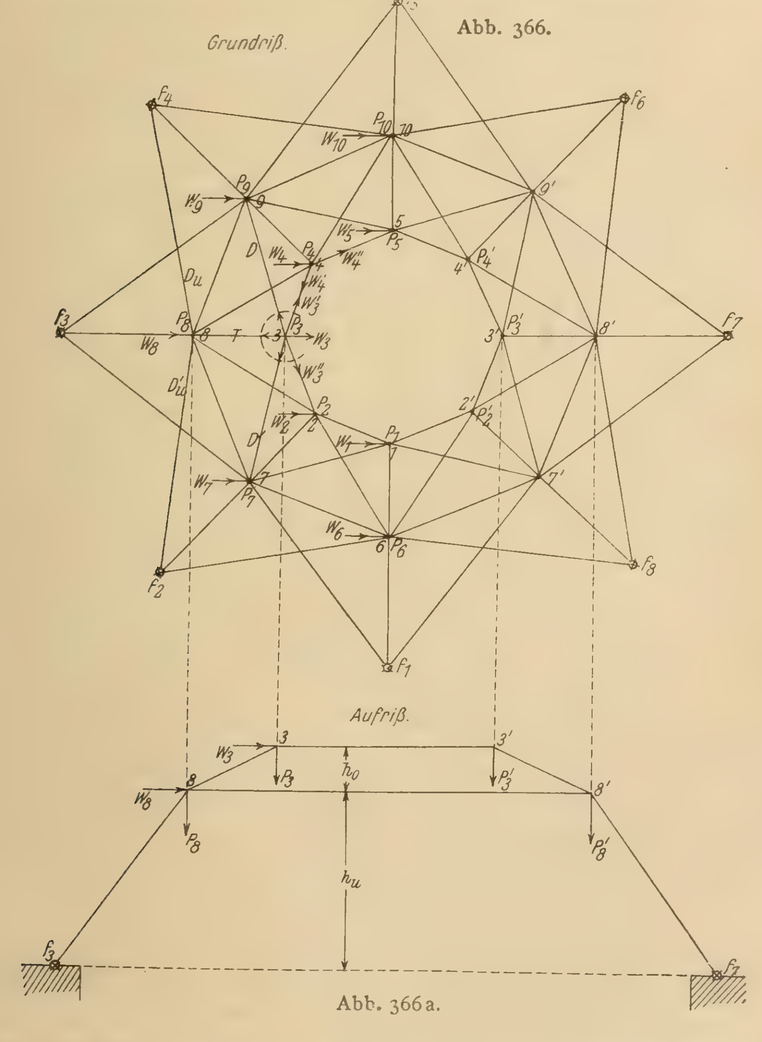


Abb. 366a.

angreifen. Die Diagonalen seien nur zugfest. Es kann also nur immer eine der beiden gekreuzten Diagonalen gespannt sein, während die andere spannungslos ist.

Zunächst zerlegen wir sämtliche wagerechten Windkräfte nach den Richtungen der mit ihnen in derselben Ebene liegenden Ringstäbe, z. B. W_3 nach

den Richtungen 3—2 und 3—4, W_4 nach den Richtungen 4—3 und 4—5 usw. Hierbei handelt es sich also nur um ebene Kräftezerlegungen. Alsdann werden sämtliche senkrechten Kräfte P nach dem unter 2, B, 3, Seite 264 beschriebenen Verfahren in P_T nach der Richtung des Rippenstabes und in P' bezw. P'' nach den Richtungen der beiden Ringstäbe zerlegt, z. B. P_3 nach der Richtung 3—8 und den Richtungen 3—4 und 3—2, P_4 nach 4—9 und 4—3 bezw. 4—5 usw.

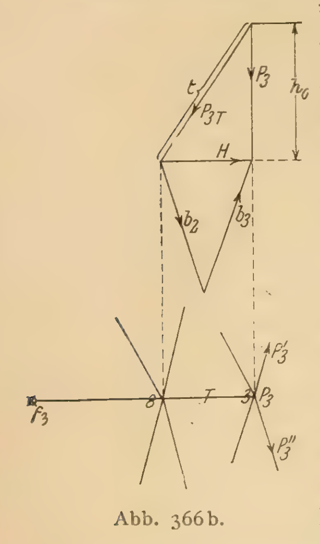


Abb. 366b.

Bei der Zerlegung der Kräfte P wählen wir zweckmäßig die Grund- und Aufrißebene so, daß die Stäbe T im Aufriß in wahrer Größe erscheinen (Abb. 366b). Alsdann wird die zweckmäßig im Maßstabe $P = h_0$ aufgetragene Kraft P nach T in P_T und in eine Seitenkraft H zerlegt, welche in die durch 3—4 und 3—2 gelegte Ebene fällt. H wird sodann im Grundriß nach den Richtungen 3—4 und 3—2 in P' und P'' zerlegt. Betreffs des Pfeilsinns ist zu merken, daß P die Mittelkraft von P_T und H ist. Anderseits ist H die Mittelkraft der Kräfte P' und P''. Die Pfeile von P_T und H müssen also auf P zulaufen, desgleichen die Pfeile von P' und P'' auf H. Da der Kräftemaßstab so gewählt ist, daß die Kraft P durch die Strecke h_0 dargestellt ist, daß also h_0 Meter P Tonnen bedeuten, so stellt 1 m, gemessen im Zeichenmaßstabe, $\frac{P}{h_0}$ Tonnen dar. Handelt es sich z. B. um die Zerlegung von P_3 (Abb. 366b) und sind die Seitenkräfte von P_3 durch die Strecken t und H und die Seitenkräfte von H durch die Strecken b_2 und b_3 dargestellt, so wird

$$P_{3T} = \frac{P_3}{h_0} \cdot t, \quad P_3' = \frac{P_3}{h_0} \cdot b_3 \text{ und } P_3'' = \frac{P_3}{h_0} \cdot b_2.$$

Nunmehr fassen wir die einzelnen Felder der oberen Zone als ebene, in ihren Fußpunkten eingespannte Fachwerkscheiben auf und berechnen die Stabkräfte nach den Gesetzen der ebenen Kräftezerlegung. Wir beginnen mit dem Feld 3—4—8—9, das wir uns in die Bildebene gelegt denken (Abb. 367).

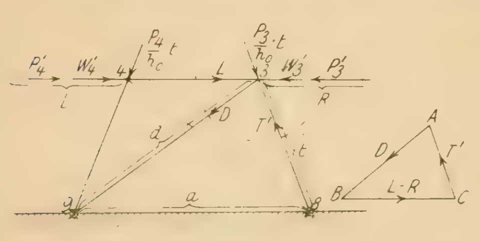


Abb. 367. Abb. 367a.

Im Punkt 3 wirken in wagerechter Richtung die von W_3 und P_3 herrührenden Seitenkräfte W_3' und P_3', in 4 die entsprechenden Seitenkräfte W_4' und P_4'. Außerdem wirken noch in der Richtung der Rippenstäbe die Seitenkräfte $\frac{P_3}{h_0} \cdot t$ und $\frac{P_4}{h_0} \cdot t$. Diese letzteren sind ohne Einfluß auf die Spannkraft D, da sie unmittelbar von den Rippenstäben aufgenommen werden. Sie können daher bei der Berechnung der Spannkraft D vernachlässigt werden. Nunmehr fassen wir das Feld 3—4—8—9 als in den Punkten 8 und 9 eingespannte

ebene Fachwerkscheibe auf. Ist $L > R$, was hier angenommen werde, so wird die Diagonale 4—8 auf Druck beansprucht, muß also spannungslos werden, da sie als nur zugfester Stab keinen Druck aufnehmen kann. Gleichzeitig wird die entgegengesetzt ansteigende Diagonale 3—9 auf Zug in Anspruch genommen. Die in 4 angreifende Kraft L wird dann voll von dem Stabe 3—4 aufgenommen, wirkt also als Druckkraft von der linken Seite her auf den Punkt 3, während von der rechten Seite her in entgegengesetzter Richtung die Kraft R angreift. An dem abgetrennten Knoten 3 müssen sich daher die Kräfte $L—R$, T' und D das Gleichgewicht halten, also ein Kräftedreieck mit stetigem Umfahrungssinn bilden (Abb. 367a). Da das Kräftedreieck dem Dreieck 3—8—9 ähnlich ist, so besteht die Proportion

$$\frac{D}{L-R} = \frac{d}{a}, \text{ woraus } D = (L-R)\frac{d}{a} \text{ (Zug).}$$

Desgleichen muß sich verhalten

$$\frac{T'}{L-R} = \frac{t}{a}, \text{ woraus } T' = (L-R)\frac{t}{a} \text{ (Druck).}$$

Diese Kraft ist jedoch noch nicht die endgültige, in dem Rippenstabe T herrschende Spannkraft, da der Stab außerdem noch durch die in der benachbarten Ebene 2—3—7—8 wirkenden wagerechten Kräfte und durch die in der Richtung von T wirkende Seitenkraft $\frac{P_3}{h_o} \cdot t$ beansprucht wird. Wir berechnen daher sinngemäß zunächst noch die Spannkräfte D' und T'' des benachbarten Feldes 2—3—7—8. Auf den Knoten 3 dieses Feldes wirken die wagerechten Kräfte P_3'' und W_3'', auf den Knoten 2 die Kräfte P_2' und W_2'. Zur Abkürzung setzen wir $P_3'' + W_3'' = L'$ und $P_2' + W_2' = R'$ und machen die Voraussetzung, daß $R' > L'$. Das Feld denken wir uns wieder in die Bildebene gelegt und fassen es als ebene, in den Punkten 7 und 8 eingespannte Fachwerkscheibe auf (Abb. 368). Da $R' > L'$, so wird die Diagonale 2—8 auf Druck beansprucht, also spannungslos, und in dem Ringstab 2—3 herrscht die Druckkraft R'. An dem abgetrennten Knoten 3 zerlegen wir sodann $R'—L'$ nach D' und T'' (Abb. 368a), so daß die Proportionen

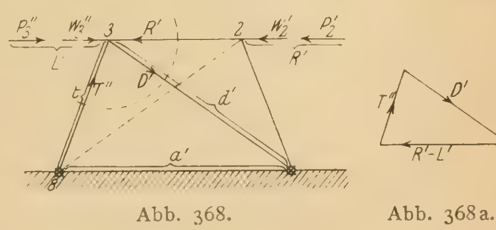


Abb. 368. Abb. 368a.

$$\frac{D'}{R'-L'} = \frac{d'}{a'} \text{ und } \frac{T''}{R'-L'} = \frac{t}{a'}$$

aufgestellt werden können. Aus diesen finden wir

$$D' = (R'-L')\frac{d'}{a'} \text{ (Zug) und } T'' = (R'-L')\frac{t}{a'} \text{ (Druck).}$$

Die wirkliche Spannkraft T setzt sich dann zusammen aus den Druckkräften T', T'' und $\frac{P_3}{h_o} \cdot t$, so daß

$$T = -\left[(L-R)\frac{t}{a} + (R'-L')\frac{t}{a'} + \frac{P_3}{h_o} \cdot t\right].$$

Das negative Vorzeichen von T soll andeuten, daß T eine Druckkraft ist. — Man kann nach Berechnung der Diagonalspannkräfte der oberen Zone die Kräfte T auch unmittelbar durch die an den Knotenpunkten des oberen Ringes anzusetzende Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ finden. Demgemäß erhalten wir z. B. an dem abgetrennten Knoten 3 (Abb. 366) die Gleichung

$$\varkappa_T \cdot h_o + \varkappa_d \cdot h_o + \varkappa_{d'} \cdot h_o + P_3 = 0 \text{ (vergl. 2, A, 2, a, Seite 260),}$$

woraus
$$\varkappa_T = -\frac{1}{h_o}(\varkappa_d \cdot h_o + \varkappa_{d'} \cdot h_o + P_3) = \frac{T}{t}.$$

Somit wird

$$T = -\frac{t}{h_o}(\varkappa_d \cdot h_o + \varkappa_{d'} \cdot h_o + P_3) = -t\left(\varkappa_d + \varkappa_{d'} + \frac{P_3}{h_o}\right)$$

$$= -t\left(\frac{D}{d} + \frac{D'}{d'} + \frac{P_3}{h_o}\right) = -t\left[\frac{(L-R)\frac{d}{a}}{d} + \frac{(R'-L')\frac{d'}{a'}}{d'} + \frac{P_3}{h_o}\right]$$

$$= -\left[(L-R)\frac{t}{a} + (R'-L')\frac{t}{a'} + \frac{P_3}{h_o} \cdot t\right].$$

Die letztere Lösung ist übersichtlicher und soll daher in den nachfolgenden Untersuchungen benutzt werden.

Abb. 369.

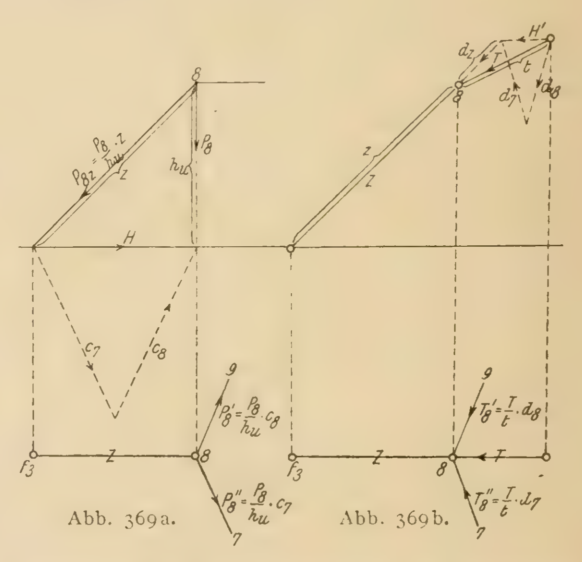


Abb. 369a. Abb. 369b.

Nunmehr gehen wir zur Berechnung der Stabspannkräfte der unteren Zone über (Abb. 369).

a) Es möge angenommen werden, daß die Diagonalen 3—7 und 3—9 der oberen Zone gespannt sind, so daß 4—8 und 2—8 spannungslos bleiben. Alsdann wirken auf den abgetrennten Knotenpunkt 8 die gegebenen Kräfte W_8, P_8 und T. Die Kraft T ist als Druckkraft mit dem auf den Knoten 8 zulaufenden Pfeilsinn eingeführt. Die wagerechte Windkraft W_8 zerlegen wir nach 8—9 und 8—7 in W_8' und W_8'', P_8 nach der Richtung des Rippenstabes Z in P_{8z} und nach den Richtungen der Ringstäbe 8—9 und 8—7 in P_8' und P_8''

(Abb. 369a). Grundriß- und Aufrißebene sind dabei so gewählt, daß die Stäbe Z und T im Aufriß in wahrer Größe erscheinen. Die Zerlegung von P_8 wird entsprechend der Zerlegung der in den oberen Ringknotenpunkten wirkenden Kräfte P durchführt. Die im Maßstabe $P_8 = h_u$ aufgetragene Kraft P_8 wird demgemäß nach Z in P_{8z} und in eine Seitenkraft H zerlegt, welche in die durch 8—9 und 8—7 gelegte Ebene fällt, worauf H im Grundriß nach den Richtungen von 8—9 und 8—7 in P_8' und P_8'' zu zerlegen ist Betreffs des Pfeilsinns ist zu merken, daß P_8 die Mittelkraft von P_{8z} und H und daß H die Mittelkraft von P_8' und P_8'' ist. Die Pfeile von P_{8z} und H müssen daher auf P_8 zulaufen, desgleichen die Pfeile von P_8' und P_8'' auf H. Da der Kräftemaßstab so gewählt ist, daß die Kraft P_8 durch die Strecke h_u dargestellt ist, daß also h_u Meter P_8 Tonnen bedeuten, so stellt 1 m (gemessen im Zeichenmaßstabe) $\frac{P_8}{h_u}$ Tonnen dar. Es wird daher nach Abb. 369a

$$P_{8z} = \frac{P_8}{h_u} \cdot z, \quad P_8' = \frac{P_8}{h_u} \cdot c_8 \quad \text{und} \quad P_8'' = \frac{P_8}{h_u} \cdot c_7.$$

Endlich wird noch die Kraft T nach der Richtung des Rippenstabes Z und nach den Richtungen der beiden Ringstäbe 8—9 und 8—7 zerlegt. Die Kraft T, die im Aufriß in wahrer Größe erscheint und im Maßstab $T = t$ aufgetragen ist (Abb. 369b), zerlegen wir in T_z nach der Richtung von Z und in eine Seitenkraft H', welche in die durch 8—9 und 8—7 gelegte Ebene fällt. H' wird dann im Grundriß nach den Richtungen 8—9 und 8—7, also nach T_8' und T_8'' zerlegt. Die Pfeile der Seitenkräfte T_z und H' müssen auf den Pfeil ihrer Mittelkraft T zulaufen, desgleichen die Pfeile der Seitenkräfte T_8' und T_8'' auf H'. Da der Kräftemaßstab so gewählt ist, daß die Kraft T durch die Strecke t dargestellt ist, daß also t Meter T Tonnen bedeuten, so stellt 1 m (gemessen im Zeichenmaßstabe) $\frac{T}{t}$ Tonnen dar. Es wird daher nach Abb. 369b

$$T_z = \frac{T}{t} \cdot d_z, \quad T_8' = \frac{T}{t} \cdot d_8 \quad \text{und} \quad T_8'' = \frac{T}{t} \cdot d_7.$$

Wir denken uns jetzt das Feld f_3—8—9—f_4 in die Bildebene gelegt und erhalten den in Abb. 370 dargestellten Kräftezustand.

Ergibt sich $L'' > R''$, was hier angenommen werde, so wird die Diagonale 9—f_3 als gedrückte Diagonale spannungslos. Der Stab 8—9 erhält die Druckspannkraft L''.

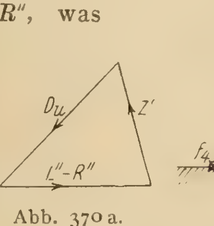


Abb. 370a.

Abb. 370.

An dem abgetrennten Knoten 8 zerlegen wir sodann die dort wirkende Kraft $L'' - R''$ nach den Richtungen D_u und Z' (Abb. 370a). Dann muß sich verhalten

$$\frac{D_u}{L'' - R''} = \frac{d_u}{b}, \text{ so daß } D_u = (L'' - R'') \frac{d_u}{b}$$

Entsprechend verfahren wir bei der Berechnung der Diagonalspannkraft D_u' im benachbarten Feld $7-8-f_2-f_3$.

Wir wollen annehmen, daß sich dort die Diagonale $8-f_2$ als gespannt ergeben hat. Zur Berechnung von Z benutzen wir sodann an dem abgetrennten Knoten 8 (Abb. 369) die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ und erhalten demgemäß die Gleichung

$$\varkappa_z \cdot h_u + \varkappa_{d_u} \cdot h_u + \varkappa_{d'_u} \cdot h_u + \varkappa_T \cdot h_o + P_8 = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$\varkappa_z = -\frac{1}{h_u}\left(\varkappa_{d_u} \cdot h_u + \varkappa_{d'_u} \cdot h_u + \varkappa_T \cdot h_o + P_8\right) = \frac{Z}{z},$$

so daß
$$Z = -\frac{z}{h_u}\left(\varkappa_{d_u} \cdot h_u + \varkappa_{d'_u} \cdot h_u + \varkappa_T \cdot h_o + P_8\right).$$

In der Gleichung ist zu setzen

$$\varkappa_{d_u} = \frac{D_u}{d_u}, \quad \varkappa_{d'_u} = \frac{D_u'}{d_u'}, \quad \varkappa_T = \frac{T}{t}.$$

Da die Kraft T bereits mit ihrem richtigen Pfeil, dem auf den Knoten 8 zu wirkenden Druckpfeil eingeführt ist, darf für $\varkappa_T$ nur der absolute Wert eingesetzt werden.

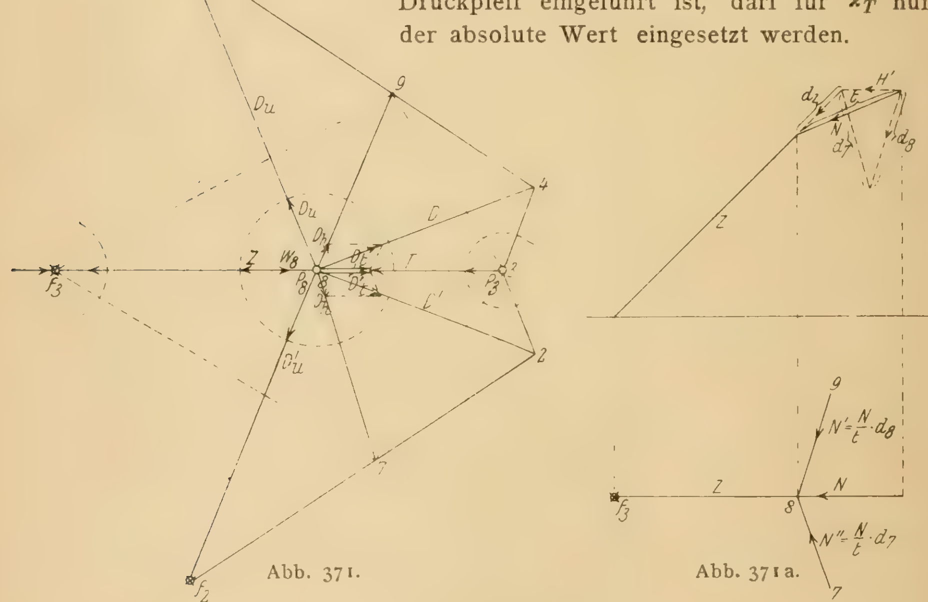


Abb. 371.

Abb. 371 a.

Entsprechend verfahren wir bei der Berechnung der übrigen Spannkräfte D und Z der unteren Zone.

b) Es werde jetzt angenommen, daß die Diagonalen 2—8 und 4—8 gespannt sind, so daß 3—7 und 3—9 spannungslos bleiben (Abb. 371).

Benutzen wir dann am abgetrennten Knoten 3 die Bedingung $\Sigma V = 0$, so erhalten wir die Gleichung

$$\varkappa_T \cdot h_o + P_3 = 0; \quad \varkappa_T = -\frac{P_3}{h_o} = \frac{T}{t}; \quad T = -P_3 \cdot \frac{t}{h_o} \text{ (Druck).}$$

Auf den Knoten 8 wirken jetzt von den Stabkräften der oberen Zone außer der Druckkraft T noch die Zugkräfte D und D'. Wir zerlegen daher D in der Ebene 3—4—8—9 nach den Richtungen 8—9 und 8—3, desgleichen D' in der Ebene 2—3—7—8 nach den Richtungen 8—7 und 8—3 (Abb. 372). Dann muß sich verhalten

$$\frac{D_h}{D} = \frac{c}{d}; \quad D_h = D \cdot \frac{c}{d}.$$

Ferner $$\frac{D_t}{D} = \frac{t}{d}; \quad D_t = D \cdot \frac{t}{d}.$$

Sinngemäß werden

$$D_h' = D' \cdot \frac{c'}{d'} \text{ und } D_t' = D' \cdot \frac{t}{d'}.$$

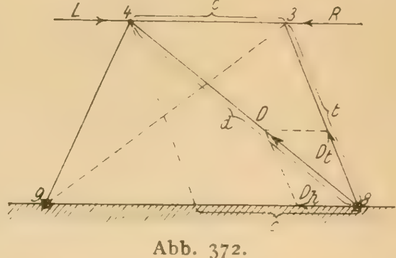


Abb. 372.

Die Seitenkraft D_h' wirkt in der Ebene 8—7—f_2—f_3, kommt daher für die Ebene 8—9—f_3—f_4 nicht mehr in Betracht.

Die Mittelkraft der in Richtung von T wirkenden Kraft ist dann $N = T - (D_t + D_t')$. Diese Kraft N zerlegen wir wieder nach dem in Abb. 369b veranschaulichten Verfahren nach den Richtungen Z', 8—9 und 8—7, wobei zweckmäßig die Kraft N durch die Strecke t dargestellt wird (Abb. 371a). Die in die Richtungen von 8—9 bezw. 8—7 fallenden Seitenkräfte sind alsdann

$$N' = \frac{N}{t} \cdot d_8 \text{ bezw. } N'' = \frac{N}{t} \cdot d_7.$$

Sinngemäß berechnen wir D_h, N' und N'' am Knoten 9. (In Abb. 373 wurden die in den Punkten 8 bezw. 9 wirkenden Seitenkräfte D_h und N' durch den Zeiger 8 bezw. 9 gekennzeichnet.) Klappen wir jetzt das Feld 8—9—f_3—f_4 in die Bildebene, so erhalten wir den in Abb. 373 dargestellten Kräftezustand. Zur Abkürzung werde gesetzt

$$W_8' + P_8' + D_h^8 - N_8' = R''' \text{ und } W_9' + P_9' + D_h^9 - N_9' = L'''.$$

Ergibt sich z. B. $L''' > R'''$, so wird die Diagonale 9—f_3 spannungslos und der Stab 8—9 erhält die Druckkraft L'''. Zerlegen wir dann an dem abgetrennten Knoten 8 (Abb. 373) die dort wirkende Kraft $L''' - R'''$ nach den Richtungen von D_u und Z' (Abb. 373a), so muß sich verhalten

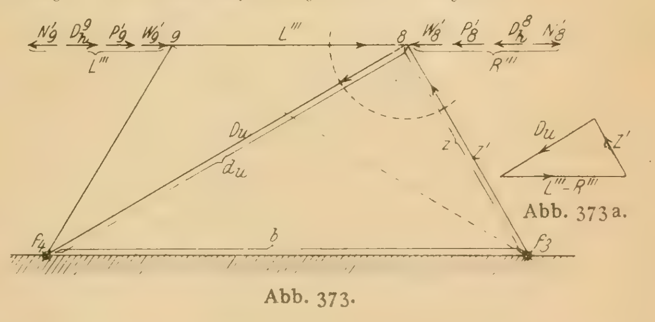


Abb. 373. Abb. 373a.

$$\frac{D_u}{L''' - R'''} = \frac{d_u}{b}; \quad D_u = \frac{d_u}{b}(L''' - R''').$$

Entsprechend verfahren wir bei der Berechnung der Diagonalspannkraft D_u' im benachbarten Feld 7—8—f_2—f_3.

Zur Berechnung von Z benutzen wir jetzt am abgetrennten Knotenpunkt 8 (Abb. 371) die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$ und erhalten demgemäß

$$\varkappa_z \cdot h_u + \varkappa_{d_u} \cdot h_u + \varkappa_{d'_u} \cdot h_u - \varkappa_d \cdot h_o - \varkappa_{d'} \cdot h_o + \varkappa_T \cdot h_o + P_8 = 0.$$

$$\varkappa = -\frac{1}{h_u}(\varkappa_{d_u}\cdot h_u + \varkappa_{d'_u}\cdot h_u - \varkappa_d\cdot h_o - \varkappa_{d'}\cdot h_o + \varkappa_T\cdot h_o + P_8) = \frac{Z}{z};$$

$$Z = -\frac{z}{h_u}(\varkappa_{d_u}\cdot h_u + \varkappa_{d'_u}\cdot h_u - \varkappa_d\cdot h_o - \varkappa_{d'}\cdot h_o + \varkappa_T\cdot h_o + P_8).$$

Hierin ist $\varkappa_{d_u} = \frac{D_u}{d_u}$; $\varkappa_{d'_u} = \frac{D_u'}{d_u'}$; $\varkappa_d = \frac{D}{d}$; $\varkappa_{d'} = \frac{D'}{d'}$; $\varkappa_T = \frac{T}{t}$.

Da die Kraft T bereits mit ihrem richtigen Pfeil, dem auf den Knoten 8 zu wirkenden Druckpfeil eingeführt ist, darf für $\varkappa_T$ nur der absolute Wert eingesetzt werden.

Endlich mögen noch die Stützwiderstände bestimmt werden. Gesucht sei z. B. der Auflagerdruck an dem Auflager f_3. Sind die beiden dort angreifenden Diagonalen spannungslos, wie z. B. in Abb. 371 angenommen wurde, so stimmt der Auflagerdruck nach Größe und Richtung mit der in f_3 wirkenden Spannkraft Z überein. Sind dagegen die Diagonalen gespannt, so ist der Auflagerdruck nach Größe und Richtung nur bestimmt, wenn man drei Seitenkräfte angeben kann (Abb. 374). Wir zerlegen daher den Druck in die Seitenkräfte V, H und C, von denen V senkrecht zur Grundrißebene gerichtet ist, H in der Grundrißebene liegt und C lotrecht zu H wirkt. Benutzen wir dann an dem abgetrennten Auflagerknotenpunkt f_3 die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma V = 0$, so entsteht die Gleichung

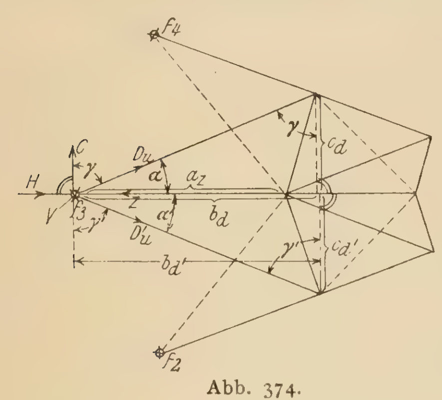


Abb. 374.

$$V - \varkappa_z\cdot h_u + \varkappa_{d_u}\cdot h_u + \varkappa_{d'_u}\cdot h_u = 0,\ \text{woraus}\ V = h_u(\varkappa_z - \varkappa_{d_u} - \varkappa_{d'_u}).$$

Alsdann setzen wir die Summe aller Seitenkräfte in der Richtung von $H = 0$ und erhalten

$$H - Z\cdot\cos\beta + D_u\cdot\cos\alpha + D_u'\cdot\cos\alpha' = 0.$$

β ist hierin der Winkel, den Z in der durch Z und H gelegten Ebene mit H einschließt, während α und α' die Winkel sind, welche D_u und D_u' in den durch H und D_u bezw. durch H und D_u' gelegten Ebenen mit H einschließen. Es wird daher

$$\cos\beta = \frac{a_z}{z},\ \cos\alpha = \frac{b_d}{d_u}\ \text{und}\ \cos\alpha' = \frac{b_{d'}}{d_u'},$$

worin z, d_u und d_u' die wahren Längen der Stäbe Z, D_u und D_u' bedeuten. Mit diesen Werten erhält man daher die Gleichung

$$H - Z\cdot\frac{a_z}{z} + D_u\cdot\frac{b_d}{d_u} + D_u'\cdot\frac{b_{d'}}{d_u'} = 0,$$

woraus $H = Z\cdot\frac{a_z}{z} - D_u\cdot\frac{b_d}{d_u} - D_u'\cdot\frac{b_{d'}}{d_u'} = \varkappa_z\cdot a_z - \varkappa_{d_u}\cdot b_d - \varkappa_{d'_u}\cdot b_{d'}$.

$\varkappa_z$ ist hierin mit seinem absoluten Wert einzusetzen, da das negative Vorzeichen von $\varkappa_z$ (vergl. Seite 294) bereits durch den auf den Knotenpunkt f_3 zulaufenden Druckpfeil beim Ansetzen der Gleichgewichtsbedingung berücksichtigt wurde.

Setzt man endlich noch die Summe aller Kräfte in der Richtung von $C = 0$, so entsteht die Gleichung

$$C + D_u \cdot \cos\gamma - D_u' \cdot \cos\gamma' = 0.$$

γ und γ' sind die Winkel, welche D_u bezw. D_u' in der durch D_u und C bezw. durch D_u' und C gelegten Ebene mit C einschließen.

Mit $$\cos\gamma = \frac{c_d}{d_u} \text{ und } \cos\gamma' = \frac{c_{d'}}{d_u'}$$

erhält man $$C + D_u \cdot \frac{c_d}{d_u} - D_u' \cdot \frac{c_{d'}}{d_u'} = 0,$$

woraus $$C = \frac{D_u'}{d_u'} \cdot c_{d'} - \frac{D_u}{d_u} \cdot c_d = \varkappa_{d'_u} \cdot c_{d'} - \varkappa_{d_u} \cdot c_d.$$

5. **Die auf Linienlagern ruhende Kuppel mit Fußring** (Abb. 375).

Zwecks dreistäbigen Anschlusses der Knotenpunkte müssen zunächst die Linienlager durch Y-Stäbe festgemacht werden (vergl. auch die Reichstagskuppel). Alsdann können angeschlossen werden:

a	durch	6, 7, 8
b	„	9, 10, 11
c	„	12, 13, 14
d	„	15, 16, 17
e	„	18, 19, 20.

Nach Beseitigung der Y-Stäbe werden dann zwischen den Auflagerpunkten der Linienlager ebenso viele Z-Stäbe angebracht.

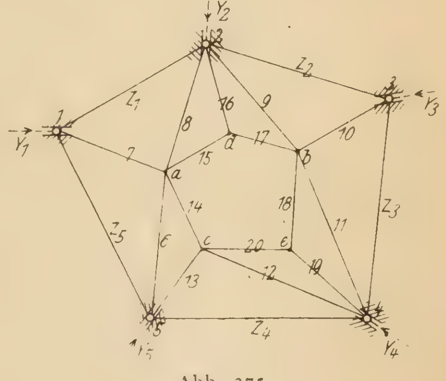


Abb. 375.

Die Gleitrichtungen der beweglichen Auflager dürfen jedoch nicht willkürlich gewählt werden. Sie müssen vielmehr derart beschaffen sein, daß eine, wenn auch noch so kleine, Verschiebung der Kuppel in irgend einer Richtung parallel zur Grundrißebene nicht möglich ist.

Nachstehend möge nun untersucht werden, ob bei der in Abb. 375 dargestellten Lagerung eine Verschiebung der Kuppel möglich ist oder nicht. Zu dem Zweck denken wir uns das Auflager bei 5 beseitigt, wodurch das System einfach beweglich wird, weil eine Starrheitsbedingung beseitigt ist (Abb. 376).

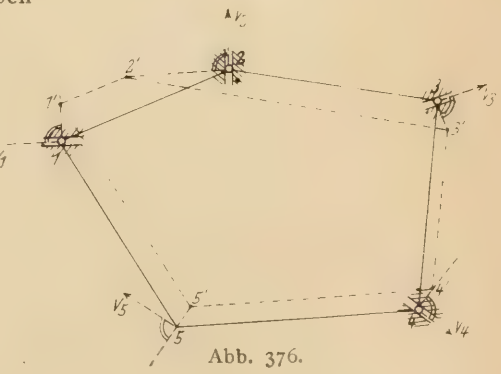


Abb. 376.

Wir zeichnen nun zu der Figur F des Fußringes eine beliebige Figur F'. Dem Punkte 1 erteilen wir zunächst die willkürliche lotrechte Geschwindigkeit 1—1', die senkrecht zu V_1 gerichtet sein muß, da der Punkt 1 sich

nur in der Richtung V_1 verschieben kann. 2' liegt sodann einerseits auf der zu V_2 im Punkte 2 gezeichneten Lotrechten, anderseits auf der durch 1' zu 1—2 gezeichneten Parallelen. Ebenso liegt 3' sowohl auf der im Punkte 3 zu V_3 gezogenen Lotrechten als auch auf der durch 2' zu 2—3 gezogenen Parallelen. Dasselbe gilt sinngemäß für 4'. Da nun der Punkt 5 zweistäbig an 1 und 4 durch die Stäbe 1—5 und 4—5 angeschlossen ist, so ist 5' als Schnittpunkt der zu 1—5 und 4—5 gezogenen Parallelen 1'—5' und 4'—5' bestimmt. Die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes 5 hat somit die Richtung 5—5'. Seine wirkliche Geschwindigkeit V_5 fällt also in die Richtung der Lotrechten zu 5—5'. Liegt nun V_5 in der Richtung der Führung des Lagers 5, so ist die Lagerung eine bewegliche, da sich dann der Punkt 5 bei der der Figur F' entsprechenden Verschiebung in der Richtung von V_5 bewegen kann. Für die Gleitrichtung des Lagers 5 ist daher die Richtung 5—5' die geeignetste.

Gang der Berechnung.

In den Knotenpunkten mögen beliebig gerichtete Kräfte angreifen. Es können sodann berechnet werden (Abb. 375)

an dem abgetrennten Knoten e die Spannkräfte S_{18}, S_{19}, S_{20}
„ „ „ „ d „ „ S_{15}, S_{16}, S_{17}
„ „ „ „ c „ „ S_{12}, S_{13}, S_{14}
„ „ „ „ b „ „ S_9, S_{10}, S_{11}
„ „ „ „ a „ „ S_6, S_7, S_8.

Alsdann setzen wir am abgetrennten Knoten 1 die Summe aller Kräfte in der Richtung von $Y_1 = 0$. Aus dieser Gleichgewichtsbedingung ergibt sich Y_1, ausgedrückt durch Z_1 und Z_5. Am Knoten 2 setzen wir sodann die Summe aller Kräfte in der Richtung von $Y_2 = 0$, woraus Y_2, ausgedrückt durch Z_1 und Z_2, gefunden wird. Am Knoten 3 finden wir entsprechend Y_3, ausgedrückt durch Z_2 und Z_3. Am Knoten 4 wird dann Y_4, ausgedrückt durch Z_3 und Z_4, bestimmt. Endlich finden wir Y_5 am Knoten 5, ausgedrückt durch Z_4 und Z_5.

Die Bedingungen $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$, $Y_3 = 0$, $Y_4 = 0$ und $Y_5 = 0$ liefern uns sodann fünf Gleichungen mit den fünf Unbekannten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 und Z_5, die somit eindeutig bestimmt sind.

6. Zum Schluß möge noch die ganz allgemeine **Zerlegung einer Kraft P nach sechs gegebenen Richtungen**[1]) gezeigt werden.

Soll ein Körper, auf den eine beliebig gerichtete Kraft wirkt, statisch bestimmt gelagert werden, so müssen die Auflager derart angeordnet werden, daß die Auflagerkräfte mittels der sechs Gleichgewichtsbedingungen, die für ein räumliches Kräftesystem bestehen, berechnet werden können. Die Anzahl der unbekannten Auflagerkräfte muß also = 6 sein. Da die Anzahl der Unbekannten an einem festen Auflager = 3, an einem einseitig beweglichen Linienlager = 2 und an einem allseitig beweglichen Lager = 1 ist, so kann die Lagerung erfolgen durch

[1]) Nach dem Verfahren von Dipl.-Ing. P. Rinkel, Charlottenburg.

1.	1 festes,	1 einseitig bewegliches,	1 allseitig bewegliches Lager
2.	1 ,, ,	— ,	3 ,, ,, ,,
3.	— ,	3 ,, ,, ,	—
4.	— ,	2 ,, ,, ,	2 ,, ,, ,,
5.	— ,	1 ,, ,, ,	4 ,, ,, ,,
6.	— ,	— ,	6 ,, ,, ,,

Wir ersetzen die Lager durch Auflagerstäbe, und zwar entsprechen einem festen Auflager drei Auflagerstäbe, einem einseitig beweglichen zwei und einem allseitig beweglichen Lager ein Auflagerstab (vergl. Seite 257).

Der allgemeinste Fall ist der Fall 6 (Stützung durch sechs Auflagerstäbe). Er tritt ein, wenn niemals zwei der sechs Stäbe in einer Ebene liegen (Abb. 377). Alle anderen Fälle sind Sonderfälle von 6, bei denen diese Bedingung nicht zutrifft. Sie sind in bezug auf ihre statische Behandlung Vereinfachungen von Fall 6. Wir wollen uns in den nachfolgenden Untersuchungen auf den allgemeinen Fall beschränken.

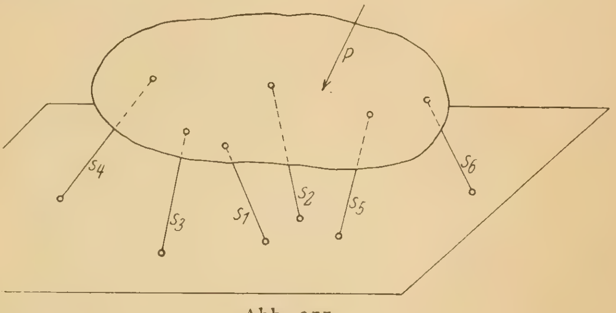


Abb. 377.

Die Lösung der Aufgabe erfolgt mit Hilfe des Ersatzstabverfahrens von Müller-Breslau (vergl. Seite 269). Demgemäß beseitigen wir zunächst drei der Auflagerstäbe und ersetzen sie durch drei andere (Y-Stäbe), deren Lage wir so wählen, daß die Zerlegung nach den Richtungen der drei noch verbleibenden Stäbe und der drei Ersatzstäbe bequem ausgeführt werden kann.

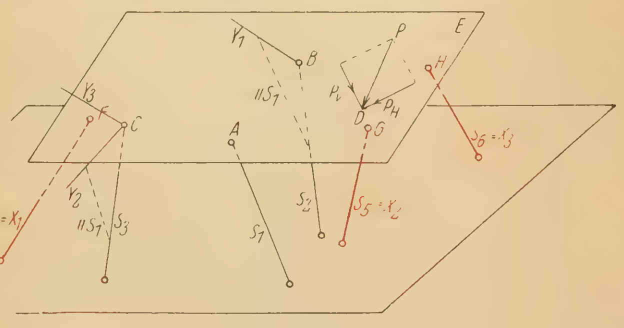


Abb. 378.

In Abb. 378 stellen die Stäbe s_1, s_2 und s_3 die verbleibenden Auflagerstäbe dar. Die beseitigten, in der Abbildung rot angedeuteten Stäbe seien s_4, s_5 und s_6. Durch einen beliebigen Punkt (A) des Stabes s_1 legen wir eine Ebene E, die s_2 in B und s_3 in C schneidet und deren Lage zweckmäßig normal zu s_1 gewählt wird. Die drei Ersatzstäbe Y_1, Y_2 und Y_3 legen wir in die Ebene E, und zwar greife Y_1 in B, Y_2 und Y_3 in C an, wodurch der allgemeine Fall auf den Spezialfall 1 zurückgeführt ist (ein festes Auflager in C, ein einseitig bewegliches in B und ein allseitig bewegliches in A und dementsprechend Stützung durch drei Auflagerstäbe in C, durch zwei in B und durch einen in A). Die Richtung von Y_1 wird so gewählt, daß Y_1 mit

s_2 in einer Ebene parallel zu s_1 liegt. Die Richtungen von Y_2 und Y_3 sind beliebig, sollen hier jedoch derart angenommen werden, daß Y_2 mit s_3 in eine parallel zu s_1 gerichtete Ebene fällt, während Y_3 in der Ebene E-parallel zu Y_1 liegt. Der Schnittpunkt der gegebenen Kraft P mit der Ebene E sei D.

Wir legen nun durch P eine normal zu E gerichtete Ebene und zerlegen in dieser P in eine in E fallende Seitenkraft P_H und in eine normal zu E gerichtete Seitenkraft P_V, die also parallel zu s_1 gerichtet ist (die Ebene E war normal zu s_1 gelegt). Da Y_1, Y_2, Y_3 und P_H in derselben Ebene E liegen, so kann P_H mit Hilfe des Culmannschen Verfahrens (vergl. Seite 4 unter 4) nach den Richtungen von Y_1, Y_2 und Y_3 zerlegt werden (Abb. 379). Die auf Y_1, Y_2 und Y_3 entfallenden Anteile von P_H seien Y_{1H}, Y_{2H} und Y_{3H}.

P_V zerlegen wir sodann in drei zu P_V parallele Seitenkräfte P_A, P_B und P_C, die in A, B und C angreifen, und die in jedem dieser Punkte aus der Momentengleichung in bezug auf die durch die beiden anderen Punkte gelegte Achse gefunden werden. Da P_A als normal zur Ebene E wirkende Kraft in der Richtung von s_1 wirkt, so entsteht in s_1 die Druckspannkraft $S_{1V} = P_A$. Ferner liegt P_B mit s_2 und Y_1 in einer Ebene (normal zu E), kann also in dieser nach s_2 und Y_1 zerlegt werden. Auf s_2 entfalle S_{2V} und auf Y_1 Y_{1V}. Endlich werde P_C in C nach den Richtungen von s_3 und Y_2 zerlegt, mit denen P_C in derselben Ebene liegt. Die auf s_3 und Y_2 entfallenden Anteile seien S_{3V} und Y_{2V}. Y_3 wird durch diese Zerlegung nicht beeinflußt (weil in einer Ebene liegend, die normal zu der Ebene gerichtet ist, in der P_C, S_{3V} und Y_{2V} wirken). Nunmehr ist die Kraft P auf die sechs Stäbe s_1, s_2, s_3, Y_1, Y_2 und Y_3 verteilt, und zwar wird

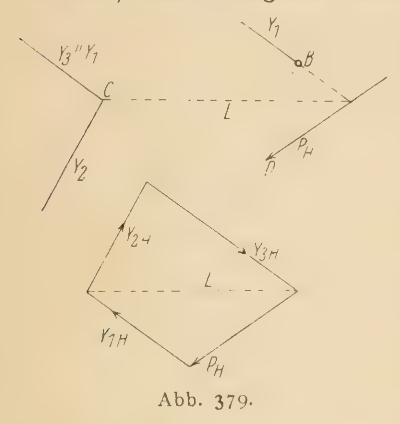


Abb. 379.

$$S_{1P} = P_A,\ S_{2P} = S_{2V},\ S_{3P} = S_{3V},\ Y_{1P} = Y_{1H} + Y_{1V},\ Y_{2P} = Y_{2H} + Y_{2V} \text{ und } Y_{3P} = Y_{3H}.$$

Die ursprünglich fortgelassenen Stäbe s_4, s_5 und s_6 schneiden die Ebene E in den Punkten F, G und H. Ihre unbekannten Stabkräfte seien $S_4 = X_1$, $S_5 = X_2$ und $S_6 = X_3$, die in den Punkten F, G und H angreifen. Wir drücken nunmehr die Kräfte S_1, S_2, S_3, Y_1, Y_2 und Y_3 durch die Unbekannten X_1, X_2, X_3 und die gegebene Last P aus und ermitteln demgemäß den Einfluß der vier Kraftwirkungen getrennt voneinander.

1. Es wirke nur P; X_1, X_2 und X_3 werden $= 0$ angenommen. Infolgedessen entstehen in den Stäben S_1, S_2, S_3, Y_1, Y_2 und Y_3 die Kräfte S_{1P}, S_{2P}, S_{3P}, Y_{1P}, Y_{2P} und Y_{3P}, deren Berechnung oben angegeben wurde.

2. Es wirke nur X_1; P, X_2 und X_3 werden $= 0$ angenommen. Wir ermitteln zunächst den Einfluß der Kraft $X_1 = 1$ auf die sechs Stabkräfte S_1, $S_2 \ldots Y_3$ nach demselben Verfahren, nach dem die Zerlegung von P nach den sechs Stabrichtungen vorgenommen wurde. Die Stabkräfte infolge dieses Zustandes seien S_1', S_2', S_3', Y_1', Y_2' und Y_3'. Durch Vervielfachung dieser Kräfte

mit X_1 erhält man dann die Stabkräfte infolge der Kraft X_1, also $S_1' \cdot X_1$, $S_2' \cdot X_1$, $S_3' \cdot X_1$, $Y_1' \cdot X_1$, $Y_2' \cdot X_1$ und $Y_3' \cdot X_1$.

3. Es wirke nur X_2; P, X_1 und X_3 werden $= 0$ angenommen. Infolge dieses Zustandes entstehen die Stabkräfte $S_1'' \cdot X_2$, $S_2'' \cdot X_2$, $S_3'' \cdot X_2$, $Y_1'' \cdot X_2$, $Y_2'' \cdot X_2$ und $Y_3'' \cdot X_2$, worin S_1'', $S_2'' \ldots Y_3''$ die Spannkräfte in den Stäben s_1, $s_2 \ldots Y_3$ infolge $X_2 = 1$ sind, die ebenfalls nach demselben Verfahren gefunden werden können, nach dem die Zerlegung der Kraft P nach den sechs Stabrichtungen S_1, $S_2 \ldots Y_3$ vorgenommen wurde.

4. Es wirke nur X_3; P, X_1 und X_2 werden $= 0$ angenommen. Sind S_1''', S_2''', S_3''', Y_1''', Y_2''' und Y_3''' die Stabkräfte in den Stäben s_1, $s_2 \ldots Y_3$ infolge $X_3 = 1$, die wie vor ermittelt werden können, so entstehen infolge X_3 die Stabkräfte $S_1''' \cdot X_3$, $S_2''' \cdot X_3$, $S_3''' \cdot X_3$, $Y_1''' \cdot X_3$, $Y_2''' \cdot X_3$ und $Y_3''' \cdot X_3$.

Um nun den wirklichen Zustand zu erhalten, müssen die vier Einzelzustände addiert und gleichzeitig die Spannkräfte Y_1, Y_2 und Y_3 gleich Null gesetzt werden. Denn dann wirken im ganzen P, S_1, S_2, S_3, X_1, X_2 und X_3, wie es in Wirklichkeit der Fall ist. Man erhält nach dem Gesetz von der Summierung der Einzelwirkungen

$$1.\quad S_1 = S_{1P} + S_1' \cdot X_1 + S_1'' \cdot X_2 + S_1''' \cdot X_3$$
$$2.\quad S_2 = S_{2P} + S_2' \cdot X_1 + S_2'' \cdot X_2 + S_2''' \cdot X_3$$
$$3.\quad S_3 = S_{3P} + S_3' \cdot X_1 + S_3'' \cdot X_2 + S_3''' \cdot X_3$$
$$4.\quad Y_1 = Y_{1P} + Y_1' \cdot X_1 + Y_1'' \cdot X_2 + Y_1''' \cdot X_3 = 0$$
$$5.\quad Y_2 = Y_{2P} + Y_2' \cdot X_1 + Y_2'' \cdot X_2 + Y_2''' \cdot X_3 = 0$$
$$6.\quad Y_3 = Y_{3P} + Y_3' \cdot X_1 + Y_3'' \cdot X_2 + Y_3''' \cdot X_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen 4, 5 und 6 können die Unbekannten X_1, X_2 und X_3 eindeutig bestimmt werden. Nach Berechnung der Kräfte X findet man dann S_1, S_2 und S_3 aus den Gleichungen 1, 2 und 3.

Literatur.

1. A. Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen. 1863. 5. Aufl. 1894 (Rittersches Schnittverfahren).
2. Clerk Maxwell, On reciprocal figures and diagrams of forces. Philosoph. Magazine. Bd. 27. 1864. — On the application of the theory of reciprocal polar figures to the construction of diagrams of forces. Engineer, Vol. 24, S. 402.
3. Culmann, Graphische Statik. 1866. 2. Aufl. 1875.
4. E. Winkler, Vortrag über die Berechnung der Bogenbrücken. Mitteilungen des Architekten- und Ingenieurvereins für Böhmen. 1868. In dieser Arbeit werden die Einflußlinien eingeführt.
5. Bauschinger, Elemente der graphischen Statik. München 1871.
6. Cremona, Le figure reciproche nella Statica Grafica. Milano 1872. 3. Aufl.
7. O. Mohr, Die graphische Statik und das graphische Rechnen. Civilingenieur 1875. — Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume. Civilingenieur 1876. — Technische Mechanik. Herausgegeben vom Ingenieurverein am Polytechnikum Stuttgart 1877.
8. H. Müller-Breslau, Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken. Berlin 1880.
9. Föppl, Theorie des Fachwerks. Leipzig 1880.
10. H. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 1. Aufl. (Elemente) 1881 5. Aufl. des ersten Bandes 1912.
11. Cremona, Les figures réciproques en statique graphique, ouvragé précédé d'une introduction de G. Jung et suivi d'un appendice extrait des mémoires des Cours de statique graphique de Ch. Saviotti. Traduit par L. Bossut. Paris 1885.
12. Henneberg, Statik der starren Systeme. Darmstadt 1886.
13. H. Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des ebenen Fachwerks. Schweizerische Bauzeitung 1887.
14. O. Mohr, Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen. Civilingenieur 1887. 33. Bd., S. 43. — Über Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne kinematischer Ketten. Civilingenieur 1887.
15. Land, Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Schweizerische Bauzeitung 1887. 10. Bd., S. 157. — Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger. Zeitschr. des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1888, S. 11.
16. Saviotti, La statica grafica. 2. Teil 1888, S. 26.
17. A. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik. II. Teil: Das Fachwerk. 1890.
18. Föppl, Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.
19. Zimmermann, Über Raumfachwerke. 1901.
20. Föppl, Graphische Statik. 2. Aufl. 1903.
21. Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. 1. Bd.: Einführung in die Grundlagen. 1903. — 2. Bd.: Statisch bestimmte Träger. 1904. Leipzig.
22. O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1907. Zweite Auflage 1913.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Die Statik der Bauwerke. In zwei Bänden. Von Dr.-Ing. *R. Kirchhoff*, Reg.-Baumeister.
Zweiter Band: Formänderungen statisch bestimmter ebener Fachwerk- und Vollwandträger. — Allgemeine Theorie der statisch unbestimmten Fachwerk- und Vollwandträger. Besondere Rechnungsmethoden. — Die Gewölbetheorie. — Die Theorie des Erddrucks.
Mit vielen zum Teil farbigen Abb. *In Vorbereitung.*

Der Zweigelenkbogen als statisch unbestimmtes Hauptsystem. Von Dr.-Ing. *R. Kirchhoff*, Reg.-Baumeister. Mit 84 Textabb. 1911. geh. 10,80 M.

Einflußlinien statisch unbestimmter, elastisch gelagerter Tragwerke in allgemeiner, auch für veränderlichen Querschnitt geltender Behandlung. Von Dr.-Ing. *Arnstein.* Mit 110 Textabb. 1912. geh. 18 M., geb. 22 M.

Der vollwandige Zweigelenkbogen. Entwurf, bauliche Ausbildung und Berechnung des Zweigelenkbogens, seiner Fahrbahn und Widerlager. Von *K. Brabandt*, Kgl. Eisenbahn-Bau- und Betriebsinspektor.
Mit 83 Abb. 1910. geh. 12 M.

Hilfsmittel zur einfachen Berechnung von Formänderungen und von statisch unbestimmten Trägern. Von *R. Schadek v. Degenburg* und *K. Demel*, Ingenieure. Mit 440 Textabb. 1915. geh. 12 M.

Hilfswerte für das Entwerfen und die Berechnung von Brücken mit eisernem Überbau. Als Ergänzung zu den Vorschriften für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Überbau auf den preußischen Staatseisenbahnen vom 1. Mai 1903 (Lastenzug A) und vom 31. Dezember 1910 (Lastenzug B). Von *F. Dircksen* †. Vierte neubearbeitete und für den Lastenzug B erweiterte Auflage. Von *G. Schaper*, Reg.-Baumeister.
Mit 39 Textabb. u. 1 Tafel. 1913. geh. 20 M.

Von der Schrumpfarbeit am Fachwerk. Von Dr.-Ing. *Ellerbeck*, Reg.- und Baurat. Mit 50 Textabb. 1918. geh. 7,20 M.

Der Rahmen. Einfaches Verfahren zur Berechnung von Rahmen aus Eisen und Eisenbeton mit ausgeführten Beispielen. Von Dr.-Ing. *W. Gehler*, Professor an der Techn. Hochschule, Dresden. Zweite neubearbeitete Aufl.
Mit 512 Textabb. 1919. geh. 27 M., geb. 30 M.

Tabellen der Maximalquerkräfte und Maximalmomente durchlaufender Träger mit 2, 3 und 4 Öffnungen verschiedener Weite bei gleichmäßig verteilter Belastung. Von *W. Kapferer*, Dipl.-Ing.
Mit 15 Textabb. 1920. steif geh. 15 M.

Auflager und Gelenke. Die Spannungsverteilung und Wirkungsweise von Flächenlagern, Bleigelenken, Kipplagern und Wälzgelenken. Von Dr.-Ing. *A. Kollmar.* Mit 57 Textabb. 1919. geh. 18 M.

Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes in größerer Tiefe. Gesichtspunkte für die Berechnung, praktische Beispiele und Erddrucktabellen. Von *H. Krey*, Reg.- u. Baurat. Zweite umgearbeitete Aufl.
Mit 80 Textabb. 1918. geh. 18 M.

Das Verfahren der Einflußlinien. Nach Vorträgen. Von *Th. Landsberg*, Geh. Baurat, Professor. Siebente neubearbeitete Aufl.
Mit 105 Textabb. 1920. geh. 27 M., geb. 30 M.

Vorstehende Preise enthalten alle derzeitigen Zuschläge.

Hölzerne Brücken. Statische Berechnung und Bau der gebräuchlichsten Anordnungen. Von *A. Laskus*, Geh. Reg.-Rat.
Mit 303 Textabb. 1918. geh. 18 M., kart. 21 M.

Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Von Prof. Dr.-Ing. *O. Mohr*, Geh. Regierungsrat. Zweite neubearbeitete Auflage.
Mit 491 Textabb. 1913. geh. 54 M., geb. 62 M.

Die Belastung der Baukonstruktionen durch Schnee. Versuche und Studien über das spezifische Gewicht von Schnee und über Schneelasten. Von Dr. Ing. *L. Schaller.* 1909. geh. 7,50 M.

Eiserne Brücken. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Studierende und Konstrukteure. Von *G. Schaper*, Geheimer Baurat und Vortragender Rat. Fünfte neubearbeitete Auflage.
Mit rd. 1900 Textabb. *In Vorbereitung.*

Kurze Anleitung für die Bauüberwachung eiserner Brücken. Von *G. Schaper*, Reg.-Baumeister.
Mit 11 Textabb. 1912. geh. 4 M.

Leitfaden für das Entwerfen und die Berechnung gewölbter Brücken. Von *G. Tolkmitt*, Königl. Baurat. Dritte neubearbeitete Auflage von *A. Laskus*, Geh. Regierungsrat.
Mit 42 Textabb. 1912. geh. 15 M.

Statik für Baugewerkschulen und Baugewerksmeister. Von *Karl Zillich*, Königl. Baurat.
Teil I: Graphische Statik. 1919. Siebente Aufl. kart. 4,80 M.
Teil II: Festigkeitslehre. 1921. Achte Aufl. *Unter der Presse.*
Teil III: Größere Konstruktionen. 1919. Siebente Aufl. kart. 6 M.

Genietete Träger. Tabellen für Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte. Von Dr.-Ing. Dr. *H. Zimmermann*, Geh. Oberbaurat. Dritte bedeutend vermehrte Auflage.
Mit Abb. u. 1 Tafel. 1893. steif geh. 15 M.

Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung. Von Dr. *H. Zimmermann*, Geh. Oberbaurat.
Mit 3 Textabb., 1 Tafel u. zahlreichen Tabellen. 1906. geh. 6 M.

Die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken. Von Dr.-Ing. Dr. *H. Zimmermann*, Wirkl. Geh. Oberbaurat.
Mit 8 Textabb. u. 1 Zahlentafel. 1910. geh. 9 M.

Über Raumfachwerke. Neue Formen und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige Dachbauten. Von Dr. *H. Zimmermann*, Geh. Oberbaurat.
Mit 36 Textabb. 1901. geh. 24 M.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Von Dr.-Ing. Dr. *H. Zimmermann*, Wirkl. Geh. Oberbaurat. Achte Auflage.
Ausgabe **A** (wie bisher). 1918. geb. 27 M.
Ausgabe **B** mit Anhang: Quadrattafel. 1918. geb. 30 M.

Vorstehende Preise enthalten alle derzeitigen Zuschläge.



